パラエルミート対称空間内のパラ実形と擬エルミート対称空間内の実形の関係について

東京理科大学大学院 理工学研究科 数学専攻
杉本恭司 (Sugimoto KYOJI)

1 はじめに

パラエルミート対称空間とは, G-不変パラ複素構造 I と, I に関する G-不変パラエルミート計量 g を備えた対称空間 G/L であり, Kaneyuki-Kozai [3] によって導入された概念である. ここで, パラエルミート計量は擬リーマン計量であり, 特にニュートラル計量であることに注意する. また, パラエルミート対称空間はパラケーラー等質空間であり, 自然にシンプレクティック形式が定義される. 表題にあるパラ実形とは, パラエルミート対称空間の対合的反パラ正則等長変換の固定点集合の連結成分のことである. これは, 下川拓哉氏との共同研究 [7] にて導入された概念であり, 同時に双曲軌道型絶対単純パラエルミート対称空間内のパラ実形が分類された.

パラエルミート対称空間に似た空間に, 擬エルミート対称空間がある. 擬エルミート対称空間はエルミート対称空間の一般化であり, 特に単純既約擬エルミート対称空間の実形は Boumuki [2] により分類された. 本稿では, 双曲軌道型絶対単純パラエルミート対称空間内のパラ実形と単純既約擬エルミート対称空間内の実形の関係について述べる.

2 パラエルミート対称空間内のパラ実形

はじめに, パラエルミート対称空間, パラ実形について復習する.

定義 2.1 (cf. [5])**.** G を連結リー群, L を G の閉部分群, $\hat{\sigma}$ を G の対合的自己同型 ($\neq$ id) とする. $(G/L, \hat{\sigma})$ が**アフィン対称空間**であるとは, $(G^{\hat{\sigma}})_0 \subset L \subset G^{\hat{\sigma}}$ が成り立つことをいう. 但し, $G^{\hat{\sigma}} := \{x \in G \mid \hat{\sigma}(x) = x\}$, $(G^{\hat{\sigma}})_0$ は $G^{\hat{\sigma}}$ の単位連結成分を表す.

注意 2.1. $(G/L, \hat{\sigma})$ をアフィン対称空間とする. このとき, $\Sigma(aL) = \hat{\sigma}(a)L$ for $^{\forall}aL \in G/L$ で定義される写像 Σ をアフィン変換とするような G/L 上の G-不変アフィン接続 ∇^1 が唯一つ存在する. ∇^1 を $(G/L, \hat{\sigma})$ の**標準アフィン接続**という. 更に, G/L 上に G-不変擬リーマン計量 g が存在するとき, そのレビ・チビタ接続は標準アフィン接続に一致する (cf. [5]).

定義 2.2 (cf. [3])**.** (1) M を $2n$ 次元多様体とする. M 上の $(1,1)$ 型テンソル場 I が**パラ複素構造**であるとは, 次の条件を満たすことをいう:

(i) $I^2 = \mathrm{id}$.

(ii) $p \in M$ に対して, $I_p : T_pM \to T_pM$ の $(+1)$ (resp. (-1)) 固有空間を T_p^+M (resp. T_p^-M) としたとき, $\dim T_p^+M = \dim T_p^-M$.

(iii) $[IX, IY] - I[IX, Y] - I[X, IY] + [X, Y] = 0$ for ${}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$.

このとき, (M, I) を**パラ複素多様体**という.

(2) $(M, I), (M', I')$ をパラ複素多様体とし, $\Phi : M \to M'$ を可微分写像とする. 任意の $p \in M$ に対して,

$$(\Phi_*)_p \circ I_p = I_{\Phi(p)} \circ (\Phi_*)_p \quad (\text{resp. } (\Phi_*)_p \circ I_p = -I_{\Phi(p)} \circ (\Phi_*)_p)$$

が成り立つとき, Φ は**パラ正則** (resp. **反パラ正則**) であるという.

(3) (M, I) をパラ複素多様体とし, g を M 上の擬リーマン計量とする. 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して,

$$g(IX, Y) + g(X, IY) = 0$$

が成り立つとき, g を**パラエルミート計量**といい, (M, I, g) を**パラエルミート多様体**という.

(4) $(G/L, \hat{\sigma})$ をアフィン対称空間とする. G/L 上に, G-不変パラ複素構造 I と, I に関する G-不変パラエルミート計量 g が存在するとき, $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$ を**パラエルミート対称空間**という.

注意 2.2. $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$ をパラエルミート対称空間とすると, g はパラケーラー計量になる. 即ち, $\omega(X, Y) := g(X, IY)$ for $X, Y \in \mathfrak{X}(G/L)$ とすると, ω は G/L 上のシンプレクティック形式となる (cf. [3]).

定義 2.3. 実単純リー代数 $\mathfrak{g}$ が**絶対単純**であるとは, $\mathfrak{g}$ がある複素単純リー代数の実形になっていることをいう. また, リー群 G, 等質空間 G/L が絶対単純であるとは, G のリー代数が絶対単純であることをいう.

次に, 半単純概効果的パラエルミート対称空間の基本的性質を述べる. 以下に述べる命題により, 半単純概効果的パラエルミート対称空間はリー代数のある特別な元によって特徴づけられることがわかる.

命題 2.1 (cf. [3, 4, 6])**.** $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$ を半単純概効果的パラエルミート対称空間, $\mathfrak{g}$ を G のリー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ を $\hat{\sigma}_*$ による $\mathfrak{g}$ の ± 1 固有空間への分解とする. この時, 以下を満たす $Z \in \mathfrak{l}$ が一意的に存在する:

(1) $\mathfrak{l} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z)$.
(2) $I_o = \mathrm{ad}_{\mathfrak{u}} \mathrm{Z}$.

更に, 上記の Z に対して以下が成り立つ:

(3) $C_G(Z)_0 \subset L \subset C_G(Z)$.
(4) $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0, \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$.
(5) $\hat{\sigma}_* = \exp \sqrt{-1}\pi \mathrm{adZ}$.
(6) $C_G(Z)_0 \subset \bar{L}$ なる任意の $C_G(Z)$ の開部分群 $\bar{L}$ に対し, $G/\bar{L}$ はパラエルミート対称空間になる.

特に G が絶対単純であるとき, 以下が成り立つ:

(7) g は $\mathfrak{g}$ のキリング形式の 0 でない定数倍の G-不変拡張である.

(8) $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) = 1$.

但し, $\mathfrak{z}(\mathfrak{l})$ は $\mathfrak{l}$ の中心, $\mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z), C_G(Z)$ はそれぞれ Z の中心化代数と中心化群を表し, $C_G(Z)_0$ は $C_G(Z)$ の単位連結成分を表す. また, $\mathfrak{g}_\lambda$ $(\lambda = 0, \pm 1)$ は adZ の λ 固有空間を表す.

以下では, 絶対単純パラエルミート対称空間を APHS と表すことにする*1.

注意 2.3. (1) $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$ を APHS とする. 命題 2.1 より, G/L 上の G-不変パラ複素構造で g と両立するようなものは, 符号 $\pm$ の差を除いて一意的であることがわかる.

(2) 命題 2.1 で述べられている Z をパラエルミート対称空間 $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$ の**特性元**という.

(3) パラエルミート対称空間 $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$ の特性元 Z は双曲元である. 即ち, Z は半単純元で, $\mathrm{ad}\, Z$ の固有値は全て実数である.

命題 2.1 で述べられている Z に対して, $L = C_G(Z)$ となるとき, APHS $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$ は**双曲軌道型**であるという.

定義 2.4 (cf. [7]). $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$ をパラエルミート対称空間とし, $R\ (\neq \emptyset) \subset G/L$ とする. G/L 上のある対合的反パラ正則等長変換が存在して, その固定点集合の連結成分の一つと R が一致しているとき, R を $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$ のパラ実形という.

注意 2.4. パラエルミート対称空間において, 対合的反パラ正則等長変換の固定点集合は連結であるとは限らない.

定理 2.1. $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$ を双曲軌道型 APHS とし, 更に, G の中心は自明であるとする. $R \subset G/L$ に対して, 以下の (1) と (2) は同値:

(1) R は原点 o を含む G/L のパラ実形である.
(2) R は原点 o を含む閉連結完備全測地的部分多様体で次を満たす:
   (i) $g_p(T_pR, I_p(T_pR)) = \{0\}$ for $^\forall p \in R$,
   (ii) $\dim R = (1/2)\dim G/L$,
   (iii) 誘導計量が非退化.

命題 2.2 (cf. [7]). $(G/L, \hat{\sigma}, I, g)$ を双曲軌道型 APHS とし, 更に, G の中心は自明であるとする. このとき, G/L 内の任意のパラ実形 R は, G/L 内の原点 o を含むパラ実形 R_o に G/L のパラ正則相似変換で移りあう.

ここで, 双曲軌道型 APHS 内のパラ実形は対称空間であることに注意しておく. 下川拓哉氏との共同研究 [7] において, 双曲軌道型 APHS 内のパラ実形を, パラ正則相似変換で移りあうものを除いて分類した. この際, 双曲軌道型 APHS の原点を固定する (反) パラ正則等長変換が特性元によって特徴づけられることを示し, リー代数の理論を使ってパラ実形に対応する対称対を求めた. APHS のパラエルミート計量の一意性により, この分類はパラエルミート計量の選び方によらないことがわかる.

*1 absolutery simple para-Hermitian symmetric space の略

3　擬エルミート対称空間内の実形

次に, 擬エルミート対称空間とその実形について復習する.

定義 3.1 (cf. [1])**.** $(G/L, \hat{\rho})$ をアフィン対称空間とする. G/L 上の G-不変複素構造 J と, J に関する G-不変擬エルミート計量 g が存在するとき, $(G/L, \hat{\rho}, J, g)$ を**擬エルミート対称空間**という.

注意 3.1. (1) $(G/L, \hat{\rho}, J, g)$ を擬エルミート対称空間とすると, g は擬ケーラー計量になる.
(2) 単純擬エルミート対称空間 G/L に対して

$$G/L \text{ が既約} \Longleftrightarrow \mathrm{G} \text{ が絶対単純}$$

が成り立つ. (cf. [8]).

パラエルミート対称空間の場合と同様に, 擬エルミート対称空間もリー代数の特別な元で特徴づけられる. パラエルミート対称空間において, 特性元はリー代数の双曲元であったが, 擬エルミート対称空間の場合は楕円元となることに注意しておく.

命題 3.1 (cf. [2,8])**.** $(G/L, \hat{\rho}, I, g)$ を半単純概効果的擬エルミート対称空間, $\mathfrak{g}$ を G のリー代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ を $\hat{\rho}_*$ による $\mathfrak{g}$ の ± 1 固有空間への分解とする. この時, 以下を満たす $S \in \mathfrak{l}$ が一意的に存在する:

(1) $L = C_G(S) = (G^{\hat{\rho}})_0$.
(2) $J_o = \mathrm{ad}_{\mathfrak{u}}\mathrm{S}$.

更に, 上記の S に対して以下が成り立つ:

(3) $\hat{\rho}_* = \exp \pi \mathrm{adS}$.
(4) $\mathfrak{u} = [S, \mathfrak{g}]$.

特に G が絶対単純であるとき, 以下が成り立つ:

(5) g は $\mathfrak{g}$ のキリング形式の 0 でない定数倍の G-不変拡張である.
(6) $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{l}) = 1$.

定義 3.2 (cf. [2])**.** $(G/L, \hat{\rho}, J, g)$ を擬エルミート対称空間, Φ を G/L の対合的反正則等長変換とする. このとき, Φ の固定点集合 $(G/L)^{\Phi}$ を G/L の**実形**という.

注意 3.2. 単純既約擬エルミート対称空間の実形は連結である (cf. [2]).

単純既約擬エルミート対称空間内の実形は [2] により, 正則相似変換で移りあうものを除いて分類された. 単純既約擬エルミート対称空間の実形に対しても, 定理 2.1 と同様のことが成り立つことに注意しておく (cf. [2]).

4　パラ実形と実形の関係

G を連結絶対単純リー群, $\mathfrak{g}$ を絶対単純リー代数, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素単純リー代数とする. このとき,

(1) $\mathcal{R}(G)$: 単純既約擬エルミート対称空間 G/L とその実形 M の組 $(G/L, M)$ 全体からなる集合.
(2) $\mathcal{P}(G)$: 双曲軌道型 APHS G/H とそのパラ実形 R の組 $(G/H, R)$ 全体からなる集合.
(3) $d\mathcal{R}(\mathfrak{g})$: $\mathfrak{g}$ の (0 でない) 半単純元 S で $\operatorname{ad} S$ の $\mathfrak{g}$ 上の固有値が $0, \pm\sqrt{-1}$ となるものと, $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型 η で $\eta(S) = -S$ を満たすものの組 (S, η) 全体からなる集合.
(4) $d\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ で $\mathfrak{g}$ の (0 でない) 半単純元 Z で $\operatorname{ad} Z$ の $\mathfrak{g}$ 上の固有値が $0, \pm 1$ となるものと, $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型 ξ で $\xi(Z) = -Z$ を満たすものの組 (Z, ξ) 全体からなる集合.
(5) $d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実形 $\mathfrak{r}$, $(S, \eta) \in d\mathcal{R}(\mathfrak{r})$, η と可換な $\mathfrak{r}$ のカルタン対合 θ で $\theta(S) = S$ となるものの組 $(\mathfrak{r}, S, \eta, \theta)$ 全体からなる集合.
(6) $d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の実形 $\mathfrak{r}$, $(Z, \xi) \in d\mathcal{P}(\mathfrak{r})$, ξ と可換な $\mathfrak{r}$ のカルタン対合 τ で $\tau(Z) = -Z$ となるものの組 $(\mathfrak{r}, Z, \xi, \tau)$ 全体からなる集合.

上記で定めた集合に対して, 以下のようにして同値関係を定義する

(1) $(G/L_1, M_1), (G/L_2, M_2) \in \mathcal{R}(G)$ に対して,

$$(G/L_1, M_1) \simeq (G/L_2, M_2) \overset{\text{def.}}{\iff} \text{正則相似変換 } \Phi : G/L_1 \to G/L_2 \text{ が存在して, } \Phi(M_1) = M_2.$$

(2) $(G/H_1, R_1), (G/H_2, R_2) \in \mathcal{P}(G)$ に対して,

$$(G/H_1, R_1) \simeq (G/H_2, R_2) \overset{\text{def.}}{\iff} \text{パラ正則相似変換 } \Phi : G/H_1 \to G/H_2 \text{ が存在して, } \Phi(R_1) = R_2.$$

(3) $(S_1, \eta_1), (S_2, \eta_2) \in d\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ に対して,

$$(S_1, \eta_1) \sim (S_2, \eta_2) \overset{\text{def.}}{\iff} \mathfrak{g} \text{ の自己同型 } \phi \text{ が存在して, } \phi(S_1) = S_2,\ \phi \circ \eta_1 = \eta_2 \circ \phi.$$

(4) $(Z_1, \xi_1), (Z_2, \xi_2) \in d\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ に対して,

$$(Z_1, \xi_1) \sim (Z_2, \xi_2) \overset{\text{def.}}{\iff} \mathfrak{g} \text{ の自己同型 } \phi \text{ が存在して, } \phi(Z_1) = Z_2,\ \phi \circ \xi_1 = \xi_2 \circ \phi.$$

(5) $(\mathfrak{r}_1, S_1, \eta_1, \theta_1), (\mathfrak{r}_2, S_2, \eta_2, \theta_2) \in d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ に対して,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{r}_1, S_1, \eta_1, \theta_1) \sim (\mathfrak{r}_2, S_2, \eta_2, \theta_2) \overset{\text{def.}}{\iff} & \text{リー代数の同型 } \phi : \mathfrak{r}_1 \to \mathfrak{r}_2 \text{ が存在して,} \\ & \phi(S_1) = S_2,\ \phi \circ \eta_1 = \eta_2 \circ \phi,\ \phi \circ \theta_1 = \theta_2 \circ \phi.\end{aligned}$$

(6) $(\mathfrak{r}_1, S_1, \eta_1, \theta_1), (\mathfrak{r}_2, S_2, \eta_2, \theta_2) \in d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ に対して,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{r}_1, Z_1, \xi_1, \tau_1) \sim (\mathfrak{r}_2, Z_2, \xi_2, \tau_2) \overset{\text{def.}}{\iff} & \text{リー代数の同型 } \phi : \mathfrak{r}_1 \to \mathfrak{r}_2 \text{ が存在して,} \\ & \phi(Z_1) = Z_2,\ \phi \circ \xi_1 = \xi_2 \circ \phi,\ \phi \circ \tau_1 = \tau_2 \circ \phi.\end{aligned}$$

以上の記号の下, 次が成り立つ.

命題 4.1 (cf. [2, 7]). G を連結絶対単純リー群で中心が自明なもの, $\mathfrak{g}$ をそのリー代数とする.

(1) 全単射 $F_r : d\mathcal{R}(\mathfrak{g})/\sim \to \mathcal{R}(G)/\simeq$ が存在する.
(2) 全単射 $F_{pr} : d\mathcal{P}(\mathfrak{g})/\sim \to \mathcal{P}(G)/\simeq$ が存在する.

命題 4.1 について補足をしておく. 例えば, $(Z, \xi) \in d\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ としたとき, G を $\mathfrak{g}$ をリー代数にもつ連結リー群で中心が自明なもの, $H := C_G(Z)$, $\hat{\sigma} := \exp \sqrt{-1}\pi \operatorname{ad} Z$ とすると, $(G/H, \hat{\sigma})$ はアフィン対称空間となる. そこで, I を $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^{-\hat{\sigma}_*}} Z$ の G-不変拡張, g を $\mathfrak{g}$ のキリング形式の $\mathfrak{g}^{-\hat{\sigma}_*}$ 上への制限の G-不変拡張とすれば $(G/H, \hat{\sigma}, I, g)$ は双曲軌道型 APHS になる. このとき, ξ から一意的に G/H の対合的反パラ正則等長変換 Ξ で原点を固定するものが誘導されることがわかる. そこで R を Ξ の固定点集合 $(G/H)^{\Xi}$ の原点を含む連結成分とすれば, R は G/H のパラ実形となり, $(G/H, R) \in \mathcal{P}(G)$ となる. 単純既約擬エルミート対称空間の場合も同様である. 命題 4.1 の対応はこのような構成法を基にして得られ, それが上で定義した同値関係を保つということを意味している. ここで, $d\mathcal{R}(\mathfrak{g})/\sim$ から $d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim$ への単射, $d\mathcal{P}(\mathfrak{g})/\sim$ から $d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim$ への単射が自然に構成できることにも注意する.

定理 4.1. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を複素単純リー代数とする.

(1) 全単射 $f : d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \to d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ が存在する.
(2) $F : d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim \to d\mathcal{P}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\sim$, $[(\mathfrak{g}, S, \eta, \theta)] \mapsto [f(\mathfrak{g}, S, \eta, \theta)]$ は well-defined で全単射である.
(3) $(\mathfrak{g}, S, \eta, \theta) \in d\mathcal{R}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ に対して, $(G/L, M) \in \mathcal{R}(G)$ を $(S, \eta) \in d\mathcal{R}(\mathfrak{g})$ から構成される単純既約擬エルミート対称空間とその実形の組とする. また, $(\bar{\mathfrak{g}}, Z, \xi, \tau) := f(\mathfrak{g}, S, \eta, \theta)$ とし, $(\bar{G}/\bar{L}, R)$ を $(Z, \xi) \in d\mathcal{P}(\bar{\mathfrak{g}})$ から構成される双曲軌道型 APHS とそのパラ実形の組とする. このとき, M と R は等質空間として同型である.

参考文献

[1] M. Berger, Les espaces symétriques noncompacts, Ann. Sci. École Norm. Sup., **74** (1957), 85–177.

[2] N. Boumuki, The classification of real forms of simple irreducible pseudo-Hermitian symmetric spaces, J. Math. Soc. Japan, **66** (2014), no.1, 37–88.

[3] S. Kaneyuki and M. Kozai, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, Tokyo J. Math., **8** (1985), no.1, 81–98.

[4] S. S. Koh, On affine symmetric spaces, Amer. Math. Soc., **119** (1965), 291–309.

[5] K. Nomizu., Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. J. Math., **76** (1954), 33–65.

[6] T. Shimokawa and K. Sugimoto, On the groups of isometries of simple para-Hermitian symmetric spaces, Tsukuba J. Math., **41** (2017), no.1, 21–42.

[7] K. Sugimoto and T. Shimokawa, Classification of para-real forms of absolutely simple para-Hermitian symmetric spaces, In preparation

[8] R. A. Shapiro, Pseudo-Hermitian symmetric spaces, Comment. Math. Helv., **46** (1971), 529–548