Action of hypergeometric groups on lattices and $K3$ surfaces

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
高田佑太 (Yuta TAKADA)

概要

一般化超幾何関数のモノドロミー群をモデルにして得られる超幾何群は一定の条件の下で $K3$ 格子という $K3$ 曲面の中間コホモロジー群として得られる格子に作用する．$K3$ 格子に $K3$ 構造と呼ばれる構造を付加するとき, その構造を保つ自己同型は $K3$ 曲面上の自己同型に持ち上がる．$K3$ 格子に付随するルート系を詳しく観察することなどにより, 種々の特徴をもつ $K3$ 曲面上の自己同型を構成した．なお, 本研究は岩崎克則教授との共同研究である．

1 導入

超幾何群とは $\mathrm{rk}(A-B)=1$ なる行列 $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ によって生成される $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ の部分群のことであり, 一般化超幾何方程式のモノドロミー群がモデルになっている．ここで一般化超幾何方程式とは微分方程式

$$[z(\theta+\alpha_1)\cdots(\theta+\alpha_n)-(\theta+\beta_1-1)\cdots(\theta+\beta_n-1)]f=0 \qquad (*)$$

のことである．ただし $\theta = z\frac{d}{dz}$ であり, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ は複素数で通常 $\beta_n=1$ を仮定する．$n=2$ の場合が Gauss の超幾何関数を解としてもつ方程式になる．以下, 一般化超幾何方程式を単に超幾何方程式とよぶ．方程式 $(*)$ は射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の微分方程式として 3 点 $z=0,1,\infty$ に確定特異点をもつ．$z=\infty,0,1$ のまわりを 1 周するモノドロミー行列をそれぞれ A, B, C とおくと, 方程式 $(*)$ が $z=1$ のまわりに $(n-1)$ 個の独立な正則解をもつという事実から $\mathrm{rk}(\mathrm{id}-C)=1$ が成り立つ．一方で $C=A^{-1}B$ と表されるので $\mathrm{rk}(\mathrm{id}-C)=1$ は $\mathrm{rk}(A-B)=1$ を意味する．したがって超幾何方程式のモノドロミー群は超幾何群である．本稿では一般化超幾何方程式についてこれ以上詳しく述べないが, 例えば Heckman によるレクチャーノート [He] が参考になる．

歴史的には超幾何群は Levelt[Le] により導入された．Beukers と Heckman[BH] はさらに超幾何群の既約性や不変 Hermite 形式などに関する基本的な定理を用意し, それら用いて有限超幾何群の分類や超幾何方程式の微分 Galois 群の決定を行った．ここで超幾何方程式の微分 Galois 群は超幾何群の Zariski 閉包に他ならない．

一方で, $K3$ 曲面とは不正則数が 0 かつ標準束が自明であるようなコンパクト複素曲面のことである．楕円曲線上には正則 1 形式が定数倍を除いて一意的に存在し, $K3$ 曲面には正則 2 形式が定数倍を除いて一意的に存在する．この意味で $K3$ 曲面は楕円曲線を二次元に一般化したもので, コンパクト複素曲面のひとつの重要なクラスを占めている．

$K3$ 曲面 X の中間コホモロジー群 $H^2(X,\mathbb{Z})$ は交叉理論により定まる内積によって符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子となる．ここで格子とは階数有限の自由加群であって整数に値をとる非退化対称双線型形式が備わっているもののことである．X 上の自己同型 f はコホモロジー群に自己同型 f^* を誘導し，f^* は $H^2(X,\mathbb{Z})$ の格子の構造を保つ．さらに f^* は $H^2(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}=H^2(X,\mathbb{C})$ の Hodge 構造とよばれる直和分解の構造と, Kähler 錐とよばれる $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ の部分集合を保つ.

逆に符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子（$K3$ 格子とよぶ）L に Hodge 構造と Kähler 錐に相当する構造を定義するとき, それらを保つ L 上の自己同型 F は, Torelli の定理と周期写像の全射性によって, ある $K3$ 曲面上の自己同型 f のコホモロジー群への誘導 f^* であると思うことができる．このことから $K3$ 曲面の力学系は $K3$ 格子上の自己同型を通して研究することができる．ここでいう力学系とはひとつの自己同型の反復合成を意味する.

$K3$ 曲面の力学系については, McMullen が 2002 年の論文 [Mc02] で Siegel 円板とよばれる局所的な無理数回転をもつ自己同型の存在を示し, そのころから正のエントロピーをもつような自己同型の研究が盛んになった．彼はその後, $K3$ 曲面上の自己同型の正のエントロピーで起こり得る下限 $\log\lambda_{\mathrm{L}}$ をもつものが実際に存在することを示した [Mc11, Mc16]．ここで $\lambda_{\mathrm{L}}\approx 1.17628$ は現在知られている最小の Salem 数であり, Lehmer 数とよばれる．それらの証明では所望の性質をもった $K3$ 格子上の自己同型を構成することがひとつの要となる.

我々は超幾何群 $H=\langle A,B\rangle$ が格子に作用する状況を詳しく調べ, 格子のユニモジュラー性や内積の局所指数を A,B の固有値（または固有多項式）の情報を用いて記述した．また, $K3$ 格子上の多くの自己同型を超幾何群の格子への作用を用いて構成できることを発見した．さらに構成した自己同型を, McMullen が Siegel 円板の存在を示すのに用いた議論を精密化するなどして詳しく調べることで, 種々の性質をもった自己同型を観察した．本稿では我々の研究のひとつの主題である超幾何群について述べた後, $K3$ 曲面に関する基本的な概念をまとめ, 最後に $K3$ 曲面の力学系ついて得られた結果を紹介する.

2　超幾何群

ここでは超幾何群を定義し, 既約性と付随する不変 Hermite 形式に関する基本的な結果を述べる.

n 次一般線型群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の $\mathrm{rk}(A-B)=1$ をみたす 2 元 A,B で生成される部分群を n 次**超幾何群**とよぶ. 超幾何群 $H=\langle A,B\rangle$（の $\mathbb{C}^n$ への標準的な作用）が既約であるためには

A の固有値の集合と B の固有値の集合は交わらない

ことが必要十分である [BH, Prop 3.3]．いま $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,...,a_n\},\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ を $\mathbb{C}^\times$ の 2 つの相異なる多重集合とし, モニック多項式 $\varphi(t),\psi(t)$ を

$$\varphi(t)=\prod_{i=1}^{n}(t-a_i),\quad \psi(t)=\prod_{i=1}^{n}(t-b_i)$$

と定める．$\varphi(t),\psi(t)$ の同伴行列をそれぞれ M_φ,M_ψ とすると $\mathrm{rk}(M_\varphi-M_\psi)=1$ が成り立つので M_φ,M_ψ が生成する $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の部分群は超幾何群である．すなわち, 与えられた 2 つの多重集合 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に対して, 超幾何群 $H=\langle A,B\rangle$ であって生成元 A,B の固有値の集合がそれぞれ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ であるよ

うなものが存在する．この状況で $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ が交わらないならば H は一意性をもつことを次の定理は主張する．

定理 2.1（**[Le, Theorem 1.1]**） $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,...,a_n\},\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ を $\mathbb{C}^\times$ の交わらない 2 つの多重集合とする．このとき超幾何群 $H=\langle A,B\rangle\subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ であって A,B の固有値の集合がそれぞれ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ であるようなものが $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 内での共役を除いて一意的に存在する． □

$\mathbb{C}^\times$ の交わらない 2 つの多重集合 $\boldsymbol{a}=\{a_1,...,a_n\},\boldsymbol{b}=\{b_1,...,b_n\}$ が与えられたとき $\varphi(t)=\prod_{i=1}^n(t-a_i),\psi(t)=\prod_{i=1}^n(t-b_i)$ とおくと

$$\varphi(0)\neq 0,\quad \psi(0)\neq 0,\quad \mathrm{Res}(\varphi,\psi)\neq 0 \tag{1}$$

が成り立つ．ここで $\mathrm{Res}(\varphi,\psi)$ は $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ の終結式である．逆にこの条件 (1) をみたす 2 つのモニック多項式 $\varphi(t),\psi(t)$ が与えられたとき, その根の多重集合をぞれぞれ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ とすれば $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ は $\mathbb{C}^\times$ の交わらない多重集合である．この対応によって $\mathbb{C}^\times$ の交わらない 2 つの多重集合と, 条件 (1) をみたす 2 つのモニック多項式は一対一に対応する．

以下, $\boldsymbol{a}=\{a_1,...,a_n\},\boldsymbol{b}=\{b_1,...,b_n\}$ と $\varphi(t),\psi(t)$ は互いに上述のように対応する $\mathbb{C}^\times$ の交わらない 2 つの多重集合と条件 (1) をみたす 2 つのモニック多項式とする．また $A=M_\varphi,B=M_\psi$ とし, この状況で既約超幾何群 $H=\langle A,B\rangle$ を $H(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ または $H(\varphi,\psi)$ と表す．

定理 2.2（**[BH, Theorem 4.3]**） 既約超幾何群 $H=H(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ に対して次は同値:

(i) $\mathbb{C}^n$ 上に非退化な H 不変 Hermite 形式が存在する．
(ii) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^\dagger$ かつ $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^\dagger$.
(iii) $t^n\bar{\varphi}(t^{-1})=\bar{\varphi}(0)\varphi(t)$ かつ $t^n\bar{\psi}(t^{-1})=\bar{\psi}(0)\psi(t)$.

ここで複素数 c に対して $c^\dagger=\overline{c}^{-1}$, 多重集合 $\boldsymbol{c}=\{c_1,...,c_n\}$ に対して $\boldsymbol{c}^\dagger=\{c_1^\dagger,...,c_n^\dagger\}$ であり, 多項式 $f(t)\in\mathbb{C}[t]$ に対して $\bar{f}(t):=\overline{f(\overline{t})}$ である．ただし $\bar{\cdot}$ は複素共役を表す． □

今後, 断らない限り超幾何群は既約かつ $\mathbb{C}^n$ 上に不変 Hermite 形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が存在するものとする．超幾何群 $H=H(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ について考える．$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^\dagger,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^\dagger$ より $|\det A|=|\det B|=1$ である．$C:=A^{-1}B$ とおくと C は $\mathbb{C}^n$ 上の複素鏡映, すなわち $\mathrm{rk}(C-\mathrm{id})=1$ である．よって $c:=\det C$ は C の固有値である．これを C の**特殊固有値**とよぶ．もし $c\neq 1$ ならば C の固有値 c に対応する固有ベクトルは定数倍を除いて一意的に決まることに注意する．

定理 2.3（**[IT, Theorem 2.1]**） $c\neq 1$ とし z を C の固有値 c に対応する固有ベクトルとする．$\langle z,z\rangle\neq 0$ ゆえ適当に Hermite 形式を実数倍して $\langle z,z\rangle=|1-c|$ をみたすとする．$G=(\langle A^{i-1}z,A^{j-1}z\rangle)_{1\le i,j\le n},\zeta=(1-c)/\langle z,z\rangle$ とおく．このとき以下が成り立つ．

(i) $\psi(t)/\varphi(t)$ の $t=\infty$ における Taylor 展開を $\psi(t)/\varphi(t)=1+\zeta\sum_{i=1}^\infty\xi_i t^{-i}$ とすると行列 G の成分は

$$\langle A^{i-1}z,A^{j-1}z\rangle=\begin{cases}\xi_{i-j} & (1\le j\le i)\\ \overline{\xi}_{j-i} & (1\le i<j)\end{cases} \tag{2}$$

で与えられる．ただし $\xi_0=|1-c|$ と約束する．

(ii) $|\det G| = |\mathrm{Res}(\varphi, \psi)|$.

(iii) $z, Az, \cdots, A^{n-1}z$ は $\mathbb{C}^n$ の基底.

とくに超幾何群不変な Hermite 形式は実数倍を除いて一意的である. $\square$

3　不変 Hermite 形式の符号・指数

まず Hermite 形式の符号と指数を定義する. 一般に n 次元複素ベクトル空間 V とその上の非退化 Hermite 形式 $g(\cdot,\cdot)$ が与えられているとする. V の基底 $v_1, \ldots, v_n$ に対して行列 $(g(v_i, v_j))_{ij}$ を基底 $v_1, \ldots, v_n$ に関する g の **Gram 行列**とよぶ. Gram 行列の正の固有値の個数 p と負の固有値の個数 q は基底の選び方に依らない. 組 (p, q) を g の**符号**, $p - q$ を g の**指数**という. Hermite 形式 g が固定されているときには g の符号, 指数はそれぞれ V の符号, 指数ともいう. 指数がわかれば $p + q = n$ と合わせて符号を決定できるので, 符号と指数の情報は等価である.

さて超幾何群 $H = H(\varphi, \psi)$ について考える. 超幾何群に関する記号（A, B, C, c など）は前節と同じとし $c \neq 1$ も仮定する. また, C の固有値 c に対応する固有ベクトル z を固定しておく. この節では H 不変 Hermite 形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の指数が $\varphi(t), \psi(t)$ の根の大まかな配置から決定できることをみる.

$\varphi(t), \psi(t)$ の根の多重集合をそれぞれ $\boldsymbol{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}, \boldsymbol{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ とし

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{on}} = \{a \in \boldsymbol{a} \mid |a| = 1\}, \boldsymbol{a}_{\mathrm{off}} = \{a \in \boldsymbol{a} \mid |a| \neq 1\}, \boldsymbol{b}_{\mathrm{on}} = \{b \in \boldsymbol{b} \mid |b| = 1\}, \boldsymbol{b}_{\mathrm{off}} = \{b \in \boldsymbol{b} \mid |b| \neq 1\}$$

によって多重集合 $\boldsymbol{a}_{\mathrm{on}}, \boldsymbol{a}_{\mathrm{off}}, \boldsymbol{b}_{\mathrm{on}}, \boldsymbol{b}_{\mathrm{off}}$ を定義する. ここで一般に多重集合 $\boldsymbol{c}$ に対して, 重複を無視して $\boldsymbol{c}$ を通常の集合とみなしたものを

$$^{\mathrm{r}}\boldsymbol{c}$$

で表すことにする. 行列 A の固有値 a に対応する広義固有空間を $E(a)$ とし $m(a) = \dim E(a)$ とおく. また $a \in {}^{\mathrm{r}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{off}}$ に対して $E(a, a^\dagger) = E(a) \oplus E(a^\dagger)$ とおく. このとき分解

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{a \in {}^{\mathrm{r}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{on}}} E(a) \oplus \bigoplus_{a \in {}^{\mathrm{r}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{off}}, |a|>1} E(a, a^\dagger)$$

は直交直和分解である. したがって Hermite 形式の指数は各直和成分（に制限した Hermite 形式）の指数の和である. $a \in {}^{\mathrm{r}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{on}}$ に対して $E(a)$ の指数, $a \in {}^{\mathrm{r}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{off}}$ に対して $E(a, a^\dagger)$ の指数を $a \in {}^{\mathrm{r}}\boldsymbol{a}$ の**局所指数**とよび $\mathrm{idx}(a)$ で表す.

さて, 局所指数を記述するための記号を用意する. $0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n < 1$ を $\arg a_i = 2\pi\alpha_i, \arg b_j = 2\pi\beta_j$ で定める. $c = \det A^{-1}B$ なので c の偏角は $\arg c = 2\pi(\sum_j \beta_j - \sum_j \alpha_j)$ となる. ϵ を $\sin(\arg c^{1/2}) = \sin(\pi(\sum_j \beta_j - \sum_j \alpha_j))$ の符号とする. また $a \in {}^{\mathrm{r}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{on}}$ に対して $h(a) = \#\{\lambda \in \boldsymbol{a}_{\mathrm{on}} \cup \boldsymbol{b}_{\mathrm{on}} \mid 0 \leq \arg\lambda < \arg a < 2\pi\}$ と定める. つまり $h(a)$ は $\varphi(t), \psi(t)$ の単位円周上の根で a より偏角の小さいものの重複を込めた個数である. 以上の記号の下, 局所指数は次のようにかける.

定理 3.1（**[IT, Proposition 3.5]**） $\langle z, z\rangle > 0$ とすると

$$\mathrm{idx}(a) = \begin{cases} \epsilon(-1)^{h(a)} & m(a) \text{ が奇数} \\ 0 & m(a) \text{ が偶数, または } a \in {}^{\mathrm{r}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{off}} \end{cases}$$

が成り立つ. □

注意 3.2 Beukers と Heckman は $\boldsymbol{a}_{\mathrm{on}}=\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_{\mathrm{on}}=\boldsymbol{b}$ の場合で, 不変 Hermite 形式の指数を局所指数の和で表すということを実質的に行っている [BH, Theorem 4.5]. そこでは局所指数という概念は表にでてきていないが, $K3$ 曲面の力学系への応用を念頭においた我々の立場では局所指数が重要な役割を果たす [IT, Section 6].

この定理から, 例えば H 不変 Hermite 形式が定値, すなわち指数が n または $-n$ であるためには $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{on}}, \boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_{\mathrm{on}}$ であって, かつ単位円周上に $\boldsymbol{a}$ の元と $\boldsymbol{b}$ の元が交互に並ぶことが必要十分であることがわかる（cf. [BH, Corollary 4.7]）.

4 超幾何格子

今後, 超幾何群 $H=H(\varphi,\psi)$ に対して常に $c\neq 1$ とし, C の固有値 c の対応する固有ベクトル z を固定し $\langle z,z\rangle=|1-c|$ を仮定する. また前節と同様に $\varphi(t),\psi(t)$ の根の多重集合をそれぞれ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ とする.

超幾何群 $H(\varphi,\psi)$ が**整数超幾何群**とは $\varphi(t),\psi(t)\in\mathbb{Z}[t]$ であるときにいう. 以下 $H=H(\varphi,\psi)$ は整数超幾何群とする. $c=\det C=\det A^{-1}B$ は絶対値 1 の実数で, いま $c\neq 1$ を仮定しているので $c=-1$ となる. とくに $\langle z,z\rangle=2$ である. $L=\mathbb{Z}z+\mathbb{Z}Az+\cdots+\mathbb{Z}A^{n-1}z$ とおくと, Gram 行列 $G=(\langle A^{i-1}z,A^{j-1}z\rangle)$ は式 (2) で与えられるのだったから成分は整数となり, 不変 Hermite 形式を L に制限すると, L は整数に値をとる非退化対称双線型形式を備えた階数 n の自由 $\mathbb{Z}$ 加群, すなわち格子となる. 格子の非退化対称双線型形式を単に内積ともいう.

明らかに $A(L)\subset L$ が成り立つが, 実は $B(L)\subset L$ も成り立つ. 実際 $i=1,\dots,n$ に対して

$$BA^{i-1}z=ACA^{i-1}z=A(A^{i-1}z-\langle A^{i-1}z,z\rangle z)=A^iz-\langle A^{i-1}z,z\rangle Az\in L$$

となる. 内積は H 不変なので超幾何群 H は自然に格子 L に作用する. この格子 L を整数超幾何群 H から定まる**超幾何格子**とよぶ. G の対角成分は

$$\operatorname{diag}G=(\langle z,z\rangle,\langle Az,Az\rangle,\dots,\langle A^{n-1}z,A^{n-1}z\rangle)=(2,2,\dots,2)$$

ゆえ L は偶格子である. ここで一般に格子が**偶格子**であるとは任意の元 x について $\langle x,x\rangle\in 2\mathbb{Z}$ が成り立つことである. また, ある基底に関する Gram 行列の行列式が ± 1 であるときその格子は**ユニモジュラー**であるという. 定理 2.3 (ii) より L がユニモジュラーであるためには $\mathrm{Res}(\varphi,\psi)=\pm 1$ が必要十分である. L の指数は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の $\mathbb{C}^n$ 上の Hermite 形式としての指数に一致する.

我々は $K3$ 曲面の力学系への応用を念頭において, 階数 22 の超幾何格子が指数 ± 16 をもつための条件を trace cluster という概念を用いて記述した [IT, Theorem 6.2]. ここで指数 16 の場合も許しているのは, 内積を -1 倍することで指数を -16 にできるからである.

5 $K3$ 曲面

以下ではコンパクト複素曲面に関する基本的な概念を仮定するかもしれない. 参考書として [BHPV] を挙げておく. $K3$ **曲面**とは連結かつコンパクトな 2 次元複素多様体であって不正則数が 0

かつ標準束が自明なもののことである．Siu[Siu] によりすべての $K3$ 曲面は Kähler であることが知られている．X を $K3$ 曲面とするとき, 標準束が自明であることから X 上の至るところ消えない正則 2 形式が定数倍を除いて一意的に存在する．それをひとつ固定し η_X で表す．$K3$ 曲面のコホモロジー群は次のようになっている．

定理 5.1　X を $K3$ 曲面とすると

$$H^0(X,\mathbb{Z})\cong H^4(X,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z},\quad H^1(X,\mathbb{Z})=H^3(X,\mathbb{Z})=0,\quad H^2(X,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^{22}.$$

またカップ積は 2 次コホモロジー群 $H^2(X,\mathbb{Z})$ に非退化対称双線型形式を定め，それによって $H^2(X,\mathbb{Z})$ は符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子である．□

符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子を $K3$ **格子**とよぶ．不定値ユニモジュラー偶格子は符号によって同型類が唯ひとつに決まることが知られている [Se, 定理 5, 第 5 章]．したがって $K3$ 格子は同型を除いて一意的である．

次に Hodge 構造と Kähler 錐を中心に $K3$ 曲面のコホモロジー群に定まる構造について述べる．まず一般に, 有限生成加群 H のウェイト r の **Hodge 構造**とは $H\otimes\mathbb{C}$ の直和分解

$$H\otimes\mathbb{C}=\bigoplus_{p+q=r}H^{p,q}$$

であって $H^{q,p}=\overline{H^{p,q}}$ をみたすもののことである．ここで $\bar{\cdot}$ は複素共役である．コンパクト Kähler 多様体 X の r 次コホモロジー群にはウェイト r の Hodge 構造

$$H^r(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}=H^r(X,\mathbb{C})=\bigoplus_{p+q=r}H^{p,q}(X)$$

が定まる．ここで $H^{p,q}(X)$ は Dolbeault コホモロジー群で自然に $H^r(X,\mathbb{C})$ $(r=p+q)$ の部分群とみなすことができる．

さて X を $K3$ 曲面とする．意味のある Hodge 構造は 2 次コホモロジー群 $H^2(X,\mathbb{Z})$ に対する

$$H^2(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}=H^2(X,\mathbb{C})=H^{2,0}(X)\oplus H^{1,1}(X)\oplus H^{0,2}(X)$$

である．いま $H^{2,0}(X)=\mathbb{C}\eta_X, H^{0,2}(X)=\mathbb{C}\overline{\eta}_X$ であり, η_X は **Riemann 条件**とよばれる次の性質をもつ:

$$\langle\eta_X,\eta_X\rangle=\int_X\eta_X\wedge\eta_X=0,\quad\langle\eta_X,\overline{\eta}_X\rangle=\int_X\eta_X\wedge\overline{\eta}_X>0.$$

ここで $\langle\cdot,\cdot\rangle$ はカップ積を $H^2(X,\mathbb{C})=H^2(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ 上に双線型に拡張したものである．Riemann 条件から $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ の符号が $(1,19)$ であることがわかり, 錐 $\mathcal{C}_X:=\{x\in H^{1,1}(X,\mathbb{R})\mid\langle x,x\rangle>0\}$ は 2 つの連結成分をもつ．そのうち Kähler 類を含む方を**正錐**とよび $\mathcal{C}_X^+$ とかく．

次に X の **Picard 格子** P_X を $P_X:=H^2(X,\mathbb{Z})\cap H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ と定義する．また $\Delta_X=\{r\in P_X\mid\langle r,r\rangle=-2\}$ とし, $\Delta_X^+=\{r\in\Delta_X\mid r$ は有効因子に代表される $\}$ とおく．このとき $\mathcal{K}_X=\{x\in\mathcal{C}_X^+\mid\langle x,r\rangle>0\ (\forall r\in\Delta_X^+)\}$ を X の **Kähler 錐**という．さらに $r\in\Delta_X$ に対して $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ の鏡映 s_r を

$$s_r(x)=x+\langle x,r\rangle r\quad(x\in H^{1,1}(X,\mathbb{R}))$$

によって定義する．定義から鏡映は内積を保つ．$H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ 上の内積を保つ自己同型全体のなす群 $O(H^{1,1}(X,\mathbb{R}))$ の中で鏡映全体 $\{s_r \mid r \in \Delta_X\}$ が生成する部分群を W_X とかく．また H_r を s_r の鏡映面，すなわち s_r の固定点がなす $H^{1,1}(X,\mathbb{R})$ の超平面とする．$\mathcal{C}_X^+ \setminus \bigcup_{r\in\Delta_X} H_r$ の各連結成分を**部屋**とよぶ．このとき Kähler 錐はひとつの部屋であり，W_X の C_X^+ への作用の基本領域となっている [Ko, 第 2 章].

以上のように $K3$ 曲面の 2 次コホモロジー群には Hodge 構造や Kähler 錐といった構造が定まるのだが，これらの構造は以下のようにして $K3$ 格子上に形式的に定義することができる．L を $K3$ 格子とする．まず**周期領域**とよばれる集合 Ω を

$$\Omega = \{\eta \in \mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C}) \mid \langle \eta, \eta \rangle = 0, \langle \eta, \overline{\eta} \rangle > 0\}$$

によって定める．ただし，$L \otimes \mathbb{C}$ 上の $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は L の内積を双線型に拡張したものであり，また，同じ記号 η で $L \otimes \mathbb{C}$ とそれに対応する $\mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C})$ の元を表している．Ω の元 η は $L_{\mathbb{C}} := L \otimes \mathbb{C}$ の直和分解

$$L_{\mathbb{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}, \quad H^{2,0} = \mathbb{C}\eta,\ H^{0,2} = \mathbb{C}\overline{\eta},\ H^{1,1} = \{\eta, \overline{\eta}\}^{\perp}$$

を定め，これは L のウェイト 2 の Hodge 構造となる．今後，$K3$ 格子 L の Hodge 構造といえば $\eta \in \Omega$ から定まる上述の Hodge 構造を指す．また $\eta \in \Omega$ を Hodge 構造ということもある．

L に Hodge 構造が与えられたとき，さらに次のように Kähler 錐を定義する．まず，$L_{\mathbb{R}} := L \otimes \mathbb{R}$ とおき $L \subset L_{\mathbb{R}} \subset L_{\mathbb{C}}$ とみなす．そして $H_{\mathbb{R}}^{1,1} = H^{1,1} \cap L_{\mathbb{R}}$ とおく．錐 $\mathcal{C} := \{x \in H_{\mathbb{R}}^{1,1} \mid \langle x, x \rangle > 0\}$ は二つの連結成分をもつ．そのうちひとつを選んで**正錐**とよび $\mathcal{C}^+$ とかく．次に $P = L \cap H_{\mathbb{R}}^{1,1}$ とおく．P を L の **Picard 格子**とよぶ．さらに $\Delta := \{r \in P \mid \langle r, r \rangle = -2\}$ と定義し，Δ の元を**ルート**とよぶ．ルート $r \in \Delta$ に対して鏡映 s_r と超平面 H_r を上と同様に定め，やはり同様に $\mathcal{C}^+ \setminus \bigcup_{r\in\Delta} H_r$ の各連結成分を**部屋**とよぶ．ルートが定める鏡映全体で生成される群を W とすると各部屋は W の $\mathcal{C}^+$ への作用の基本領域となることも同じである．$\mathcal{C}^+$ の部屋をひとつ固定してそれを L の **Kähler 錐**とよび $\mathcal{K}$ で表す．

こうして $K3$ 格子に Hodge 構造と Kähler 錐を定義することができた．この 2 つをあわせて $K3$ 格子の **$K3$ 構造**とよぶ．$K3$ 曲面の理論における基本的な 2 つの定理，すなわち Torelli の定理と周期写像の全射性により次の定理が成り立つ．Torelli の定理と周期写像の全射性については [Ko] に詳しく解説されている．

定理 5.2 L を $K3$ 格子とし $K3$ 構造 $\eta \in \Omega, \mathcal{K}$ が与えられているとする．さらに F を $K3$ 構造を保つ L 上の自己同型とする．このとき $K3$ 曲面 X，格子同型 $\alpha_X : H^2(X,\mathbb{Z}) \to L$，$X$ 上の自己同型 f で次をみたすものが存在する:

$$\alpha_X(\eta_X) = \eta, \quad \alpha_X(\mathcal{K}_X) = \mathcal{K}, \quad \alpha_X^{-1} \circ F \circ \alpha_X = f^*.$$

このような $K3$ 曲面 X とその自己同型 f を $K3$ 格子 L 上の自己同型 F の**実現**とよぶ． □

この定理により $K3$ 曲面上の自己同型を $K3$ 上の $K3$ 構造を保つ自己同型を通して調べることができる．

6　$K3$ 曲面の力学系

我々が扱う力学系の主な概念は Siegel 円板と位相的エントロピーである．以下 f は n 次元コンパクト複素多様体 X 上の自己同型とする．

Siegel 円板とは端的にいえば局所的な無理数回転のことである．絶対値 1 の複素数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を用いて

$$F(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda_1 z_1, \ldots, \lambda_n z_n)$$

と表される線形写像 $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ が**無理数回転**とは $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が**乗法的独立**, すなわち整数 $k_1, \ldots, k_n$ に対して

$$\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \cdots \lambda_n^{k_n} = 1 \Rightarrow k_1 = \cdots = k_n = 0$$

が成り立つときにいう．これは幾何的には F が $(S^1)^n$ 上稠密な軌道をもつことを意味する．

定義 6.1　f は点 $p \in X$ を不動点にもつとする．f が点 p を中心とする **Siegel 円板** U をもつとは以下が成り立つときにいう．

(i)　U は p の近傍で $f(U) = U$ をみたす．

(ii)　無理数回転 F と多重円板 $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$ から U への 0 を p に写す同型 ϕ で $f|_U = \phi \circ F|_{\mathbb{D}^n} \circ \phi^{-1}$ をみたすものが存在する．

非線形写像の線形化に関する Siegel-Sternberg の定理 [Sie, St] と超越数論における Baker-Fel'dman の定理 [Fe] から, Siegel 円板の存在について次のことがいえる．

定理 6.2　f は $p \in X$ を不動点にもつとする．このとき点 p における f の微分 $(df)_p$ の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が絶対値 1 の代数的数でかつ乗法的独立であるならば, f は p を中心とする Siegel 円板をもつ．□

MuMullen はこれを用いて $K3$ 曲面上の自己同型 f が Siegel 円板をもつための十分条件を, コホモロジー群への作用 f^* の代数的な条件として与え, 実際にその条件をみたす $K3$ 格子上の自己同型を構成し, 実現定理によって Siegel 円板をもつ自己同型の存在を示した [Mc02]. なお, そこでは不動点を数えるために Lefschetz 不動点公式が使われ, 不動点 p における f の微分 $(df)_p$ の固有値の情報を取り出すために Atiyah-Bott の正則 Lefschetz 公式 [AB] が用いられる．

次に位相的エントロピーについて述べる．f の位相的エントロピー $h(f)$ はその名の通り f と X の位相構造から決まる非負の実数値である．定義はここでは割愛するが例えば [Jo, Section 4] をみよ．以下, 位相的エントロピーを単にエントロピーという．エントロピーは一般には定義から直接計算するのは難しい量だが, 次の定理により $K3$ 曲面上の自己同型のエントロピーはコホモロジー群への作用を用いて計算できる．

定理 6.3（Gromov-Yomdin の定理）　X を n 次元コンパクト Kähler 多様体, f をその上の自己同型とする．このとき

$$h(f) = \log \rho \left(f^* | \bigoplus_{k=0}^{2n} H^k(X, \mathbb{Z}) \right).$$

ここで $\rho\left(f^*|\bigoplus_{k=0}^{2n} H^k(X,\mathbb{Z})\right)$ はスペクトル半径 $\max\{|\lambda| \mid \lambda$ は $f^*|\bigoplus_{k=0}^{2n} H^k(X,\mathbb{Z})$ の固有値 $\}$ を表す. □

実は線形代数的な考察から $K3$ 曲面上の自己同型のエントロピーは, 正ならば Salem 数の対数になることがわかる. ここで **Salem 数**とは実の代数的整数 $\lambda > 1$ であって $\lambda^{\pm 1}$ を除く共役数がすべて単位円周上にあるもののことである. f を $K3$ 曲面 X 上の自己同型とすると, 上の定理から $h(f) = \log \rho\left(f^*|H^2(X,\mathbb{Z})\right)$ なので, Salem 数 λ の対数が f のエントロピーであることは $f^*|H^2(X,\mathbb{Z})$ のスペクトル半径が λ であることと同値である. したがって $K3$ 曲面上の自己同型のエントロピーの問題は実現定理により完全に $K3$ 格子上の自己同型の問題に帰着する. McMullen はスペクトル半径が Lehmer 数 λ_{L} であるような $K3$ 格子上のある $K3$ 構造を保つ自己同型を構成し, 最小エントロピー $\log \lambda_{\mathrm{L}}$ をもつ $K3$ 曲面上の自己同型の存在を示した（非射影的な場合が [Mc11], 射影的な場合が [Mc16]）.

以上のように $K3$ 曲面における力学系の問題は $K3$ 格子上の自己同型を構成する問題に帰着する. 我々は整数超幾何群の格子への作用を用いて大量の $K3$ 格子自己同型を構成し, 種々の性質をもった $K3$ 曲面上の自己同型の存在を示した. とくに顕著と思われるものを定理としてまとめておく.

定理 6.4（**[IT, Theorem 9.5]**） $K3$ 曲面上の自己同型 f でエントロピーが $\log \lambda_{\mathrm{L}}$ であって, かつ唯ひとつの不動点 p もちそれが Siegel 円板の中心であるようなものが存在する. □

定理 6.5（**[IT, Theorem 9.7]**） $K3$ 曲面上の自己同型 f でエントロピーが $\log \lambda_{\mathrm{L}}$ であって, かつ Siegel 円板の three-cycle をもつようなものが存在する. ここで f が Siegel 円板の three-cycle をもつとは次をみたす X の点 p と開集合 U が存在するときにいう:

(i) U は点 p を中心とする f^3 の Siegel 円板である.

(ii) p は f の周期 3 の周期点である.

とくに f^3 は Siegel 円板を 3 つもつ. □

参考文献

[AB] M.F. Atiyah and R. Bott. *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes II*. Ann. Math. (2) **88** (1968), 451–491.

[BHPV] W.P. Barth, K. Hulek, C.A.M. Peters and A. Van de Ven. *Compact Complex Surfaces. Second Enlarged Edition.* Springer-Verlag, 2004.

[BH] F. Beukers and G.J. Heckman. *Monodromy for the hypergeometric function* ${}_nF_{n-1}$. Invent. Math. **95** (1989), 325–354.

[Fe] H.I. Fel'dman. *An improvement of the estimate of a linear form in the logarithms of algebraic numbers.* Math. USSR Sb. **6** (1968), 393–406.

[He] G.J. Heckman. *Tsinghua Lectures on Hypergeometric Functions.* Radboud University of Nijmegen, December 8, 2015.

[IT] K. Iwasaki and Y. Takada. *Hypergeometric Groups and Dynamics on K3 Surfaces.* arXiv:2003.13943v2.

[Jo] J. Jost. *Dynamical Systems. Examples of complex behaviour.* Springer-Verlag, 2005.

[Ko] 金銅誠之. $K3$ 曲面. 共立出版, 2015.

[Le] A.H.M. Levelt. *Hypergeometric functions I.* Indag. Math. **23** (1961), 361–372.

[Mc02] C.T. McMullen. *Dynamics on K3 surfaces: Salem numbers and Siegel disks.* J. reine angew. Math.**545**(2002), 201–233.

[Mc11] C.T. McMullen. *K3 surfaces, entropy and glue.* J. Reine Angew. Math. **658** (2011), 1–25.

[Mc16] C.T. McMullen. *Automorphisms of projective K3 surfaces with minimum entropy.* Invent. Math. **203** (2016), 179–215.

[Se] J.P. Serre. 数論講義（彌永健一訳）. 岩波書店, 1979.

[Sie] C.L. Siegel. *Iteration of analytic functions.* Ann. Math. (2) **43** (1942), 607–612.

[Siu] Y.T. Siu. *Every $K3$ surface is Kähler.* Invent. Math. **73** (1983), no. 1, 139–150.

[St] S. Sternberg. *Infinite Lie groups and the formal aspects of dynamical systems.* J. Math. Mech. **10** (1961), 451–474.