Infinitesimal Darboux transformation and semi-discrete potential mKdV equation *

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
瀬野智也 (Tomoya SENO)

1 導入

離散微分幾何学において，可積分性をもつような離散化が行われている．有名な例としては，K曲面（Gauss 曲率が負で一定の曲面）の研究において，Bour [4] により sine-Gordon 方程式との関係が発見され, そして Bäcklund [1] は与えられたK曲面から新たなK曲面をえる変換（Bäcklund 変換）を考察した．さらに，Bianchi [2] により Bäcklund 変換の重ね合わせの原理 (Bianchi permutability) の存在が示され，そして [22, 25] でこの Bianchi permutability を用いたK曲面の離散化が考察された．一方で [12] では sine-Gordon 方程式の離散化が考察され，[3] でこれら 2 つの異なる対象に対する離散化が結びつけられた．さらに，[17] では，離散空間曲線の離散的な変形におけるフルネ枠とK曲面の離散化が結びつけられた．

本稿では, [5] で考察された半離散双等温曲面 ([21]) とポラライゼーションをもった曲線の Darboux 変換の関係と，[15, 16, 19, 20] で考察された，KdV 方程式と mKdV 方程式の離散化や半離散化 ([11, 13] など）と離散化された曲線の変形におけるフルネ枠の両立条件との関係という 2 つの異なる対象に対する離散化を結びつける．

2 離散平面曲線の連続的等周変形と半離散ポテンシャル mKdV 方程式

まず始めに，[15, 18, 19] などで詳しく述べられている離散平面曲線の連続的等周変形について簡潔に述べる。[8, 9, 14] なども参照されたい．$x : \Sigma \to \mathbb{R}^2$ を離散的な区間 $\Sigma \subset \mathbb{Z}$ で定義された離散平面曲線で，任意の $n \in \Sigma$ に対して $\det(x_n - x_{n-1} \;\; x_{n+1} - x_n) \neq 0$ とする．x_n における単位接ベクトル T_n と単位法ベクトル N_n を

$$T_n := \frac{x_{n+1} - x_n}{a_n}, \quad N_n := R(\tfrac{\pi}{2})T_n$$

* この発表は Joseph Cho と Wayne Rossman との共同研究に基づいている．

で定義する．ただし，$a_n := |x_{n+1} - x_n|$ とし，$R(\theta)$ は原点中心で角度 θ の反時計回りの回転を表す行列とする．すると，フルネの公式（[20] などを参照）

$$F_{n+1} = F_n R(\kappa_{n+1}) =: F_n L_n \tag{1}$$

により，x_n における離散曲率 κ_n を定義することができる．ただし，$F_n = (T_n\ N_n)$ とする．ψ_n を T_n の偏角とすると，

$$\psi_{n+1} = \psi_n + \kappa_{n+1}.$$

が成り立つ．そこで弧長的な等周条件，すなわち，

$$a_n'(s) = 0, \quad |x_n'(s)| \equiv 1$$

を満たすような区間 $I \subset \mathbb{R}$ での連続的変形 $x_n(s) : \Sigma \times I \to \mathbb{R}^2$ を考える．w_n を

$$x_n' = \cos w_n T_n + \sin w_n N_n$$

を満たすように定義すると，平行移動でない変形を考えることにより，

$$F_n' = F_n M_n, \quad M_n := \frac{1}{a_n}\begin{pmatrix} 0 & 2\sin w_n \\ -2\sin w_n & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

を得る．(1) と (2) の両立条件を考えると，

$$\psi_n = \frac{\theta_{n+1} + \theta_n}{2}, \quad \kappa_n = \frac{\theta_{n+1} - \theta_{n-1}}{2} \tag{3}$$

を満たすポテンシャル関数 θ は，半離散ポテンシャル mKdV 方程式 ([24, Equation (7)],[18, Equation (4.21)])

$$\left(\frac{\theta_{n+1} + \theta_n}{2}\right)' = \frac{2}{a_n}\sin\left(\frac{\theta_{n+1} - \theta_n}{2}\right) \tag{4}$$

を満たす．さらに θ は次のような幾何学的意味を持つ：

Theorem 2.1 ([6, Theorem 3.2])**.** $\theta_n(s)$ を $x_n(s)$ の変形方向の接ベクトル $x_n(s)'$ の偏角とすると，$\theta_n(s)$ は (3)，(4) を満たす．

3 Darboux 変換

ここでは，[5, 10] などで定義されている，ポラライゼーションが与えられた連続曲線に対しての Darboux 変換を，平面曲線の場合について述べる．以下では平面 $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視する．$x : (I, \frac{\mathrm{d}s^2}{m}) \to \mathbb{C}$ で区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上で定義されたポラライゼーション $\frac{\mathrm{d}s^2}{m}$ をもつ平面曲線を表すとする．ただし $m : I \to \mathbb{R}^\times$ とする．$\frac{\mathrm{d}s^2}{m}$ が

$$\frac{\mathrm{d}s^2}{m} = |\mathrm{d}x|^2. \tag{5}$$

を満たすとき，弧長的であるとよぶ ([5, p. 48]).

Definition 3.1 ([5, Definition 2.4]). 2 曲線 $x, \hat{x} : (I, \frac{\mathrm{d}s^2}{m}) \to \mathbb{C}$ が，$\mu \in \mathbb{R}^\times$ に対して，

$$\mathrm{cr}\,\mathrm{d}s^2 = \frac{x'\hat{x}'}{(x-\hat{x})^2}\,\mathrm{d}s^2 = \frac{\mu}{m}\,\mathrm{d}s^2 \tag{6}$$

を満たすとき，$x, \hat{x}$ をパラメータ μ の Darboux ペアとよぶ．

次に，Darboux 変換において弧長的なポラライゼーションが保たれるための条件を考える．$x, \hat{x} : (I, \frac{\mathrm{d}s^2}{m}) \to \mathbb{C}$ をパラメータ μ の Darboux ペアとすると，$\Lambda := |\hat{x} - x|^2$ は

$$\Lambda' = 2(\hat{x} - x)\cdot x' \left(\frac{\mu}{m|x'|^2}\Lambda - 1\right) \tag{7}$$

を満たすことが確かめられる．$\frac{\mathrm{d}s^2}{m}$ が x に対して弧長的であるとすると，(5) と常微分方程式の解の一意性により次が得られる：

Proposition 3.2 ([6, Proposition 2.6]). $x, \hat{x} : (I, \frac{\mathrm{d}s^2}{m}) \to \mathbb{C}$ をパラメータ μ の Darboux ペアとし，$\frac{\mathrm{d}s^2}{m}$ が x に対して弧長的であるとする．このとき，$\frac{\mathrm{d}s^2}{m}$ が $\hat{x}$ に対しても弧長的であるための必要十分条件は，ある 1 点 $s_0 \in I$ で $|\hat{x} - x|^2 = \frac{1}{\mu}$ となることである．

4 Infinitesimal Darboux 変換（Darboux 変形）

第 3 章で紹介した，連続曲線に対する離散的な変形である Darboux 変換を，第 2 章で紹介した，離散曲線に対する連続的な等周変形と結びつけるために，Darboux 変換におけるパラメータの役割を入れ替えることによって，離散曲線に対する連続的な変形である infinitesimal Darboux 変換（Darboux 変形）を定義する．

まず，離散的な区間 $\Sigma \subset \mathbb{Z}$ で定義された離散平面曲線 $x : \Sigma \to \mathbb{C}$ に対して，Σ の各辺で定義された，常に正または負の値をとる関数 μ により表される離散的なポラライゼーション μ が与えられた平面曲線 $x : (\Sigma, \frac{1}{\mu}) \to \mathbb{C}$ を考える．μ が

$$\frac{1}{\mu_{(n,n+1)}} = |x_n - x_{n+1}|^2 \tag{8}$$

を満たすとき，弧長的であるとよぶ（[6, Definition 2.8]）．

Definition 4.1 ([6, Definition 2.7]). $x^0 : (\Sigma, \frac{1}{\mu}) \to \mathbb{C}$ をポラライゼーション μ をもつ離散曲線とする．x^0 の連続的変形 $x : \Sigma \times I \to \mathbb{C}$ が，各辺 $(n, n+1)$ において

$$\frac{x_n' x_{n+1}'}{(x_n - x_{n+1})^2}\,\mathrm{d}s^2 = \frac{\mu_{(n,n+1)}}{m}\,\mathrm{d}s^2, \quad m : I \to \mathbb{R}^\times \tag{9}$$

を満たすとき，x をパラメータ関数 m の infinitesimal Darboux 変換，または Darboux 変形という．

次に，第 3 章と同様に，Darboux 変形において弧長的なポラライゼーションが保たれるための条件を考える．$x^0 : (\Sigma, \frac{1}{\mu}) \to \mathbb{C}$ を弧長的なポラライゼーション μ をもつ離散曲線とし，x を x^0 の Darboux 変形で，そのパラメータ関数を m とする．(9) より任意の $(n, n+1)$ に対して

$x_n(s), x_{n+1}(s)$ は $\frac{\mathrm{d}s^2}{m}$ をポラライゼーションにもつ，パラメータ $\mu_{(n,n+1)}$ の Darboux ペアとなることがわかり，(7) と Proposition 3.2 により，次が得られる：

Proposition 4.2 ([6, Proposition 2.10])**.** $x^0 : (\Sigma, \frac{1}{\mu}) \to \mathbb{C}$ を弧長的なポラライゼーション μ をもつ離散曲線とし，$x : \Sigma \times I \to \mathbb{C}$ を x^0 の Darboux 変形で，そのパラメータ関数を m とする．任意の $s \in I$ に対して，μ が離散曲線 $x_n(s)$ の弧長的なポラライゼーションとなるための必要十分条件は，ある $n_0 \in \Sigma$ に対して，$\frac{\mathrm{d}s^2}{m}$ が連続曲線 $x_{n_0}(s)$ の弧長的なポラライゼーションになることである．

さらに，(4) と Proposition 4.2 より，次のように第 2 章の等周変形と Darboux 変形を結びつけることができる：

Proposition 4.3 ([6, Proposition 3.3])**.** $x_n(s) : \Sigma \times I \to \mathbb{C}$ を離散平面曲線 $x_n^0 = x_n(s_0)$ の等周変形とする．x^0 に弧長的なポラライゼーション $\mu_{(n,n+1)}$ を与えると，$x_n(s)$ は弧長的なポラライゼーションを保つ Darboux 変形になる．

Proposition 4.2 と Proposition 4.3 をまとめると次の定理が得られる：

Theorem 4.4 ([6, Theorem 3.4])**.** 次の 3 つの半離散系はすべて同値である：

- ポラライゼーションをもつ連続平面曲線の，弧長的なポラライゼーションを保つ Darboux 変換の繰り返し
- ポラライゼーションをもつ離散平面曲線の，弧長的なポラライゼーションを保つ Darboux 変形
- 離散平面曲線の等周変形

5　Darboux 変形による半離散ポテンシャル mKdV 方程式

最後に，第 4 章で定義した Darboux 変形を用いて半離散ポテンシャル mKdV 方程式が，フルネ枠を使わずに得られる過程を示す．

$x : \Sigma \times I \to \mathbb{C}$ を $x^0 : (\Sigma, \frac{1}{\mu}) \to \mathbb{C}$ の弧長的なポラライゼーション μ を保つようなパラメータ $m : I \to \mathbb{R}^\times$ の Darboux 変形とする．さらに，すべての n に対して $s \in I$ は $x_n(s)$ の弧長パラメータであるとすると，(5) より $m = 1$ となる．各 n に対して k_n を x_n の曲率とすると $x_n'' = ik_n x_n'$ となり，また θ_n を x_n の接ベクトルの偏角とする，すなわち $x_n' = e^{i\theta_n}$ とすると，$\theta_n' = k_n$ が成り立つ．各 $(n, n+1)$ において，x_n と x_{n+1} はパラメータ $\mu_{(n,n+1)}$ の Darboux ペアになっているので，$\mu_{(n,n+1)}$ を単に μ と書くと，(6) より，

$$(x_n' x_{n+1}')' = \left(\mu(x_{n+1} - x_n)^2\right)' = 2\sqrt{\mu}(e^{i\theta_{n+1}} - e^{i\theta_n})e^{i\frac{\theta_n}{2}} e^{i\frac{\theta_{n+1}}{2}}$$

が成り立つ．一方で，

$$(x_n' x_{n+1}')' = i\theta_n' x_n' x_{n+1}' + i\theta_{n+1}' x_n' x_{n+1}' = i(\theta_{n+1}' + \theta_n')e^{i\theta_n} e^{i\theta_{n+1}}$$

も成り立ち，右辺を比べることにより半離散ポテンシャル mKdV 方程式 (4) が得られる．

参考文献

[1] A. V. Bäcklund, *Om ytor med konstant negativ krökning*, Lunds Universitets Årsskrift 19 (1883), 1–48.

[2] L. Bianchi, *Sulla trasformazione di Bäcklund per le superficie pseudosferiche*, Rend. Lincei 5 (1892), no. 1, 3–12.

[3] A. I. Bobenko and U. Pinkall, *Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation*, J. Differential Geom. 43 (1996), no. 3, 527–611. MR1412677

[4] E. Bour, *Théorie de la déformation des surfaces*, J. Éc. Polytech. 39 (1862), 1–148.

[5] F. E. Burstall, U. Hertrich-Jeromin, C. Müller, and W. Rossman, *Semi-discrete isothermic surfaces*, Geom. Dedicata 183 (2016), 43–58. MR3523116

[6] J. Cho, W. Rossman, and T. Seno, *Infinitesimal Darboux transformation and semi-discrete mKdV equation* (2020), available at arXiv:2010.07846.

[7] J. Cho, W. Rossman, and T. Seno, *Discrete mKdV equation via Darboux transformation* (2020), available at arXiv:2012.04229

[8] A. Doliwa and P. M. Santini, *An elementary geometric characterization of the integrable motions of a curve*, Phys. Lett. A 185 (1994), no. 4, 373-384. MR1261407

[9] A. Doliwa and P. M. Santini, *Integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz-Ladik hierarchy*, J. Math. Phys. 36 (1995), no. 3, 1259–1273. MR1317439

[10] A. Fuchs, *Transformations and singularities of polarized curves*, Ann. Global Anal. Geom. 55 (2019), no. 3, 529–553. MR3936232

[11] R. Hirota, *Nonlinear partial difference equations. I. A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation*, J. Phys. Soc. Jpn. 43 (October 1977), no. 4, 1424–1433 (en). MR0460934

[12] R. Hirota, *Nonlinear partial difference equations. III. Discrete sine-Gordon equation*, J. Phys. Soc. Japan 43 (1977), no. 6, 2079–2086. MR0460936

[13] R. Hirota, *Discretization of the potential modified KdV equation*, J. Phys. Soc. Japan 67 (1998), no. 7, 2234–2236. MR1647153

[14] M. Hisakado, K. Nakayama, and M. Wadati, *Motion of discrete curves in the plane*, J. Phys. Soc. Japan 64 (1995), no. 7, 2390–2393. MR1345549

[15] J.-i. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura, and Y. Ohta, *Explicit solutions to the semi-discrete modified KdV equation and motion of discrete plane curves*, J. Phys. A 45(2012), no,4, 045206, 16. MR2874242

[16] J.-i. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura, and Y. Ohta, *Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves*, Kyushu J. Math. 66 (2012), no. 2, 303–324. MR3051339

[17] J.-i. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura, and Y. Ohta, *Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves*, J. Phys. A 47 (2014), no. 23, 235202, 26. MR3216777

[18] S. Kaji, K. Kajiwara, and H.Park, *Linkage mechanisms governed by integrable deformations*

of discrete space curves, Nonlinear Systems and Their Remarkable Mathematical Structures (N. Euler and M. C. Nucci, eds.), Vol. 2, Chapman and Hall/CRC, New York, 2019, pp. 356-381.

[19] N. Matsuura, *Discrete differential geometry of curves*, Progress in mathematics of integrable systems (R. Hirota and T. Daisuke, eds.), RIMS Kôkyûroku Bessatsu, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012, pp. 53–75 (Japanese). MR2964435

[20] N. Matsuura, *Discrete KdV and discrete modified KdV equations arising from motions of planar discrete curves*, Int. Math. Res. Not. IMRN 8 (2012), 1681–1698. MR3057376

[21] C. Müller and J. Wallner, *Semi-discrete isothermic surfaces*, Results Math. 63 (2013), no. 3-4, 1395–1407. MR3057376

[22] R. Sauer, *Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen*, Math. Z. 52 (1950), 611–622. MR0037042

[23] S. Tabachnikov, *On the bicycle transformation and the filament equation: results and conjectures*, J. Geom. Phys. 115 (2017), 116–123. MR3623617

[24] M. Wadati, *Bäcklund transformation for solutions of the modified Korteweg-de Vries equation*, J. Phys. Soc. Japan 36 (1974), no. 5, 1498.

[25] W. Wunderlich, *Zur Differenzengeometrie der Flächen konstanter negativer Krümmung*, Österreich. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. S.-B. IIa. 160 (1951), 39–77. MR0056342