

グラフのマグニチュードホモロジーの torsion について

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
田嶋 優 (Yu TAJIMA)

1 導入

グラフ G は、頂点集合 $V(G)$ と辺集合 $E(G)$ の組からなり、2つの頂点間の距離を2点をつなぐ path に含まれる辺の個数の最小値として定義すると、距離空間として考えることができる。magnitude は、Leinster 氏により定義された距離空間に対する不変量であり ([4])、グラフの magnitude homology は、Hepworth 氏と Willerton 氏により、グラフの magnitude の圏化として導入されたホモロジーである ([1])。グラフの magnitude homology を計算する手法については様々な研究があり、[1] では、グラフの magnitude homology についての Mayer-Vietoris 系列や Kunneth の定理が紹介されている。

グラフの magnitude homology に関する open problem の1つとして、[1] に「magnitude homology が torsion をもつグラフは存在するか」という問題があった。これに対して、「存在する」ことが [3] で示された。

グラフ G の長さ ℓ の magnitude chain complex $MC_*^\ell(G)$ は、2つの頂点を固定してできる subcomplex により chain complex として直和分解できる： $MC_*^\ell(G) = \bigoplus_{a,b \in V(G)} MC_*^\ell(a,b)$ 。[2] は、グラフ G の頂点 a, b に対して、単体複体 $K_\ell(a,b)$ とその部分複体 $K'_\ell(a,b)$ を定義し、chain complex $C_*(K_\ell(a,b), K'_\ell(a,b)) := C_*(K_\ell(a,b))/C_*(K'_\ell(a,b))$ が、 $MC_{*+2}^\ell(G)$ の各 subcomplex $MC_{*+2}^\ell(a,b)$ と chain complex として同型となることを示している。これは特に長さ $\ell = 3, 4$ のとき、グラフの magnitude chain complex の (単体複体による) 可視化を与えるものである。

本稿では、[2] による単体複体のホモロジーを用いたグラフの magnitude homology の理解を通じて、torsion をもつ、より頂点の少ないグラフを構成したことを紹介する。

2 単体複体とグラフ

この節では、[2] に従い単体複体やグラフに関する基本的な定義と、グラフの magnitude homology の定義をする。

定義 1 (単体複体) V を集合とし、 $P(V)$ を V のべき集合とする。 $S \subset P(V) \setminus \{\emptyset\}$ が以下をみたすとき、単体複体と呼ぶ。

任意の $A \in S$ 、任意の $B(\neq \emptyset) \subset A$ に対して、 $B \in S$ 。

単体複体 S の部分集合 S' が単体複体となるとき、 S' を S の部分複体と呼ぶ。

定義 2 ($C_*(S)$) X を全順序集合とし、 $S \subset P(X) \setminus \{\emptyset\}$ を単体複体とする。

$$C_k(S) := \bigoplus_{\substack{\{s_0, \dots, s_k\} \in S \\ s_0 < \dots < s_k}} \mathbb{Z}\langle s_0, \dots, s_k \rangle,$$

$$\partial_k: C_k(S) \rightarrow C_{k-1}(S), \{s_0, \dots, s_k\} \mapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i \{s_0, \dots, \hat{s}_i, \dots, s_k\}$$

と定めると、 $\partial \circ \partial = 0$ が示せるので、 $(C_*(S), \partial_*)$ は chain complex である。また、 S' を S の部分複体とすると、 $C_*(S')$ は、chain complex $C_*(S)$ の subcomplex である。このとき、

$$C_k(S, S') := C_k(S)/C_k(S'),$$

$$\tilde{\partial}_k: C_k(S, S') \rightarrow C_{k-1}(S, S'), [x] \mapsto [\partial x]$$

と定めると、 $(C_*(S, S'), \tilde{\partial}_*)$ は chain complex である。

定義 3 (グラフ) G を単体複体とする。 $\sharp A = 1$ をみたす $A \in G$ を G の頂点と呼び、 $\sharp A = 2$ をみたす $A \in G$ を G の辺と呼ぶ。($\sharp A$ は集合 A の濃度を表す。) 任意の $A \in G$ に対して、 $\sharp A \leq 2$ が成り立つとき、 G をグラフと呼ぶ。 G の頂点の集合を $V(G)$ 、辺の集合を $E(G)$ と書く。

定義 4 (連結性) G をグラフとする。 $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\} \in E(G)$ ($v_0, v_1, \dots, v_k \in V(G)$) を辺の列と呼ぶ。このとき、以下のように定める。

- $a, b \in V(G)$ が連結 $\stackrel{def}{\iff} a \in \{v_0, v_1\}, b \in \{v_{k-1}, v_k\}$ をみたす辺の列 $\{v_0, v_1\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\} \in E(G)$ が存在する。
- グラフ G が連結 $\stackrel{def}{\iff}$ 任意の $a, b \in V(G)$ が連結。

以下、グラフは連結とする。

定義 5 (グラフ上の距離関数) グラフ G に対して、距離関数 $d_G: V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を以下で定める。

$$d_G(a, b) := \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \exists e_1, \dots, e_k \in E(G) \text{ sequence of edges s.t. } a \in e_1, b \in e_k\} & (a \neq b) \\ 0 & (a = b) \end{cases}$$

定義 6 (sequence) G をグラフとする。tuple $x = (x_0, \dots, x_k) \in V(G)^{k+1}$ が、任意の $i \in \{0, \dots, k-1\}$ に対して、 $x_i \neq x_{i+1}$ をみたすとき、 x を sequence と呼ぶ。また、 $x = (x_0, \dots, x_k):$ sequence, $y = (y_0, \dots, y_{k'}) \in V(G)^{k'+1}:$ tuple で、任意の $j \in \{0, \dots, k'\}$ に対して、 $x_{i_j} = y_j$ をみたす $0 = i_0 < \dots < i_{k'} = k$ が存在するとき、 y を x の subsequence といい、 $y \prec x$ と書く。

注意 7 subsequence は sequence でなくてよい。

定義 8 (長さ) G をグラフとする。 $x = (x_0, \dots, x_k) \in V(G)^{k+1}$ に対して、

$$L(x) := d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{k-1}, x_k)$$

を x の長さと呼ぶ。

定義 9 (path) G をグラフとし、 $k \geq 1$ とする。tuple $(x_0, \dots, x_k) \in V(G)^{k+1}$ が、任意の $i \in \{0, \dots, k-1\}$ に対して、 $d(x_i, x_{i+1}) = 1$ をみたすとき、 G 上の path と呼ぶ。また、sequence $x = (x_0, \dots, x_k)$ に対して、 x_0, \dots, x_k をこの順に通過する最短の path を x の path と呼ぶ。

注意 10 G が一般のグラフのとき、sequence x に対して、 x の path は必ず存在するが、1 つとは限らない。

定義 11 ($P_{\leq \ell}(a, b)$) G をグラフとし, $a, b \in V(G)$ とする.

- $P_{\leq \ell}(a, b) := \{ (x_0, \dots, x_k) = x : \text{path in } G \mid x_0 = a, x_k = b, L(x) = k \leq \ell \},$
- $P_{\ell}(a, b) := \{ (x_0, \dots, x_{\ell}) = x : \text{path in } G \mid x_0 = a, x_{\ell} = b, L(x) = \ell \}.$

定義 12 (smooth/singular) sequence $x = (x_0, \dots, x_k)$ に対して,

$$d(x_{i-1}, x_{i+1}) = d(x_{i-1}, x_i) + d(x_i, x_{i+1}) \quad (i \in \{1, \dots, k-1\})$$

をみたす x_i を x の smooth な点と呼び, smooth でない点を x の singular な点と呼ぶ.

定義 13 (グラフの magnitude homology) $\ell \geq 0$ を固定する. グラフ G の magnitude chain complex $MC_*^{\ell}(G)$ を以下で定義する:

$$MC_k^{\ell}(G) := \bigoplus_{x \in \{x=(x_0, \dots, x_k) \in V(G)^{k+1} : \text{sequence } |L(x)=\ell\}} \mathbb{Z}\langle x \rangle,$$

$$\partial: MC_k^{\ell}(G) \rightarrow MC_{k-1}^{\ell}(G), \quad \partial := \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \partial_i,$$

$$\partial_i(x_0, \dots, x_k) := \begin{cases} (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k) & (d(x_{i-1}, x_{i+1}) = d(x_{i-1}, x_i) + d(x_i, x_{i+1})) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

また, G の magnitude homology を, $MH_k^{\ell}(G) := H_k(MC_*^{\ell}(G))$ と定める.

グラフの magnitude homology について, 以下の命題が明らかに成り立つ.

命題 14 ([2], Proposition 2.9.) $\ell \geq 0$ を固定する. G : グラフ, $a, b \in V(G)$ とする. $MC_*^{\ell}(a, b)$ を, a で始まり b で終わる sequence で生成される, $MC_*^{\ell}(G)$ の subcomplex とするとき, chain complex として以下の直和分解が成り立つ.

$$MC_*^{\ell}(G) = \bigoplus_{a, b \in V(G)} MC_*^{\ell}(a, b)$$

3 単体複体を用いて, グラフのマグニチュードホモロジーを計算する手法

この節では, [2] にある, 単体複体を用いてグラフの magnitude homology を計算する手法を紹介する. $MC_*^{\ell}(G)$ を分解してできた各 $MC_*^{\ell}(a, b)$ に対して, それと (chain complex として) 同型となるような, 単体複体のペアからなる chain complex $C_*(K_{\ell}(a, b), K'_{\ell}(a, b))$ を構成する.

定義 15 ($K_{\ell}(a, b), K'_{\ell}(a, b)$) G をグラフとし, $a, b \in V(G)$, $\ell \geq 3$ とする.

- $K_{\ell}(a, b) := \{ \emptyset \neq \{(x_{i_1}, i_1), \dots, (x_{i_k}, i_k)\} \subset V(G) \times \{1, \dots, \ell-1\} \mid (a, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, b) \prec \exists (a, x_1, \dots, x_{\ell-1}, b) \in P_{\leq \ell}(a, b) \},$
- $K'_{\ell}(a, b) := \{ \{(x_{i_1}, i_1), \dots, (x_{i_k}, i_k)\} \in K_{\ell}(a, b) \mid L(a, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, b) \leq \ell-1 \}.$

注意 16 (i) 混乱のないときは, $\{(x_{i_1}, i_1), \dots, (x_{i_k}, i_k)\}$ を $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ と書く.

(ii) $K_{\ell}(a, b)$ は単体複体である. また, $K_{\ell-1}(a, b)$ と $K'_{\ell}(a, b)$ は, どちらも $K_{\ell}(a, b)$ の部分複体であり, 一般に $K_{\ell-1}(a, b) \subsetneq K'_{\ell}(a, b)$ となっている.

$d(a, b) > \ell$ のとき, $K_\ell(a, b) = \emptyset$ なので, 以下, $d(a, b) \leq \ell$ と仮定する.

補題 17 ([2], Lemma 4.2.) $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}, \{x_{i'_1}, \dots, x_{i'_k}\} \in K_\ell(a, b)$ が, $L(a, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, b) = L(a, x_{i'_1}, \dots, x_{i'_k}, b) = \ell$ かつ, 任意の $s \in \{1, \dots, k\}$ に対して $x_{i_s} = x_{i'_s}$ をみたすとき, 任意の $s \in \{1, \dots, k\}$ に対して $i_s = i'_s$ が成り立つ.

(証明) $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}, \{x_{i'_1}, \dots, x_{i'_k}\} \in K_\ell(a, b)$ が仮定をみたすとき,

$$(a, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, b) \prec \exists (a, x_1, \dots, x_{\ell-1}, b) \in P_\ell(a, b)$$

より, $x_{i_0} := a$ とすると, 任意の $s \in \{1, \dots, k\}$ に対して, $i_s = i_{s-1} + d(x_{i_{s-1}}, x_{i_s}) = \sum_{n=0}^{s-1} d(x_{i_n}, x_{i_{(n+1)}})$. 同様にして, $i'_s = \sum_{n=0}^{s-1} d(x_{i'_n}, x_{i'_{(n+1)}})$. よって, $i_s = i'_s$ がいえる. \square

定理 18 ([2], Theorem 4.3.) $\ell \geq 3, * \geq 0$ のとき, 以下の chain complex としての同型が成り立つ:

$$(C_*(K_\ell(a, b), K'_\ell(a, b)), -\partial) \cong (MC_{*+2}^\ell(a, b), \partial).$$

この定理の証明では, 準同型 $t: C_*(K_\ell(a, b), K'_\ell(a, b)) \rightarrow MC_{*+2}^\ell(a, b)$ を, $[\{x_{i_0}, \dots, x_{i_k}\}] \mapsto (a, x_{i_0}, \dots, x_{i_k}, b)$ を線形に拡張したものと定義し, それが well-defined で, 同型写像であることを示している. また, t が chain map であることも計算により確かめられる.

系 19 ([2], Corollary 4.4.) $\ell \geq 3$ とする.

$$k \geq 3 \text{ のとき, } MH_k^\ell(a, b) \cong H_{k-2}(K_\ell(a, b), K'_\ell(a, b)).$$

$$k = 2 \text{ のとき, } MH_2^\ell(a, b) \cong \begin{cases} H_0(K_\ell(a, b), K'_\ell(a, b)) & (d(a, b) < \ell) \\ \tilde{H}_0(K_\ell(a, b)) & (d(a, b) = \ell). \end{cases}$$

(ただし, $\tilde{H}_0(K_\ell(a, b))$ は reduced homology である.)

(証明) $k \geq 3$ のときは, 命題 18 より明らか. $k = 2$ のときを示す. $MC_*^\ell(a, b), C_*(K_\ell(a, b), K'_\ell(a, b))$ の境界作用素をそれぞれ $\partial, \tilde{\partial}$ とおく. $\text{Im } \partial_3 \subset \text{Ker } \partial_2 \subset MC_2^\ell(a, b)$ より, 以下の短完全列がある.

$$0 \rightarrow \text{Ker } \partial_2 / \text{Im } \partial_3 \rightarrow MC_2^\ell(a, b) / \text{Im } \partial_3 \rightarrow MC_2^\ell(a, b) / \text{Ker } \partial_2 \rightarrow 0$$

ここで,

$$\text{Ker } \partial_2 / \text{Im } \partial_3 = MH_2^\ell(a, b),$$

$$MC_2^\ell(a, b) / \text{Im } \partial_3 \cong C_0(K_\ell(a, b), K'_\ell(a, b)) / \text{Im } \tilde{\partial}_1 = H_0(K_\ell(a, b), K'_\ell(a, b)),$$

$$MC_2^\ell(a, b) / \text{Ker } \partial_2 \cong \text{Im } \partial_2$$

より, 以下も短完全列である.

$$0 \rightarrow MH_2^\ell(a, b) \rightarrow H_0(K_\ell(a, b), K'_\ell(a, b)) \rightarrow \text{Im } \partial_2 \rightarrow 0.$$

$$MC_1^\ell(a, b) = \begin{cases} \mathbb{Z}\langle a, b \rangle & (d(a, b) = \ell) \\ 0 & (d(a, b) < \ell) \end{cases} \text{ であり, sequence } (a, x, b) \in MC_2^\ell(a, b) \text{ に対して, } \partial(a, x, b) =$$

$$\begin{cases} (a, b) & (d(a, b) = \ell) \\ 0 & (d(a, b) < \ell) \end{cases} \text{ より, } \text{Im } \partial_2 = \begin{cases} \mathbb{Z}\langle a, b \rangle \cong \mathbb{Z} & (d(a, b) = \ell) \\ 0 & (d(a, b) < \ell). \end{cases} \text{ よって, } d(a, b) < \ell \text{ のとき,}$$

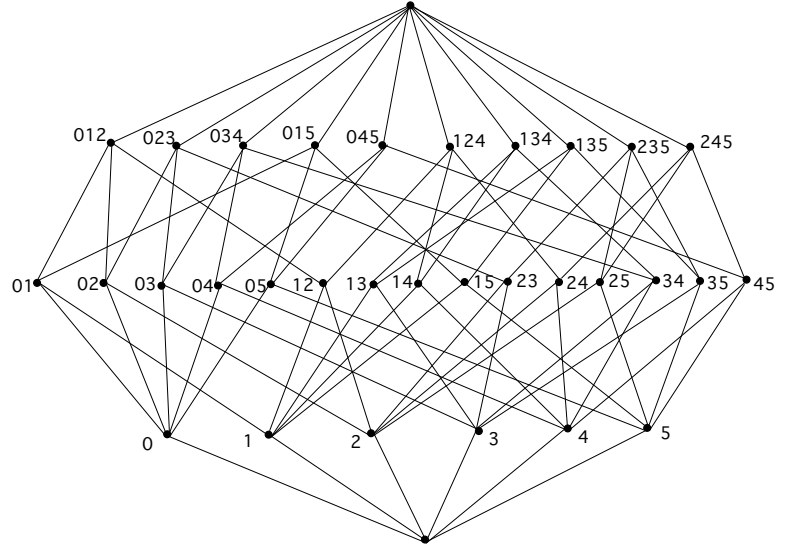
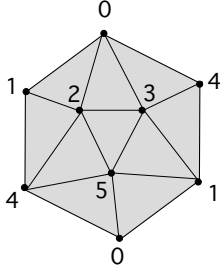


図 1: 実射影平面の最小単体分割

図 2: マグニチュードホモロジーが torsion をもつグラフ

$MH_2^\ell(a, b) \cong H_0(K_\ell(a, b), K'_\ell(a, b))$. また, $d(a, b) = \ell$ のとき, $\text{Im } \partial_2 (\cong \mathbb{Z})$ は自由加群なので, $H_0(K_\ell(a, b), K'_\ell(a, b)) \cong MH_2^\ell(a, b) \oplus \mathbb{Z}$. よって, $K'_\ell(a, b) = \emptyset$ より, $MH_2^\ell(a, b) \cong \tilde{H}_0(K_\ell(a, b))$ がいえる. \square

注意 20 • $\tilde{K}_\ell(a, b) := \{ \emptyset \neq \{(x_{i_1}, i_1), \dots, (x_{i_k}, i_k)\} \subset V(G) \times \{1, \dots, \ell-1\} \mid (a, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, b) \prec \exists(a, x_1, \dots, x_{\ell-1}, b) \in P_\ell(a, b) \}$

• $\tilde{K}'_\ell(a, b) := \{ \{(x_{i_1}, i_1), \dots, (x_{i_k}, i_k)\} \in \tilde{K}_\ell(a, b) \mid L(a, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, b) \leq \ell - 1 \}$
 とするとき, 次の chain complex としての同型がいえる:

$$C_*(\tilde{K}_\ell(a, b)) / C_*(\tilde{K}'_\ell(a, b)) \cong C_*(K_\ell(a, b)) / C_*(K'_\ell(a, b)).$$

よって, 以下では, $K_\ell(a, b)$ と $K'_\ell(a, b)$ のペアの代わりに, $\tilde{K}_\ell(a, b)$ と $\tilde{K}'_\ell(a, b)$ のペアを用いて考えていくこととする.

4 マグニチュードホモロジーが torsion をもつグラフ

この節では [3] に従い, magnitude homology が torsion をもつグラフの構成を紹介する. まず poset の order complex $\Delta(P)$ に対して, reduced chain complex $C_*(\Delta(P))$ とそのホモロジー $\tilde{H}_k(P)$ を定義する.

定義 21 (order complex) P を poset とする.

$$\Delta(P) := \{ (x_0, \dots, x_k) \mid k \geq 0, x_i \in P \ (i = 0, \dots, k), x_0 < x_1 < \dots < x_k \}$$

と定めると, これは単体複体である. $\Delta(P)$ を P の order complex と呼ぶ.

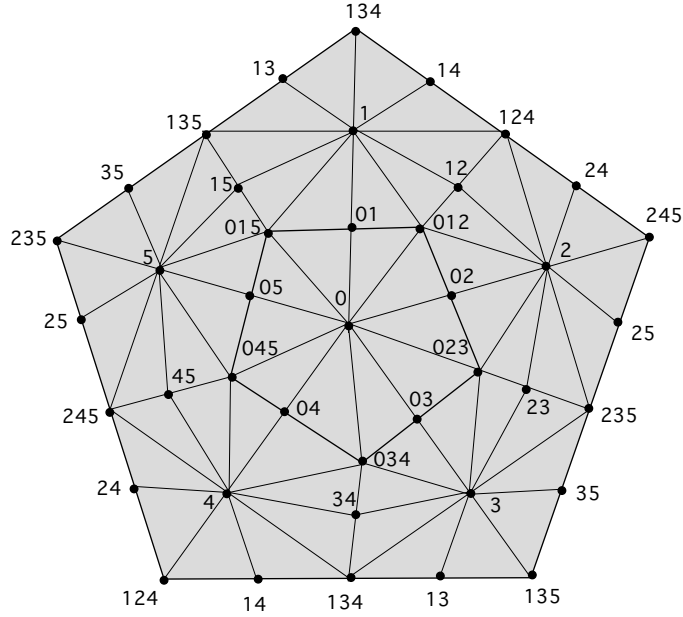


図 3: 図 2 のグラフに対応する単体複体 $\tilde{K}_4(\hat{0}, \hat{1})$

定義 22 ($C_*(\Delta(P)), \tilde{H}_k(P)$) P を poset とし, $\Delta(P)$ を P の order complex とする. $C_*(\Delta(P))$ を $\Delta(P)$ の reduced chain complex とする :

$$C_k(\Delta(P)) := \begin{cases} \bigoplus_{x_0 < \dots < x_k} \mathbb{Z}\langle x_0, \dots, x_k \rangle & (n \geq 0) \\ \mathbb{Z} & (n = -1) \end{cases}$$

とし, $\partial_k: C_k(\Delta(P)) \rightarrow C_{k-1}(\Delta(P))$ を

$$n \geq 1 \text{ のとき, } \partial_k := \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_{k,i}, \quad \partial_{k,i}(\langle x_0, \dots, x_k \rangle) = \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k \rangle,$$

$$n = 0 \text{ のとき, } \partial_0: C_0(\Delta(P)) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \partial_0(\langle x \rangle) = 1, \quad \forall \langle x \rangle \in C_0(\Delta(P))$$

と定める.

コンパクト C^∞ 多様体 M の単体分割からなる単体複体 S の face poset を P とするとき, $\Delta(P)$ は S の重心細分からなる単体複体である. よって, $\Delta(P)$ のホモロジーはもとの多様体 M のホモロジーと同型である: $H_k(M; \mathbb{Z}) \cong H_k(\Delta(P))$. P に最小元 $\hat{0}$, 最大元 $\hat{1}$ を加えた \hat{P} により構成したグラフの magnitude homology を $MH_k^\ell(\hat{P})$ と書くと, 埋め込み $H_{k-2}(\Delta(P)) \hookrightarrow MH_k^\ell(\hat{P})$ が存在する ([3], Corollary 5.12. (1)). ここで, S を実射影平面の単体分割とすると, $MH_3^4(\hat{P})$ は torsion をもつ ([3], Corollary 5.12. (3)). S を実射影平面の最小単体分割 (図 1) とし, この torsion をもつグラフを実際に図示したのが図 2 である ([5] Figure 3).

5 マグニチュードホモロジーが torsion をもつ, 頂点の少ないグラフ

前節で紹介した, magnitude homology が torsion をもつグラフ (図 2) について, 3 節で定義した単体複体 $\tilde{K}_4(\hat{0}, \hat{1})$ を図示すると, 図 3 (境界を頂点の名前の通りに貼り合わせる) のような実射

影平面の単体分割になっている。これとは逆の操作として、閉曲面の(ある条件をみたす)単体分割からなる単体複体のホモロジーを, magnitude homology が部分加群としてもつグラフを構成することを考え, 以下の命題を得た。

命題 23 閉曲面の単体分割からなる単体複体 S の 0-単体の集合のグループ分け $A \amalg B \amalg C$ であって, 以下の条件 (i), (ii) をみたすものが存在するとき, $\tilde{K}_4(a, b) = S$ となるような a, b を頂点としてもつグラフ G_S が存在する (このとき, $d(a, b) = 4$ となっている)。

(i) S の各 2-単体に含まれる 3 つの 0-単体がそれぞれすべて異なるグループに入っている。

(ii) 任意の $\{x\} \in B$ に対して, $\{x\}$ を含む S の 2-単体がちょうど 4 個存在する。

(証明) 閉曲面の単体分割からなる単体複体 S の 0-単体の集合のグループ分け $A \amalg B \amalg C$ が, 条件 (i), (ii) をみたしているとする。このとき, グラフ G_S を以下のように構成する。

$$V(G_S) := \{a, b\} \amalg A \amalg B \amalg C \quad (a \neq b),$$

$$E(G_S) := \{\{a, \alpha\} \mid \{\alpha\} \in A\} \cup \{\{\gamma, b\} \mid \{\gamma\} \in C\} \cup \{\{\alpha, \beta\} \in S \mid \{\alpha\} \in A, \{\beta\} \in B\} \cup \{\{\beta, \gamma\} \in S \mid \{\beta\} \in B, \{\gamma\} \in C\}.$$

あとは, $\tilde{K}_4(a, b) = S$ を示せばよいが, $\{\tilde{K}_4(a, b) \text{ の 2-単体}\} = \{S \text{ の 2-単体}\}$ を示せば十分である。

(ii) $\{\tilde{K}_4(a, b) \text{ の 2-単体}\} \supset \{S \text{ の 2-単体}\}$ を示す。 $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in S$ ($\{\alpha\} \in A, \{\beta\} \in B, \{\gamma\} \in C$) とするとき, $\{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\} \in S$ より, $\{\alpha, \beta\}, \{\beta, \gamma\} \in E(G_S)$ 。よって, $(a, \alpha, \beta, \gamma, b) \in P_4(a, b)$ がいえるので, $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \tilde{K}_4(a, b)$ である。

(ii) $\{\tilde{K}_4(a, b) \text{ の 2-単体}\} \subset \{S \text{ の 2-単体}\}$ を示す。 $\{x_0, x_1, x_2\} \in \tilde{K}_4(a, b)$ とすると, $\{x_0\} \in A, \{x_1\} \in B, \{x_2\} \in C$ であり,

$$(a, x_0, x_1, x_2, b) \in P_4(a, b) \Leftrightarrow \{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\} \in E(G_S) \Leftrightarrow \{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\} \in S).$$

このとき, $\{x_0, x_1, x_2\} \in S$ を示せばよい。 S は閉曲面の単体分割であるから, $\{x_1\}$ を含む S の 2-単体は, $\{\alpha_1, x_1, \gamma_1\}, \{\alpha_1, x_1, \gamma_2\}, \{\alpha_2, x_1, \gamma_1\}, \{\alpha_2, x_1, \gamma_2\}$ ($\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\} \in A, \{\gamma_1\}, \{\gamma_2\} \in C$) と書いて, $\{x_1\}$ を含む S の 1-単体は, $\{x_1, \alpha_1\}, \{x_1, \alpha_2\}, \{x_1, \gamma_1\}, \{x_1, \gamma_2\}$ だけである。 $\{x_0, x_1\} \in S$ であり, $x_0 = \alpha_1$ としてよい。このとき, $\{x_1, x_2\} \in S$ で, 条件 (i) より, $x_2 = \gamma_1$ または $x_2 = \gamma_2$ であるが, どちらの場合も $\{x_0, x_1, x_2\} \in S$ である。□

注意 24 閉曲面の単体分割からなる単体複体 S を用いて構成したグラフ G_S については, $d(a, b) = 4$ より, $\tilde{K}'_4(a, b) = \emptyset$ がいえる。よって,

$$MH_k^4(G_S) \supset MH_k^4(a, b) = H_{k-2}(\tilde{K}_4(a, b)) \quad (k \geq 3).$$

注意 25 命題 23 の設定のとき, グラフ G_S から頂点 a, b と, a を含む辺, b を含む辺を全て取り除いたものを poset とみなすと, 単体複体 $\tilde{K}_4(a, b)$ はその poset の order complex である。

図 4 にある実射影平面の単体分割からなる単体複体 S は, 命題 23 の条件をみたしている。この S から構成したグラフ G_S が図 5 であり, $MH_3^4(G_S) \supset H_1(\tilde{K}_4(a, b)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となっている。

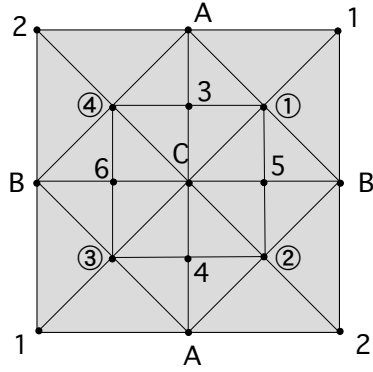


図 4: 単体複体 S (実射影平面の単体分割)

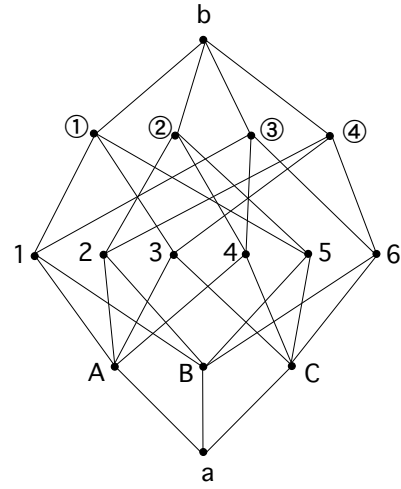


図 5: 図 4 の単体複体 S に対応するグラフ G_S

参考文献

- [1] R. Hepworth and S. Willerton, Categorifying the magnitude of a graph. *Homology Homotopy Appl.* 19 (2017), no. 2, 31-60. arXiv:1505.04125, 2015.
- [2] Yasuhiko Asao and Kengo Izumihara, Geometric approach to graph magnitude homology. arXiv:2003.08058, 2020.
- [3] Ryuki Kaneta and Masahiko Yoshinaga, Magnitude homology of metric spaces and order complexes. arXiv:1803.04247, 2018.
- [4] T. Leinster, The magnitude of a graph. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 166 (2019), 247-264. arXiv:1401.4623, 2014.
- [5] R. Sazdanovic and V. Summers, Torsion in the magnitude homology of graphs, arXiv:1912.13483, 2019.