1 次元非ユニタリ量子ウォークの Witten index

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
関 元樹 (Motoki SEKI)

概要

本研究は，カイラル対称性を持つ非ユニタリな量子ウォークの本質的スペクトルと Witten index を計算し，ユニタリなものでは必要であると考えられていた，index を定義するための gap が非ユニタリでは存在しなくとも Witten index が定義できることを示した．

この発表は浅原啓輔氏（滋賀大学），船川大樹氏（北海学園大学），田中洋平氏（信州大学）との共同研究 [1] に基づくものである．

1 導入

1.1 カイラル対称性をもつ量子ウォーク

量子ウォークはランダムウォークの量子版とみなせる数理モデルで，状態空間をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ にとり，一般的にはユニタリ作用素 U を時間発展作用素とする．この時間発展作用素が系を代表する作用素である．

量子ウォークは簡明なモデルに対して広い応用を持つ．その応用の一つに物性物理の 1 分野であるトポロジカル相の系を量子ウォークでモデリングするというものがある．その中でも今回はカイラル対称性をもつ量子ウォークを扱い，chiral pair という概念を導入する．

定義 1.1 (Chiral pair)**.** (Γ, U) が **chiral pair** であるとは，量子ウォーク U に対して，ユニタリかつ自己共役な作用素 Γ が存在して，

$$U^* = \Gamma U \Gamma \tag{1.1}$$

が成立することである．

ここで，本研究の基本的概念である，フレドホルム作用素を導入する．

定義 1.2 (フレドホルム作用素)**.** $\mathcal{H}$ 上の作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ がフレドホルム作用素とは，次の 3 つの条件をみたすことである：

- $\dim \ker A < \infty$.
- $\dim \ker A^* < \infty$.
- A の値域が閉.

このフレドホルム作用素を使って，本質的スペクトルを定義する．

定義 1.3 (本質的スペクトル)**.** $A \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$ の本質的スペクトル $\sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ は

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(A) := \{z \in \mathbb{C} \mid A - z\text{がフレドホルム作用素ではない}\}.$$

カイラル対称性をもつ量子ウォークは次のような一般的な枠組みをもつ．Γ のスペクトル $\sigma(\Gamma)$ は $\{\pm 1\}$ の部分集合であることから，$\mathcal{H} = \ker(\Gamma - 1) \oplus \ker(\Gamma + 1)$ と直交分解できる．この分解を用いた行列表示で，Γ と $Q = \mathrm{Im}\, U$ は次のような対角と非対角の表示が出来る．

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q := \mathrm{Im}\, U = \begin{pmatrix} 0 & Q_0^* \\ Q_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

ここで Q_0 は $\ker(\Gamma - 1) \to \ker(\Gamma + 1)$ の作用素である．

定義 1.4 (Chiral pair のフレドホルム性)**.** Chiral pair (Γ, U) の Q_0 がフレドホルム作用素であるとき，その chiral pair はフレドホルムであるという．

この Q_0 を用いて chiral pair (Γ, U) に対して Witten index を定義する．

定義 1.5 (Witten index)**.** Chiral pair (Γ, U) がフレドホルムであるとき，その Witten index $\mathrm{ind}(\Gamma, U)$ を次で定義する：

$$\mathrm{ind}(\Gamma, U) := \dim\ker Q_0 - \dim\ker Q_0^*. \tag{1.3}$$

本質的スペクトルと，Witten index は次のようにユニタリ不変性をもつ．ユニタリ不変性は物理的意味を持つ量として解釈するのに重要な概念であることから，本質的スペクトルと Witten index は物理的に意味を持つとみることが出来る．

命題 1.6. 量子ウォーク U の本質的スペクトルはユニタリ不変である．すなわち，ユニタリ変換 $\epsilon \colon \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ に対して，

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\epsilon^* U \epsilon) = \sigma_{\mathrm{ess}}(U). \tag{1.4}$$

さらに，フレドホルムな chiral pair (Γ, U) の Witten index もユニタリ不変である．すなわち，同様の ϵ に対して，

$$\mathrm{ind}(\epsilon^*\Gamma\epsilon, \epsilon^* U \epsilon) = \mathrm{ind}(\Gamma, U). \tag{1.5}$$

次に，コンパクトな摂動を定義する．コンパクトな摂動は

定義 1.7 (コンパクトな摂動)**.** 作用素 U に対して，コンパクト作用素 K が存在して，$U + K$ を U に対するコンパクトな摂動という．

本質的スペクトルと Witten index はコンパクトな摂動に対して安定である．

命題 1.8. 量子ウォーク U の本質的スペクトルはコンパクトな摂動に対して安定である．すなわち，コンパクトな作用素 K に対して，

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(U + K) = \sigma_{\mathrm{ess}}(U). \tag{1.6}$$

フレドホルムな Chiral pair (Γ, U) の Witten index $\mathrm{ind}(\Gamma, U)$ はコンパクトな摂動に対して安定である．すなわち，コンパクトな作用素 K に対して，

$$\mathrm{ind}(\Gamma, U + K) = \mathrm{ind}(\Gamma, U). \tag{1.7}$$

例えば時間発展作用素の有限サイトにおける連続変形はコンパクトな摂動になっており，このような摂動に対して Witten index は強いということが言える．

1.2 開放系の量子ウォーク

ユニタリのカイラル対称性を持つ量子ウォークの Witten index は，鈴木，田中らによって成されている [2, 3]．ユニタリな量子ウォークのスペクトルは単位円の部分集合となる．さらに，Witten index が定義されるためには $+1$ と -1 が U の本質的スペクトルに含まれないという **essentially gapped** という条件が必要となる [4]．一方，開放系の量子ウォークでは，時間発展作用素が非ユニタリとなるため，そのスペクトルは単位円の部分集合とは限らない．

2 モデル

開放系の典型的な量子ウォークとして，Mochizuki–Kim–Obuse がある．

定義 2.1 (Mochizuki–Kim–Obuse モデル)**.** 状態空間を $\mathcal{H} := \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^2)$ として，時間発展作用素を次で定義する：

$$U_{\mathrm{mko}} := SG\Phi C_2 SG^{-1}\Phi C_1. \tag{2.1}$$

ここで，各作用素は $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ と分解して，

$$S := \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad G := \begin{pmatrix} e^{\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma(\cdot+1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi := \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi(\cdot+1)} \end{pmatrix}, \quad C_j := \begin{pmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ i\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

と定義する．ここで，L はシフト作用素で $\Psi \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^2)$ に対して，$L\Psi(x) := \Psi(x+1)$ である．さらに，実数値の数列 $\gamma = (\gamma(x))_{x\in\mathbb{Z}}$，$\phi = (\phi(x))_{x\in\mathbb{Z}}$，$\theta_1 = (\theta_1(x))_{x\in\mathbb{Z}}$，$\theta_2 = (\theta_2(x))_{x\in\mathbb{Z}}$ を $\ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ のかけ算作用素としてみて，さらに両端で極限をもつとする．すなわち，

$$\xi(\star) := \lim_{x\to\star}\xi(x) \in \mathbb{R}, \qquad \xi \in \{\gamma, \phi, \theta_1, \theta_2\}, \quad \star = \pm\infty. \tag{2.3}$$

このモデルは光ファイバーを用いた光子のモデルとして実現しており，G の作用素が非ユニタリであるがゆえに U_{mko} 全体が非ユニタリとなる．実験的にはこの G が系へのエネルギーの出入りを表し，開放系となるゆえんである．

もう一つ，Suzuki モデルを定義する．

定義 2.2 (Suzuki モデル)**.** m を 0 でない整数とする．(Γ_m, U_m) を $\ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^2) = \ell^2(\mathbb{Z}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z})$ と分解した，次のブロック行列で定義されるとする：

$$\Gamma_m := \begin{pmatrix} p & qL^m \\ L^{-m}q^* & -p(\cdot - m) \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$U_m := \begin{pmatrix} p & qL^m \\ L^{-m}q^* & -p(\cdot - m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2\gamma(\cdot+1)}a & e^{\gamma-\gamma(\cdot+1)}b^* \\ e^{\gamma-\gamma(\cdot+1)}b & -e^{2\gamma}a \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

ここで，$\gamma = (\gamma(x))_{x\in\mathbb{Z}}$，$p = (p(x))_{x\in\mathbb{Z}}$，$a = (a(x))_{x\in\mathbb{Z}}$ は実数値の数列で，$q = (q(x))_{x\in\mathbb{Z}}$，$b =$

$(b(x))_{x\in\mathbb{Z}}$ は複素数値の数列で次の条件をみたすとする：

$$p(x)^2+|q(x)|^2=1, \qquad x\in\mathbb{Z}, \tag{2.6}$$
$$a(x)^2+|b(x)|^2=1, \qquad x\in\mathbb{Z}, \tag{2.7}$$
$$\xi(\pm\infty):=\lim_{x\to\pm\infty}\xi(x), \qquad \xi\in\{\gamma,p,a,q,b\}, \tag{2.8}$$
$$\theta(\pm\infty):=\begin{cases}\arg q(\pm\infty), & q(\pm\infty)\neq 0,\\ 0, & q(\pm\infty)=0,\end{cases} \tag{2.9}$$
$$\theta'(\pm\infty):=\begin{cases}\arg b(\pm\infty), & b(\pm\infty)\neq 0,\\ 0, & b(\pm\infty)=0.\end{cases} \tag{2.10}$$

ここで，$\arg\colon\mathbb{C}\to[0,2\pi]$ は $w=e^{i\arg w}$ が成立する，一意に定まる角度の関数とする．

3　主定理

定理 3.1. Mochizuki–Kim–Obuse モデル U_{mko} に対して，Γ_{mko} が存在して，$(\Gamma_{\mathrm{mko}},U_{\mathrm{mko}})$ が chiral pair をなす．さらに，$(\Gamma_{\mathrm{mko}},U_{\mathrm{mko}})$ は Suzuki モデル (Γ_2,U_2) にユニタリ同型である．

このことから，(Γ_2,U_2) がフレドホルムであるならば，

$$\mathrm{ind}(\Gamma_{\mathrm{mko}},U_{\mathrm{mko}})=\mathrm{ind}(\Gamma_2,U_2), \qquad \sigma_{\mathrm{ess}}(U_{\mathrm{mko}})=\sigma_{\mathrm{ess}}(U_2) \tag{3.1}$$

となり，(Γ_m,U_m) は $(\Gamma_{\mathrm{mko}},U_{\mathrm{mko}})$ の一般化と見なすことが出来る．

さらに，(Γ_m,U_m) の Witten index は次のように分類できる．

定理 3.2. $\star=\pm\infty$ として，

$$p_\gamma(\star):=\frac{p(\star)}{\sqrt{p(\star)^2+|q(\star)|^2\cosh^2(2\gamma(\star))}} \tag{3.2}$$

とする．このとき，chiral pair (Γ_m,U_m) がフレドホルムになるのは $\star=\pm\infty$ のそれぞれに対して $|p_\gamma(\star)|\neq|a(\star)|$ なるときである．この場合 Witten index は次のようになる：

$$\mathrm{ind}(\Gamma_m,U_m)=\begin{cases}0, & |p_\gamma(-\infty)|<|a(-\infty)|,\ |p_\gamma(+\infty)|<|a(+\infty)|,\\ m\,\mathrm{sgn}\,p(+\infty), & |p_\gamma(-\infty)|<|a(-\infty)|,\ |p_\gamma(+\infty)|>|a(+\infty)|,\\ -m\,\mathrm{sgn}\,p(-\infty), & |p_\gamma(-\infty)|>|a(+\infty)|,\ |p_\gamma(+\infty)|<|a(+\infty)|,\\ m\,\mathrm{sgn}\,p(+\infty)-m\,\mathrm{sgn}(-\infty), & |p_\gamma(+\infty)|>|a(+\infty)|,\ |p_\gamma(-\infty)|>|a(-\infty)|.\end{cases} \tag{3.3}$$

ここで，$\mathrm{sgn}\colon\mathbb{R}\to\{-1,1\}$ は次で定義される関数である：

$$\mathrm{sgn}\,x:=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases} \tag{3.4}$$

また，(Γ_m,U_m) の本質的スペクトルは次の様に分類できる．

定理 3.3. $\star = \pm\infty$ のそれぞれに対して，次を定義する：

$$s(\star) := \operatorname{sign}(p(\star)a(\star)), \tag{3.5}$$
$$\Lambda_\pm(\star) := |p(\star)a(\star)|\cosh(2\gamma(\star)) \pm |q(\star)b(\star)|, \tag{3.6}$$
$$\sigma(\star) := \bigcup_{n=\pm 1} \left\{ \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n \;\middle|\; s(\star)x \in [\Lambda_-(\star), \Lambda_+(\star)] \right\}. \tag{3.7}$$

これを定めると，$\sigma_{\mathrm{ess}}(U_m) = \sigma(-\infty) \cup \sigma(+\infty)$ となる．さらに，$\cosh^{-1}$ を $[0,\infty] \ni x \mapsto \cosh x \in [1,\infty]$ の逆関数として，$1/0 := \infty$ とし，

$$\gamma_\pm(\star) := \frac{1}{2}\cosh^{-1}\left(\frac{1 \pm |q(\star)b(\star)|}{|p(\star)a(\star)|}\right) \tag{3.8}$$

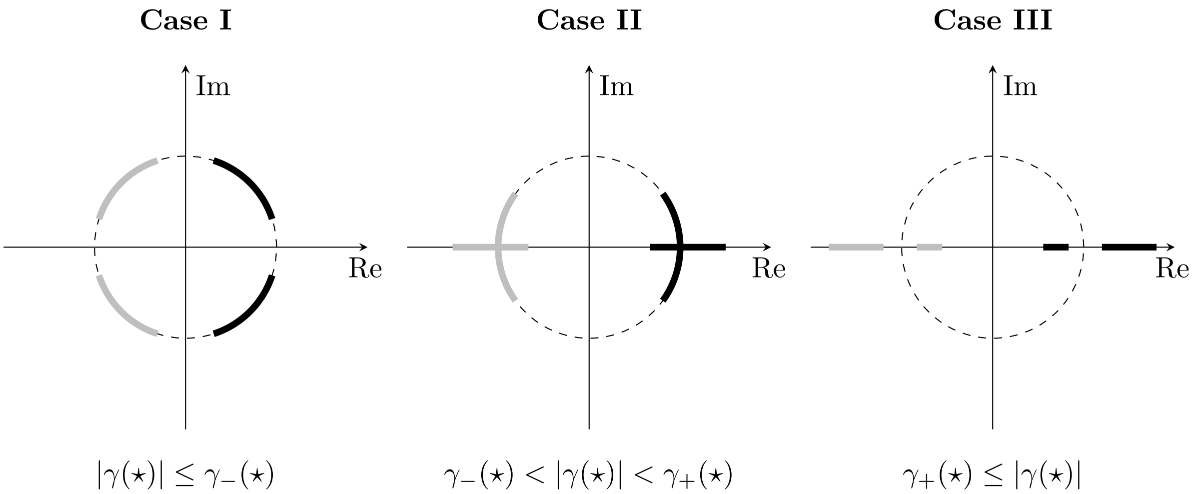
と定義すると，$\star = \pm\infty$ に対して，区間 $[\gamma_-(\star), \gamma_+(\star)] \subset [0,\infty]$ が well-defined になり，$\sigma(\star)$ は次の 3 種類の場合に分けられる：

Case I　$|\gamma(\star)| \le \gamma_-(\star)$ のとき，$[\Lambda_-(\star), \Lambda_+(\star)] \subset [-1,1]$ となり，$\sigma(\star) \subset \mathbb{T}$ となる．

Case II　$\gamma_-(\star) < |\gamma(\star)| < \gamma_+(\star)$ のとき，$[\Lambda_-(\star), 1] \subset [-1,1]$ かつ $[1, \Lambda_+(\star)] \subset [1,\infty]$ となり，$\sigma(\star)$ は $s(\star)$ を含む $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ の部分集合となる．

Case III　$\gamma_+(\star) \le |\gamma(\star)|$ のとき，$[\Lambda_-(\star), \Lambda_+(\star)] \subset [1,\infty]$ となり，$\sigma(\star) \subset \mathbb{R}$ となる．

この定理を図示すると，次のようになる．$s(\star) = 1$ のときは，本質的スペクトルは黒太線のようになり，$s(\star) = -1$ のときは，灰の太線のようになる．



3.1　具体例

ユニタリの量子ウォークにおいては essentially gapped という条件が index を定義するのに重要な概念であったが，非ユニタリに拡張した場合はこの条件はもはや必要なく，gap のない量子ウォークで Witten index が非ゼロなものが作れる．

例 3.4. (Γ_m, U_m) を定義 2.2 のものとする．このとき，

$$\gamma_0 := 0.7, \qquad p_0 := 0.7, \qquad , a_0 := 0.3$$

とする．さらに，$a(\pm\infty) := \pm a_0$ かつ $p(\pm\infty) := \pm p_0$ とすれば，式 (3.8) より，

$$\gamma_-(-\infty) = \gamma_-(+\infty) = 0.4891\ldots,$$
$$\gamma_+(-\infty) = \gamma_+(+\infty) = 1.3847\ldots$$

となる．ここで，$\gamma(\pm\infty) := \gamma_0$ とすれば，$\gamma_-(\pm\infty) < |\gamma_0| < \gamma_+(\pm\infty)$ となる．(3.7) より，$s(-\infty) = s(+\infty) = 1$ から，$\sigma_{\mathrm{ess}}(U_m) = \sigma(-\infty) = \sigma(+\infty)$ となる．より詳細には，$\sigma_{\mathrm{ess}}(U_m) = \sigma(\pm\infty)$ は Case II に分類され，$+1$ は $\sigma_{\mathrm{ess}}(U_m)$ に含まれており，gapless である．一方，この量子ウォークの Witten index は，

$$\mathrm{ind}(\Gamma_m, U_m) = m(+1 - (-1)) = 2m$$

となり，非ゼロである．

4　結論

本研究において行ったことは以下のことである．まず，非ユニタリなカイラル対称性をもった量子ウォークにおいて Witten index を定義した．続いて，二相系の Mochizuki–Kim–Obuse モデルが Suzuki モデル (Γ_2, U_2) とユニタリ同型であることを示した．さらに，ギャップのない量子ウォークに対して，非自明な Witten index が定義できる具体例を構成した．最後に，$\sigma_{\mathrm{ess}}(Q) \neq \{\mathrm{Im}\, z \mid z \in \sigma_{\mathrm{ess}}(U)\}$ を示した．

今後の課題としては，非ユニタリな量子ウォークにおける対称性に保護された境界状態の個数の評価がどうなっているかを調べることと，非ユニタリ量子ウォークの固有値を含む完全なスペクトル解析が挙げられる．

参考文献

[1] K. Asahara, D. Funakawa, M. Seki, Y. Tanaka, arXiv: 2011.12907.

[2] A. Suzuki, Quantum Inf. Process., 18(12):363, 2019.

[3] A. Suzuki, Y. Tanaka, Quantum Inf. Process., 18(12):377, 2019.

[4] C. Cedzich et al., Ann. Henri Poincaré, 19(2):325–383, 2018.