Existence of a Stationary Navier-Stokes Flow Past a Rigid Body, with Application to Starting Problem in Higher Dimensions

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科

高橋知希 (Tomoki TAKAHASHI)

概要

本講演では並進運動する剛体周りでの流体の長時間挙動を考える．まず，並進速度が十分小さい時に，Oseen の基本解と同じ Optimal な可積分性を持つ定常解（時間に依らない解）の一意存在定理を与える．次に，剛体の並進速度が徐々に増加していき，ある時刻以降は一定速度で運動する場合，剛体周りの流体の運動は上記で得た定常解に時間無限大で収束することを示す．後者の問題は Finn の starting problem と呼ばれ，3 次元の場合には既に Galdi–Heywood–Shibata [6] により肯定的に解かれている．本講演では 3 次元の場合であっても新たな収束レートを導く．

1 Introduction and main results

偏微分方程式は自然現象を記述するものが多く，その影響は工学や医学など多岐にわたる．偏微分方程式の一つに流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式がある．Navier-Stokes 方程式をさまざまな物理状況のもとで考えることによって，これまで多くの数学的な発展がなされてきた．例えば海の流れや血管の中の血の流れなど自然現象と密接に関係していることからも，このような研究の方向性は自然であると考える．本講演ではまず，C^2 級の境界をもつ外部領域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上の定常問題

$$\begin{cases} u_s \cdot \nabla u_s = \Delta u_s - a\dfrac{\partial u_s}{\partial x_1} - \nabla p_s, \quad x \in D, \\ \nabla \cdot u_s = 0, \quad x \in D, \qquad u_s|_{\partial D} = -ae_1, \qquad u_s \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty \end{cases} \tag{1}$$

を考える．ここで $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\top$ と t をそれぞれ位置と時刻，a はある実数，e_1 は x_1 方向の単位ベクトルであり，未知関数はベクトル値関数 $u_s = (u_{s,1}(x,t), \cdots, u_{s,n}(x,t))^\top$ とスカラー値関数 $p_s = p_s(x,t)$ で，それぞれ流体の速度，圧力を表す．また，$\nabla \cdot u_s = \operatorname{div} u_s$ であり，作用素 $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$，$u_s \cdot \nabla = u_{s,1}\partial_{x_1} + \cdots + u_{s,n}\partial_{x_n}$ を用いて，$\Delta u_s = (\Delta u_{s,1}, \cdots, \Delta u_{s,n})^\top$，$u_s \cdot \nabla u_s = ((u_s \cdot \nabla)u_{s,1}, \cdots, (u_s \cdot \nabla)u_{s,n})^\top$ である．この定常問題は $-ae_1$ で並進運動する剛体周りでの非圧縮粘性流体の運動を記述している．第一式が運動量保存則，第二式が（非圧縮粘性流体に対する）質量保存則，第三式は滑りなし条件を表す．

3 次元の場合，定常問題 (1) の先駆的な研究は Leray による．Leray はデータの小ささを仮定せずに，(1) の弱解の存在定理を与えた．物理的な観点から，(1) の解は異方的な漸近挙動を伴うことが望ましいが，そのような挙動を持つ解を捉えたのは Finn による 1960 年代の一連の研究である．

また，Galdi [5] は (1) の線形方程式（Oseen 方程式）に対する L^q 理論を発達させ，弱解は Oseen の基本解と同じ可積分性を持つことを示した．定常問題 (1) の研究は他にもたくさんあり，例えば異方的な重み付き Sobolev 空間を用いて Finn の結果に対する新たな知見を与えた Farwig (1992) や，解の評価を発展させ，さらに安定性を論じている Shibata (1999) がある．$n \geq 3$ 次元の場合，Shibata–Yamazaki (2005) は弱 L^n 空間を用いて定常解を構成し，$a \to 0$ とした時の解の挙動を考察している．さらに，4 次元以上で $a \geq 0$ が十分小さいとき，

$$u_s \in L^{\frac{n}{1+\rho_1}}(D) \cap L^{\frac{n}{1-\rho_2}}(D), \quad \nabla u_s \in L^{\frac{n}{2+\rho_1}}(D) \cap L^{\frac{n}{2-\rho_2}}(D)$$

なる定常解を構成している．

本講演の最初の結果は Ossen の基本解と同じ可積分性を持つ定常解の一意存在定理である．

Theorem 1 ([10])．条件

$$\frac{n+1}{n-1} < \alpha_1 \leq n+1 \leq \alpha_2 < \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{(n+1)}{n} < \beta_1 \leq \frac{n+1}{2} \leq \beta_2 < \frac{n(n+1)}{n+2} \tag{2}$$

を満たす任意の $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ に対して，ある定数 $\delta = \delta(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, n, D) \in (0,1)$ が存在して，$0 < a^{(n-2)/(n+1)} < \delta$ ならば (1) は解 u_s で

$$\|u_s\|_{L^{\alpha_1}(D)} + \|u_s\|_{L^{\alpha_2}(D)} \leq Ca^{\frac{n-1}{n+1}}, \quad \|\nabla u_s\|_{L^{\beta_1}(D)} + \|\nabla u_s\|_{L^{\beta_2}(D)} \leq Ca^{\frac{n}{n+1}}$$

を満たすものを一意的に持つ．ここで $C > 0$ は a に依存しない定数である．

この結果は 3 次元の場合，上記で述べた先行研究で既に知られているが，本講演では Galdi [5] による Oseen 方程式の解の評価に着目し，異方的な各点評価ではなく Lebesgue 空間で捉えることによって簡潔な証明を与える．

次に，方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = \Delta u - \psi(t) a \dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \nabla p, \quad x \in D,\, t > 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \quad x \in D,\, t \geq 0, \qquad u|_{\partial D} = -\psi(t) a e_1, \quad t > 0, \\ u \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty, \qquad u(x,0) = 0, \quad x \in D \end{cases} \tag{3}$$

の解が時間無限大で Theorem 1 で得られた定常解に収束することを示す．ここで関数 ψ は

$$\psi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \quad |\psi(t)| \leq 1 \quad \text{for } t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = 0 \quad \text{for } t \leq 0, \quad \psi(t) = 1 \quad \text{for } t \geq 1$$

を満たすものである．この問題は，Finn が 1965 年に提唱したことから Finn の starting problem と呼ばれ，1997 年に Galdi–Heywood–Shibata [6] により 3 次元の場合に示されている．本研究では [6] を 3 次元以上の一般次元へ拡張し，さらに 3 次元であっても定常解の可積分性から定まる新たな収束レートを導出する．Finn の starting problem を考察するため，Theorem 1 を

$$\alpha_1 = \frac{n}{1+\rho_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{n}{1-\rho_2}, \qquad \beta_1 = \frac{n}{2+\rho_3}, \qquad \beta_2 = \frac{n}{2-\rho_4} \tag{4}$$

として適用する．ただし，ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 はパラメーターで $\rho_2 + \rho_4 > 1$ を満たすものとする（これらのパラメーターの集合は空でない）．そして，定常解からの摂動 $v = v(t)$ が満たす次の積分方程式

を考える.

$$v(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A_a} P\Big[-v\cdot\nabla v - \psi(\tau)v\cdot\nabla u_s - \psi(\tau)u_s\cdot\nabla v + \big(1-\psi(\tau)\big)a\frac{\partial v}{\partial x_1} + h_1(\tau) + h_2(\tau)\Big] d\tau. \tag{5}$$

ここで e^{-tA_a} は Oseen 半群，P は Helmholtz 射影，

$$h_1(x,t) = -\psi'(t)u_s, \quad h_2(x,t) = \psi(t)\big(1-\psi(t)\big)\Big(u_s\cdot\nabla u_s + a\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\Big).$$

Theorem 2 ([10]). $M = \max_{t\in\mathbb{R}}|\psi'(t)|$ とおく．(4) として Theorem 1 を適用して得られる定数 δ をとる．このとき，ある $\varepsilon = \varepsilon(n,D) \in (0,\delta]$ が存在して，$0 < (M+1)a^{(n-2)/(n+1)} < \varepsilon$ ならば (5) は一意解 v を

$$Y_0 := \big\{ v \in BC([0,\infty); L^n_\sigma(D)) \mid t^{\frac{1}{2}}v \in BC((0,\infty); L^\infty(D)), t^{\frac{1}{2}}\nabla v \in BC((0,\infty); L^n(D)), \lim_{t\to 0} t^{\frac{1}{2}}\big(\|v(t)\|_{L^\infty(D)} + \|\nabla v(t)\|_{L^n(D)}\big) = 0 \big\}$$

のクラスで持つ．さらに，解 v は次の性質を満たす．

1. (*Sharp decay*) $n=3$ のとき，ある定数 $\varepsilon_* = \varepsilon_*(D) \in (0,\varepsilon]$ が存在して，$0 < (M+1)a^{1/4} < \varepsilon_*$ ならば

$$\|v(t)\|_{L^q(D)} = O(t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}-\frac{\rho_1}{2}}), \quad 3 \le \forall q \le \infty, \quad \|\nabla v(t)\|_{L^3(D)} = O(t^{-\frac{1}{2}-\frac{\rho_1}{2}}) \quad \text{as } t\to\infty.$$

$n \ge 4$ のとき，さらに $\rho_3 > 1$ かつ $1 < \rho_1 \le 1+\rho_3$ を仮定する ($n \ge 4$ ならば，このようなパラメーターの集合は空でない)．このとき，ある定数 $\varepsilon_* = \varepsilon_*(n,D) \in (0,\varepsilon]$ が存在して，$0 < (M+1)a^{(n-2)/(n+1)} < \varepsilon_*$ ならば

$$\|v(t)\|_{L^q(D)} = O(t^{-\frac{1}{2}+\frac{n}{2q}-\frac{\rho_1}{2}}), \quad n \le \forall q \le \infty, \quad \|\nabla v(t)\|_{L^n(D)} = O(t^{-\frac{1}{2}-\frac{\rho_1}{2}}) \quad \text{as } t\to\infty.$$

2. (*Uniqueness*) ある定数 $\hat\varepsilon = \hat\varepsilon(n,D) \in (0,\varepsilon]$ が存在して，$0 < (M+1)a^{(n-2)/(n+1)} < \hat\varepsilon$ ならば解 v は

$$Y := \{ v \in BC([0,\infty); L^n_\sigma(D)) \mid t^{\frac{1}{2}}v \in BC((0,\infty); L^\infty(D)), t^{\frac{1}{2}}\nabla v \in BC((0,\infty); L^n(D)) \}$$

でも一意的である．

講演者は Finn の starting problem を回転運動に置き換えた問題を [9] で考察したが，回転運動の場合，一般に定常解は弱 L^3 空間で特徴づけられ，$L^q(D)$ $(q \le 3)$ には属さないため，回転の場合には Theorem 2 の sharp decay は望めないことに注意する．

2 Outline of proof

2.1 Proof of Theorem 1

Theorem 1 を示すため，Galdi [5] で得られている Oseen 方程式の解の評価を述べる．

Proposition 3. 次元 $n \geq 3$, $D \subset \mathbb{R}^n$ を C^2 級の境界をもつ外部領域, 実数 $a > 0$, $1 < q < (n+1)/2$ とする．与えられた $f \in L^q(D), u_* \in W^{2-1/q,q}(\partial D)$ に対して

$$\begin{cases} \Delta u - a\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \nabla p + f, & x \in D, \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in D, \\ u|_{\partial D} = u_*, & \\ u \to 0 & \text{as } |x| \to \infty \end{cases}$$

の解 (u,p) は

$$X_q(n) := \Big\{ (u,p) \in L^1_{\mathrm{loc}}(D) \,\Big|\, u \in L^{s_2}(D), \nabla u \in L^{s_1}(D),\, \nabla^2 u \in L^q(D), \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} \in L^q(D),\, \nabla p \in L^q(D) \Big\}$$

で（p の定数差を除いて）一意に存在する．ここで

$$\frac{1}{s_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{s_2} = \frac{1}{q} - \frac{2}{n+1}.$$

また，$W^{2-1/q,q}(\partial D)$ は *Sobolev* 空間 $W^{2,q}(D)$ からのトレース空間である．

特に $a \in (0,1]$ かつ $q < n/2$ の時，上記で得た解 (u,p) は

$$a^{\frac{2}{n+1}} \|u\|_{L^{s_2}(D)} + a\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|_{L^q(D)} + a^{\frac{1}{n+1}} \|\nabla u\|_{L^{s_1}(D)} + \|\nabla^2 u\|_{L^q(D)} + \|\nabla p\|_{L^q(D)} \\ \leq C\big(\|f\|_{L^q(D)} + \|u_*\|_{W^{2-\frac{1}{q},q}(\partial D)}\big)$$

を満たす．ただし，定数 $C > 0$ は q, n, D に依存するが，a に依存しない．

Proposition 3 を基に適切な閉球 N と定常問題

$$\begin{cases} \Delta u - a\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \nabla p + v \cdot \nabla v, & x \in D, \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in D, \\ u|_{\partial D} = -ae_1, & \\ u \to 0 & \text{as } |x| \to \infty. \end{cases}$$

の解を与える縮小写像 $\Psi : N \ni v \mapsto u \in N$ が定義できれば，Banach の不動点定理を用いることで非線形問題 (1) の解が得られる．もしも Proposition 3 のみを用いるならば，Ψ が well-defined になるのは

$$\{u \in L^{n+1}(D) \mid \nabla u \in L^{\frac{n+1}{2}}(D)\}$$

に限られる．しかし，このとき得られる解は optimal な可積分性を持たず，Theorem 1 を示すことはできない．そのため $u, \nabla u$ それぞれで 2 つの関数空間を用いた

$$\{u \in L^{\alpha_1}(D) \cap L^{\alpha_2}(D) \mid \nabla u \in L^{\beta_1}(D) \cap L^{\beta_2}(D)\}$$

内の閉球 N を考える．ただし

$$v \in L^{\alpha_1}(D), \qquad \nabla v \in L^{\beta_1}(D) \tag{6}$$

または

$$v \in L^{\alpha_2}(D), \qquad \nabla v \in L^{\beta_2}(D) \tag{7}$$

と見なし，$f = v \cdot \nabla v$ に対して Proposition 3 を適用したいが，α_1, β_1 がそれぞれ $(n+1)/(n-1), (n+1)/n$ に十分近いときや，α_2, β_2 がそれぞれ $n(n+1)/2, n(n+1)/(n+2)$ に十分近いとき，Proposition 3 を適用するのに必要な条件

$$\frac{2}{n} < \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} < \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} < 1$$

を満たさない．そのため，(2) を満たす与えられた $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ に対して，

$$\alpha_1 \le q_1 \le q_2 \le \alpha_2, \quad \beta_1 \le r_1 \le r_2 \le \beta_2, \quad \frac{2}{n} < \frac{1}{q_i} + \frac{1}{r_i} < 1, \quad i = 1, 2$$

を満たす指数 (q_1, q_2, r_1, r_2) で，$v \in L^{q_1}(D), \nabla v \in L^{r_1}(D)$ または $v \in L^{q_2}(D), \nabla v \in L^{r_2}(D)$ と見なして Proposition 3 を適用した時に (6)，(7) を回復できるようなものを選ぶ必要がある．

Theorem 1 は Proposition 3 と Sobolev の不等式を組み合わせることでも示される．実際，このとき定常解 (u_s, p_s) で，$n/3 \le q \le (n+1)/3$ を満たす任意の $q \in (1, \infty)$ に対して $(u_s, p_s) \in X_q(n)$ なる一意解が構成できる．その後 bootstrap argument により q に関する制限 $n/3$ や $(n+1)/3$ を取り除き，Theorem 1 が示される．最初に述べた方法は bootstrap argument を用いておらず，必要な可積分性を持つ解を直接構成していることに注意する．

2.2 Proof of Theorem 2

定理を示すため，Enomoto–Shibata [2, 3] による Oseen 半群の L^q-L^r 評価を述べる．ここで L^q-L^r 評価とは，解の平滑化効果に伴う $t = 0$ 近傍での特異性の度合いと，$t \to \infty$ での解の減衰度合いの両方を表している．

Proposition 4 ([8, 2, 3])**.** *次元 $n \ge 3$, $\sigma_0 > 0$ に対して $|a| \le \sigma_0$ とする．*

1. *任意の $1 < q \le r \le \infty$ $(q \ne \infty), t > 0, f \in L^q_\sigma(D)$ に対して*

$$\|e^{-tA_a} f\|_{L^r(D)} \le C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r})} \|f\|_{L^q(D)}$$

が成立する．ここで $C = C(n, \sigma_0, q, r, D) > 0$ は a, t, f に依存しない定数である．

2. *任意の $1 < q \le r \le \infty$ $(q \ne \infty), t > 0, f \in L^q_\sigma(D)$ に対して*

$$\|\nabla e^{-tA_a} f\|_{L^r(D)} \le C t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}) - \frac{1}{2}} \|f\|_{L^q(D)}$$

が成立する．ここで $C = C(n, \sigma_0, q, r, D) > 0$ は a, t, f に依存しない定数である．

Proposition 4 と Fujita–Kato の手法 ([4, 7]) に基づくことにより，関数空間 Y_0 で積分方程式 (5) の各項の評価が閉じることが分かる．Y_0 はノルム

$$\|v\|_{Y_0} := \sup_{0<\tau} \|v(\tau)\|_{L^n(D)} + \sup_{0<\tau} \tau^{\frac{1}{2}} \|v(\tau)\|_{L^\infty(D)} + \sup_{0<\tau} \tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla v(\tau)\|_n$$

を持つ Banach 空間だから，逐次近似により一意解 $v \in Y_0$ が存在する．ゆえに Theorem 2 の前半が示された．Uniqueness については，Brezis [1] の考え方に基づく．すなわち $v \in Y$ が解だとすると，実は $v \in Y_0$ であることを示し，Y_0 での解の一意性に帰着させる．Sharp decay は L^n 減衰を示すことが本質的である．実際，Enomoto–Shibata [3] により

$$t^{\frac{1}{2}} \|v(t)\|_{L^\infty(D)} + t^{\frac{1}{2}} \|\nabla v(t)\|_{L^n(D)} \le C \left\| v\left(\frac{t}{2}\right) \right\|_{L^n(D)} \tag{8}$$

が $t \ge 2$ で成り立つので，補間から Sharp decay が従う．L^n 減衰についてはまず，少し遅い減衰 $\|v(t)\|_{L^n(D)} = O(t^{-\rho/2})$ $(0 < \exists \rho < 1)$ を導出する．このとき (8) を用いれば L^n ノルム以外のノルムに関する減衰も良くなるため，再び L^n ノルムを考察することでさらに良い減衰を得る．この操作を繰り返すことで目的の減衰レートを導く．ただし 4 次元以上では $\rho_1 > 1$ であることから，n よりも低い指数 q_0 を選び，L^{q_0} 減衰を導出するなどの工夫が必要である．

Reference

[1] Brezis, H.: Remarks on the preceding paper by M. Ben-Artzi, “Global solutions of two dimensional Navier-Stokes and Euler equations”. Arch. Ration. Mech. Anal. **128**, 359–360 (1994)

[2] Enomoto, Y., Shibata, Y.: Local Energy Decay of Solutions to the Oseen Equation in the Exterior Domains. Indiana Univ. Math. J. **53**, 1291–1330 (2004)

[3] Enomoto, Y., Shibata, Y.: On the Rate of Decay of the Oseen Semigroup in the Exterior Domains and its Application to Navier-Stokes Equation. J. Math. fluid mech. **7**, 339–367 (2005)

[4] Fujita, H., Kato, T.: On the Navier-Stokes initial value problem. I. Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 269–315 (1964)

[5] Galdi, G.P.: An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-State Problems, Second Edition. Springer, New York (2011)

[6] Galdi, G.P., Heywood, J.G., Shibata, Y.: On the global existence and convergence to steady state of Navier-Stokes flow past an obstacle that is started from rest. Arch. Rational Mech. Anal. **138**, 307–318 (1997)

[7] Kato, T.: Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. Math. Z. **187**, 471–480 (1984)

[8] Kobayashi, T., Shibata, Y.: On the Oseen equation in the three dimensional exterior domains. Math. Ann. **310**, 1–45 (1998)

[9] Takahashi, T.: Attainability of a stationary Navier-Stokes flow around a rigid body rotating from rest. arXiv:2004.00781, to appear in Funkcial. Ekvac.

[10] Takahashi, T.: Existence of a Stationary Navier-Stokes Flow Past a Rigid Body, with Application to Starting Problem in Higher Dimensions, arXiv:2009.05321, to appear in J. Math. Fluid Mech.