

Huber の有限連結性定理の高次元化について

岡山大学大学院 自然科学研究科 数理物理学専攻
篠田裕佑 (Yusuke SHINODA)

概要

放射曲率幾何とは、測地線に沿って曲率を制限した、放射曲率を扱うリーマン多様体論の一種である。本稿では、この放射曲率幾何の観点から、2次元リーマン多様体の位相と全曲率に関する結果である、Huber の有限連結性定理を高次元化することを試みる。

1 導入

我々の目標は、2次元リーマン多様体における様々な定理を高次元に拡張することである。本稿では、連結完備非コンパクトな2次元リーマン多様体 S の曲率と位相の関係についての結果である Huber の結果を高次元化することを試みるが、その前に全曲率に関する主張である Cohn-Vossen の定理を紹介したいと思う。

定理 1.1 (S.Cohn-Vossen, [3], 1935年) もし S が有限連結^{*1}かつ全曲率^{*2} $c(S)$ を許容するならば、 $c(S) \leq 2\pi\chi(S)$ である。ここで $\chi(S)$ は S のオイラー標数^{*3}を表す。

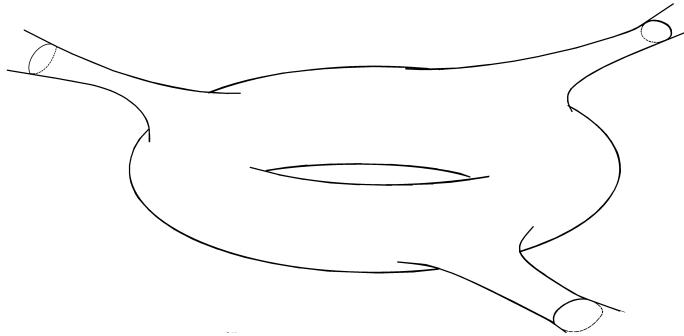


図1 有限連結な多様体の例： $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \setminus \{p_1, p_2, p_3\}$ と同相な多様体

^{*1} S が有限連結であるとは、あるコンパクト2次元リーマン多様体 V と有限個の点 $p_1, p_2, \dots, p_k \in V$ ($k \geq 1$) が存在し、 S が $V \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ に同相であるときをいう。更にこのとき、 S のオイラー標数 $\chi(S)$ を $\chi(S) := \chi(V) - k$ と定める。ここで $\chi(V)$ は V のオイラー標数を表す。

^{*2} G を S のガウス曲率とする。 S はコンパクトでないので、広義積分 $\int_S G dS$ が $\pm\infty$ も込めて存在するとき、 $c(S) := \int_S G dS$ を S の全曲率と定める。

^{*3} 脚注1を参照。

この結果は、Gauss-Bonnet の定理の一般化といえる。しかしながら、コンパクトの場合とは異なり、 $c(S)$ は位相不変量ではなくなってしまうのである。にもかかわらず、Cohn-Vossen は定理 1.1 を適用し、 S のガウス曲率が至るところ非負であるとき、 S は平面に微分同相か、平坦な円柱または平坦な開メビウスの帯に等長同形であることを示した。この定理の高次元が次に紹介する魂の定理である。

魂の定理 (J. Cheeger · D.Gromoll, [2], 1972 年) X を完備非コンパクトリーマン多様体でその断面曲率が至るところ非負であるとすれば、コンパクトな全測地的部分多様体 $Y \subset X$ (魂という) が存在し、 X は Y の法束に微分同相である。

一方で、定理 1.1 の逆の命題として、Huber は次の定理を示した。

定理 1.2 (A.Huber, [5], 1957 年) もし S が有限な全曲率を許容する (つまり $c(S) > -\infty$) ならば、 S は有限連結である。

本稿の主結果はこの Huber の定理の高次元化であるが、どのように高次元化をしたらよいだろうか？魂の定理の弱版として Gromov[4] は断面曲率が至るところ非負である完備非コンパクトなリーマン多様体 X が有限位相型、すなわち X が境界付きコンパクト多様体の内部に同相、であることを示した。このことを鑑みると、高次元化するにあたり、有限連結という概念を高次元化したものが有限位相型であるとみなすことができるだろう。では、どのようなリーマン多様体有限位相型になるだろうか？Huber の定理は有限全曲率を許容する曲面を対象としていた。しかし、全曲率というのは 2 次元特有の概念である。

	条件	結果
Huber の定理	$c(S) > -\infty$	有限連結
高次元化	?	有限位相型

そこで X は 2 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 を Toponogov の比較定理のような比較定理における参照空間としていること、つまり、断面曲率が \mathbb{R}^2 の曲率以上であることに着目してみる。 $c(\mathbb{R}^2) = 0$ であるが、定理 1.2 において S の全曲率は 0 以外の値もとり得るので、定理 1.2 の高次元化に X を採用することにはやや不満が残る。(魂の定理の高次元化の対象として X は完璧である。)

高次元化のための考察を続けたい。定理 1.1 より $c(S)$ は位相不変量ではないので、 $c(S)$ を下からある定数で押さえることによって S の位相がどのような影響を受けるのかを調べることは大変重要な研究である。次の塩濱の結果は $c(S)$ の制限が S に与える影響の重要性を示す結果である：

定理 1.3 (塩濱勝博, [9], 1984 年) S を有限連結で向きづけられているとし、更に端点を 1 つだけ持つものとする。もし $c(S) > (2\chi(S) - 1)\pi$ ならば、 S 上の Busemann 関数^{*4}は取り尽くし^{*5} (exhaustion) である。特に $c(S) > \pi$ ならば、 S は \mathbb{R}^2 に同相であり、 S 上の Busemann 関数は取り尽くしである。

^{*4} M を完備非コンパクトリーマン多様体とし、 $\dim M \geq 2$ とする。このとき、 M の半直線 γ に対して、Busemann 関数 F_γ は $F_\gamma(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} \{t - d(x, \gamma(t))\} (x \in M)$ と定義される M 上の関数である。ここで d は M の距離関数を表す。定義より、 F_γ はリプシッツであることが分かる。

^{*5} 関数 $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ が取り尽くしとは、任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し、 $h((-\infty, a])$ がコンパクトになることである。

定理 1.3 の十分条件から、断面曲率が下から一様に 0 または -1 で押さえられた完備非コンパクトリーマン多様体は定理 1.3 を高次元化するには相応しくないということが分かる。実際、上述のように断面曲率が 0 以上の場合は比較定理の参照空間が \mathbb{R}^2 なので $c(\mathbb{R}^2) = 0$ であり、一方、断面曲率が -1 以上の場合は比較定理の参照空間が双曲平面 $\mathbb{H}^2(-1)$ なので $c(\mathbb{H}^2(-1)) = -\infty$ となり、いずれの場合も全曲率は π より小さい。この考察を基に、定理 1.2 や定理 1.3 (更に [10] において見つけることのできる 2 次元の素晴らしい結果の数々) を、参照空間の全曲率に制限をかけることができる放射曲率の幾何を用いて、高次元化できるかを考える。

2 放射曲率の幾何

$n \geq 2$ を自然数とし、 \widetilde{M}^n を基点 $\tilde{p} \in \widetilde{M}^n$ を持つ単連結、完備非コンパクトな n 次元リーマン多様体、 G をそのガウス曲率、 $T_{\tilde{p}}\widetilde{M}^n$ を $\tilde{p} \in \widetilde{M}^n$ における接空間、 $\mathbb{S}_{\tilde{p}}^{n-1} := \{v \in T_{\tilde{p}}\widetilde{M}^n \mid \|v\| = 1\}$ とする。このとき、組 $(\widetilde{M}^n, \tilde{p})$ が n 次元モデル回転面であるとは、そのリーマン計量 $d\tilde{s}^2$ が \tilde{p} の周りで測地的極座標

$$d\tilde{s}^2 = dt^2 + f(t)^2 d\theta^2, (t, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{S}_{\tilde{p}}^{n-1} \quad (2.1)$$

で与えられているときをいう。 $d\tilde{s}^2$ において、 $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ は warping 関数、つまり正値のなめらかな関数であり、ヤコビ方程式

$$f''(t) + G(\tilde{\gamma}(t))f(t) = 0, f(0) = 0, f'(0) = 1 \quad (2.2)$$

を満たす。ここで $\tilde{\gamma}$ は $\tilde{p} = \tilde{\gamma}(0)$ を始点とする (\widetilde{M}^n 上の任意の) 子午線を表す。 $n = 2$ のとき $(\widetilde{M}^2, \tilde{p})$ をモデル回転面という。更に、関数 $\tilde{K} := G \circ \tilde{\gamma} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を \widetilde{M}^n 上の放射曲率関数と呼ぶ。

定義 2.1 (放射曲率の幾何) $n \geq 2$ を自然数とし、 M を基点 $p \in M$ を持つ連結完備非コンパクトな n 次元リーマン多様体とする。モデル回転面 $(\widetilde{M}^2, \tilde{p})$ が与えられたとき、 p における放射曲率が \widetilde{M}^2 の放射曲率関数 $\tilde{K} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ によって下から押さえられているとは、 p を始点とする全ての正規最短測地線 $\gamma : [0, a) \rightarrow M$ に沿って、 M の断面曲率 K_M が

$$K_M(\gamma'(t), v) \geq \tilde{K}(t), \quad \forall t \in [0, a), \forall v \in T_{\gamma(t)}M, v \perp \gamma'(t)$$

を満たすときをいう。ここで $K_M(\gamma'(t), v)$ は K_M を $\gamma'(t)$ と v で張られる $T_{\gamma(t)}M$ の 2 次元部分空間へ制限したものを表す。(従って、 $\gamma'(t)$ を含まない平面の断面曲率は考えない。)

3 主結果

本講演の主結果は、定理 1.2 の放射曲率の幾何を舞台とした高次元化である。このとき、主結果は以下となる：

定理 3.1 (近藤慶・篠田裕佑, [6], 2019 年) $n \geq 2$ を自然数とし、 $(\widetilde{M}^2, \tilde{p})$ をモデル回転面、 M を基点 $p \in M$ を持つ連結完備非コンパクトな n 次元リーマン多様体でその p における放射曲率が \widetilde{M}^2 上の放射曲率関数 $\tilde{K} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ によって下から押さえられているものとする。 $\tilde{K}_- := \min\{0, \tilde{K}\}$ とおく。もし、 $\int_{\widetilde{M}^2} \tilde{K}_- d\widetilde{M}^2 > -\infty$ ならば、

- (1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{vol } B_t(p)/t^n$ は存在する．ここで $\text{vol } B_t(p)$ は中心が p ，半径が t の距離開球を表す；
- (2) 加えて $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{vol } B_t(p)/t^n \neq 0$ を仮定すると M は有限位相型であり， M の端点の個数は $2\{\lim_{t \rightarrow \infty} m'(t)\}^{n-1}$ 以下である．ここで $m : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ はヤコビ方程式 $m''(t) + \tilde{K}_-(t)m(t) = 0, m(0) = 0, m'(0) = 1$ を満たす $C^r(r \geq 2)$ 級関数である．

注意 3.2 ここでは，定理 3.1 に関する注意や関連する結果について述べたい：

1. 端点の個数とは幾何学的には，多様体の”タコ足”の個数のことである．例えば，導入にある図 1 の多様体の，端点の個数は 3 である．
2. $\int_{\tilde{M}^2} \tilde{K}_- d\tilde{M}^2 > -\infty$ であることと， $c(\tilde{M}^2) > -\infty$ であることは同値である．
3. 放射曲率の符号はワイルドに変化する．例えば，有限な全曲率を許容しかつ放射曲率関数が有界でないモデル回転面*6が存在する ([11, Theorem 1.4]).
4. 定理 1.2 の高次元化に関し，近藤慶と田中實 [7] による次の先行結果がある： M を基点 $p \in M$ を持つ連結完備非コンパクトな n 次元リーマン多様体でその p における放射曲率がモデル回転面 (\tilde{M}^2, \tilde{p}) の放射曲率関数 $\tilde{K} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ によって下から押さえられているものとする．もし，(a) $c(\tilde{M}) \in (-\infty, 2\pi]$ かつ，(b) ある $\delta_0 \in (0, \pi]$ に対して \tilde{M}^2 が集合 $\tilde{V}(\delta_0) := \{\tilde{x} \in \tilde{M}^2 \mid 0 < \theta(\tilde{x}) < \delta_0\}$ 上に最小点 (cut point) の組を持たないならば， M は有限位相型である．
5. 上の仮定 (a) と (b) は一つだけの仮定 $c(\tilde{M}^2) \in (-\infty, 2\pi)$ におきかえることができる ([11, Theorem 1.3]).

注意 3.3 定理 1.3 の高次元化は，放射曲率の幾何の立場から近藤慶と田中實 [8] によって既になされており，その主張は以下となる： M を基点 $p \in M$ を持つ連結完備非コンパクトな n 次元リーマン多様体でその p における放射曲率が **von Mangoldt 回転面** (\tilde{M}^2, \tilde{p}) の放射曲率関数 $\tilde{K} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ によって下から押さえられているものとする．もし $c(\tilde{M}^2) > \pi$ ならば， M 上の全ての Busemann 関数は取り尽くしである．ここで (\tilde{M}^2, \tilde{p}) が Hadamard 回転面であるとは， \tilde{K} が減少関数のときをいう．

4 主定理の証明

この節を通して， M を基点 p を持つ連結完備非コンパクトな n 次元リーマン多様体とし， p での放射曲率はモデル回転面 (\tilde{M}^2, \tilde{p}) の放射曲率によって下から押さえられているとする． $d\tilde{s}^2$ を $n = 2$ のときの式 (2.1) で与えられる \tilde{M}^2 のリーマン計量で式 (2.2) を満たす warping 関数 $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を持つとする．この条件の下で $\int_{\tilde{M}^2} \tilde{K}_- d\tilde{M}^2 > -\infty$ と仮定する．このとき $c(\tilde{M}^2) \in (-\infty, 2\pi]$ であった．

(\tilde{M}^n, \tilde{o}) を warping 関数を f とする n 次元モデル回転面とする．ここで $\tilde{o} \in \tilde{M}^n$ はその基点である． M の p での放射曲率は (\tilde{M}^n, \tilde{o}) の放射曲率で下から押さえられていることに注意する． $B_t(\tilde{o}) \subset \tilde{M}^n$ を \tilde{o} を中心とする半径 t の開球とし， ω_{n-1} を $\mathbb{S}_o^{n-1} = \{v \in T_{\tilde{o}}\tilde{M}^n \mid \|v\| = 1\}$ の体積とする

証明． (1) $\text{vol } B_t(\tilde{o}) = \omega_{n-1} \int_0^t f(r)^{n-1} dr$ であるから，ロピタルの定理 (cf. [10, Lemma

*6 つまり放射曲率関数を \tilde{K} とすると， $\liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{K}(t) = -\infty$ または $\limsup_{t \rightarrow \infty} \tilde{K}(t) = \infty$ を満たす有限な全曲率を許容するモデル回転面のこと．

5.2.1]) と等周不等式 ([10, Theorem 5.2.1]) を用いて,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B_t(p)}{t^n} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B_t(p)}{\text{vol } B_t(\partial)} \cdot \frac{\omega_{n-1} \int_0^t f(r)^{n-1} dr}{t^n} = \frac{\omega_{n-1}}{n} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B_t(p)}{\text{vol } B_t(\partial)} \cdot \left\{ 1 - \frac{c(\widetilde{M}^2)}{2\pi} \right\}^{n-1}$$

を得る. Bishop の体積比較定理 [1] と Bishop–Gromov の体積比較定理 [12] により $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{vol } B_t(p) / \text{vol } B_t(\partial)$ が $[0, 1]$ の中に存在することが分かる. \square

(2) 以下において更に「 $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{vol } B_t(p) / t^n$ が正」という仮定を加える. 仮定より

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B_t(p)}{t^n} = \frac{\omega_{n-1}}{2n\pi} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } B_t(p)}{\text{vol } B_t(\partial)} \cdot \{2\pi - c(\widetilde{M}^2)\}^{n-1}$$

であるから, $0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \text{vol } B_t(p) / \text{vol } B_t(\partial), 2\pi > c(\widetilde{M}^2)$ を得る. $c(\widetilde{M}^2) \in (-\infty, 2\pi)$ であるから, [11, Theorem 1.3] より M が有限位相型を持つことが分かる.

次に端点の評価をする. M は完備非コンパクトであるから, M は少なくとも一つのエンドを持つ. 従って, $\#\text{Ends}(M) \geq 2$ と仮定できる. 今, 各 $\mathbf{e} \in \text{Ends}(M)$ に対して, $v_{\mathbf{e}} \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ を p を始点として $v_{\mathbf{e}}$ を初速度とする半直線 $\gamma_{v_{\mathbf{e}}}$ が \mathbf{e} に属するようにとる. このとき $\lambda > 0$ を, 任意の $\mathbf{e}, \mathbf{e}' \in \text{Ends}(M)$ に対して, 中心が $v_{\mathbf{e}}, v_{\mathbf{e}'}$, 半径が λ であるような \mathbb{S}_p^{n-1} の距離開球 $\mathbb{B}_\lambda(v_{\mathbf{e}}), \mathbb{B}_\lambda(v_{\mathbf{e}'})$ が互いに素になるように取れる. λ を見つけるために放射曲率幾何における Toponogov の比較定理を用いる. そのためにリーマン計量が $g^* := dt^2 + m(t)^2 d\theta^2$, $(t, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{S}_p^1$ であるようなモデル回転面 (M^*, p^*) を定義する. ただし $\mathbb{S}_p^1 := \{n \in T_p M^* \mid \|v\| = 1\}$ である. この比較定理より, もしある $\delta \in (0, \pi)$ に対して, 集合 $V^*(\delta) := \{x \in M^* \mid 0 < \theta(x) < \delta\}$ が最小点の組を持たなければ, p における角度が δ 未満であるような M の測地三角形と, p^* を頂点に持つ $V^*(\delta)$ 上の比較三角形の角を比べることができる ([7, theorem 4.12]).

m は C^r ($r \geq 2$) 級であり, p における放射曲率は \widetilde{K}_- によって下から押さえられている. g^* は C^2 級であり, $\widetilde{K}_- \leq 0$ であるから, $V^*(\pi)$ が最小点の組を持たず, 放射曲率幾何における Toponogov の比較定理を用いることができる. この比較定理を基点 p を頂点に持つ測地三角形に適用して, 故に $\mathbb{B}_\lambda(v_{\mathbf{e}}) \cap \mathbb{B}_\lambda(v_{\mathbf{e}'}) = \emptyset$ であることが分かり, $\angle(v_{\mathbf{e}}, v_{\mathbf{e}'}) \geq 2\lambda = \pi / \lim_{t \rightarrow \infty} m'(t)$ を得る. 充填補題より $\#\text{Ends}(M) = \#\{\mathbb{B}_\lambda(v_{\mathbf{e}})\} \leq 2\{\lim_{t \rightarrow \infty} m'(t)\}^{n-1}$ となり求めていた結論が得られる. \square

参考文献

- [1] R.L. Bishop and R.J. Crittenden, *Geometry of manifolds*, Pure and Applied Mathematics, Vol. **XV**, Academic Press, New York–London, 1964.
- [2] J. Cheeger and D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature*, Ann. of Math. (2) **96** (1972), 413–443.
- [3] S. Cohn-Vossen, *Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen*, Compositio Math. **2** (1935), 69–133.
- [4] M. Gromov, *Curvature, diameter and Betti numbers*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), no. 2, 179–195.
- [5] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. **32** (1957), 13–72.

- [6] K. Kondo and Y. Shinoda, *On sufficient conditions to extend Huber's finite connectivity theorem to higher dimensions*, to appear in *Tohoku Math. J.*, arXiv:1912.11255.
- [7] K. Kondo and M. Tanaka, *Total curvatures of model surfaces control topology of complete open manifolds with radial curvature bounded below. II*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), 6293–6324.
- [8] K. Kondo and M. Tanaka, *Total curvatures of model surfaces control topology of complete open manifolds with radial curvature bounded below. I*, *Math. Ann.* **351** (2011), 251–266.
- [9] K. Shiohama, *The role of total curvature on complete noncompact Riemannian 2-manifolds*, *Illinois J. Math.* **28** (1984), 597–620.
- [10] K. Shiohama, T. Shioya, and M. Tanaka, *The Geometry of Total Curvature on Complete Open Surfaces*, *Cambridge tracts in mathematics* **159**, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [11] M. Tanaka and K. Kondo, *The topology of an open manifold with radial curvature bounded from below by a model surface with finite total curvature and examples of model surfaces*, *Nagoya Math. J.* **209** (2013), 23–34.
- [12] J. Mao, *Volume comparison theorems for manifolds with radial curvature bounded*, *Czechoslovak Math. J.* **66 (141)** (2016), no. 1, 71–86.