

Cylinders in canonical del Pezzo fibrations

埼玉大学大学院理工学研究科 理工学専攻数理電子情報コース

澤原 雅知 (Masatomo Sawahara)

概要

正規代数多様体 X の開集合 U に対し, ある代数多様体 Z とアフィン直線 \mathbb{A}^1 との直積と同型であるとき, U を X のシリンダーという. Dubouloz-Kishimoto によって, del Pezzo ファイブレーションの構造をもつ正規代数多様体に垂直シリンダーという特殊なシリンダーを含むための条件が解明されており, その考察は, ファイブレーションの生成ファイバーをみる事により, 非代数閉体上に定義された rank one の非特異 del Pezzo 曲面にシリンダーがいつ含むかを判定する事に帰着される. 本稿では, 非代数閉体上に定義された rank one の高々 Du Val 特異点をもつ del Pezzo 曲面に対しシリンダーを含むための条件を与え, 彼らの結果を底空間が高々標準特異点をもつ場合へ拡張した事を報告する.

1 導入

本稿では, k を標数 0 の体とし, \bar{k} を k の代数閉包とする. また, 特に断りのない限り, 全ての代数多様体の基礎体は k であるとする. 代数多様体 X の開集合 U に対し, 適当な代数多様体 Z が存在して $U \simeq \mathbb{A}_k^r \times Z$ をみたすとき, U を X の \mathbb{A}_k^r -シリンダーという. また, \mathbb{A}_k^1 -シリンダーの事を, 単にシリンダーという.

例 1.1. シリンダーの具体例を挙げる:

- (1) 射影空間 \mathbb{P}_k^n に含まれる超平面 H に対し, $\mathbb{P}_k^n \setminus H \simeq \mathbb{A}_k^n$ は \mathbb{P}_k^n の \mathbb{A}_k^n -シリンダーである.
- (2) 3次元アフィン空間 \mathbb{A}_k^3 の閉部分代数多様体 $X := (xy = z^2)$ と直線 $L := (x = z = 0)$ を考える. このとき, $L \subseteq X$ に注意すると, $X \setminus L \simeq \mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_{k,*}^1$ は X の \mathbb{A}_k^1 -シリンダーである. 但し, $\mathbb{A}_{k,*}^1$ はアフィン直線 \mathbb{A}_k^1 から 1 点を取り除いたものである. なお直観的には, X は円錐であり L はその母線である.

代数多様体 X を与えたとき, X はどのようなシリンダーを含むか? そもそも X はシリンダーを含んでいるのか? という自然な問いが生じる. 次の事実は, この問いを考察する 1 つのモチベーションであると言える:

定理 1.2 ([11, Theorem 3.1.9]). $k = \bar{k}$ とする. X を正規射影代数多様体とし, H を X 上の豊富な \mathbb{Q} -因子とする. このとき, 次の 2 つの主張は同値である:

- (1) X は H -偏極シリンダーを含む. ここで, H -偏極シリンダー U とは, X のシリンダーであり, 適当な有効 \mathbb{Q} -因子 D が存在して, $D \sim_{\mathbb{Q}} H$ かつ $U = X \setminus \text{Supp}(D)$ をみたす事をいう.
- (2) アフィン代数多様体 $\text{Spec} \left(\bigoplus_{i \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(iH)) \right)$ には有効 G_a -作用が存在する.

本稿では, 反標準因子が豊富である正規射影代数多様体を **Fano 多様体**といい, 2次元の Fano 多様体を **del Pezzo 曲面**という. そこで, どのような Fano 多様体 X が, $(-K_X)$ -偏極シリンダーを含むのかを考えよう. X が del Pezzo 曲面であるとき, 幾つかの結果が知られている:

定理 1.3 ([11, 12, 3]). $k = \bar{k}$ とする. S を非特異 del Pezzo 曲面とし, d を S の次数とする. 即ち, $d := (-K_S)^2 \in \{1, \dots, 9\}$. このとき, S が $(-K_S)$ -偏極シリンダーを含むための必要十分条件は, $d \geq 4$ となる事である.

定理 1.4 ([4]). $k = \bar{k}$ とする. S は高々 $Du\ Val$ 特異点をもつ $del\ Pezzo$ 曲面とし, d を S の次数とする. 即ち, $d := (-K_S)^2 \in \{1, \dots, 9\}$. このとき, S が $(-K_S)$ -偏極シリンダーを含まないための必要十分条件は, $d \leq 3$ であって更に次の条件をみたす事である:

- $d = 3$ のとき, S は非特異である;
- $d = 2$ のとき, S は高々 A_1 -型の $Du\ Val$ 特異点しかもたない;
- $d = 1$ のとき, S は高々 A_1, A_2, A_3, D_4 -型の $Du\ Val$ 特異点しかもたない.

注意 1.5. $k = \bar{k}$ とし, S を $del\ Pezzo$ 曲面とする. 上の 2 つの定理は, $(-K_S)$ -偏極シリンダーの存在条件に関するものであるが, $(-K_S)$ -偏極シリンダーとは限らないシリンダーの存在条件についても知られている. 即ち, S が非特異ならば常にシリンダーを含む事は容易に確かめる事ができ, S が高々 $Du\ Val$ 特異点をもつ場合にシリンダーを含むための条件は [1] によって解明されている.

例 1.6. \mathbb{P}_k^3 の次数 3 の非特異超曲面は次数 3 の非特異 $del\ Pezzo$ 曲面である事が知られている. 特に, $S := (x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0) \subseteq \mathbb{P}_k^3 = \text{Proj}(k[x, y, z, w])$ は, 定理 1.3 より $(-K_S)$ -偏極シリンダーを含まない. 更に定理 1.2 によって, $\hat{S} := \text{Spec}\left(\bigoplus_{i \geq 0} H^0(S, \mathcal{O}_S(-iK_S))\right) = (x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0) \subseteq \mathbb{A}_k^4 = \text{Spec}(k[x, y, z, w])$ には有効 G_a -作用が存在しない事が分かる. なお, \hat{S} には有効 G_a -作用が存在しない事を直接 (つまり可換環論的に) 示すのは難しいようである ([10] も参照の事).

本稿では深入りしないが, 3 次元及び 4 次元の特殊な Fano 多様体に対しても, 幾つか結果が知られている (例えば [2] をみよ).

しかし, 一般の正規射影代数多様体 X がどのような偏極シリンダーを含んでいるかを調べる事は, 一般には難しい問題である. そこで, X は森ファイバー空間の構造 $f: X \rightarrow Y$ をもつという特殊な状況下において, f に関する垂直シリンダーというシリンダーをいつ含むのかを考察してみる. 森ファイバー空間の構造をもつ事を仮定する動機については, ここでは割愛するが ([8] などを参照せよ), 垂直シリンダーとは次で定義されるように支配的射 $f: X \rightarrow Y$ に依存する特殊な X のシリンダーである:

定義 1.7 ([7]). $f: X \rightarrow Y$ を k 上に定義された正規代数多様体間の支配的射とする. $U \simeq \mathbb{A}_k^r \times Z$ を X の \mathbb{A}_k^r -シリンダーとする. このとき, ある射 $g: Z \rightarrow Y$ が存在して $f|_U = g \circ pr_Z$ が成立するとき, U を f に関する垂直 \mathbb{A}_k^r -シリンダーという. 但し, $pr_Z: U \simeq \mathbb{A}_k^r \times Z \rightarrow Z$ は自然な射影である.

垂直シリンダーを考察する意義は, 次の事実にある:

補題 1.8 ([7, Lemma 3]). $f: X \rightarrow Y$ を k 上に定義された正規代数多様体間の支配的射とする. X_η を f の生成ファイバーとする. 即ち, X_η は Y の生成点 η を f で引き戻したものである. X_η の基礎体は, Y の関数体 $k(Y)$ である事に注意する. このとき, f に関する垂直 \mathbb{A}_k^r -シリンダーが存在するための必要十分条件は, X_η が $\mathbb{A}_{k(Y)}^r$ -シリンダーを含む事である.

f に関する垂直シリンダーの存在条件の考察は, X が高次元であったとしても, 補題 1.8 によって低次元である X_η にシリンダーが含まれているかどうかの考察に帰着できる.

さて, 複素数体 \mathbb{C} 上に定義された正規射影代数多様体 X が森ファイバー空間 $f: X \rightarrow Y$ の構造をもつとする. このとき, f は支配的射であり, f の生成ファイバー X_η は rank one の Fano 多様体*1である. その際, X_η の基礎体 $\mathbb{C}(Y)$ は, 代数閉体とは限らない事に注意する*2. 従って, このとき X が f に関する垂直シリンダーをいつ含むかという問題は, 次の問題に帰着される:

*1 つまり, Fano 多様体であって, Picard 数 $\rho(V)$ が 1 という事である.

*2 $\dim Y \geq 1$ ならば, $\mathbb{C}(Y)$ は代数閉体にならない.

問題 1.9. 代数閉体とは限らない標数 0 の体 k 上に定義された *rank one* の *Fano* 多様体 V に対し、 V はいつシリンダーを含むか？

$\dim V = 1$ のときは、容易である。実際、 V が非特異ならば V が k -有理点を含むとき、 V が特異点をもつならばその特異点は 1 点でありしかもその特異点はカスプであるときである。

$\dim V = 2$ かつ V が非特異の場合は、次の結果が知られている：

定理 1.10 ([7, Theorem 1]). S を k 上に定義された *rank one* の非特異 *del Pezzo* 曲面とし、 d を S の次数とする。

- (1) S が \mathbb{A}_k^1 -シリンダーを含むための必要十分条件は、 $d \geq 5$ かつ V に k -有理点を含む事である。
- (2) S が \mathbb{A}_k^2 -シリンダーを含むための必要十分条件は、 $d \geq 8$ かつ V に k -有理点を含む事である。

注意 1.11. 定理 1.10 に関して幾つか注意を述べる：

- (1) 次数 7 の *rank one* の非特異 *del Pezzo* 曲面は存在しない。これは、次数 7 の非特異 *del Pezzo* 曲面は k 上に定義された 2 本の (-1) -曲線の非交和 E を常に含んでおり、 E を収縮する事によって \mathbb{P}_k^2 へブローダウンできるためである。従って、 $d \in \{1, \dots, 6, 8, 9\}$ である。
- (2) S は曲面であるので、 S の \mathbb{A}_k^2 -シリンダーとは、アフィン平面 \mathbb{A}_k^2 に他ならない。
- (3) $f : X \rightarrow Y$ を \mathbb{C} 上に定義された *del Pezzo* ファイブレーション (*i.e.*, 相対次数 2 の森ファイバー空間) とする。従って、 f の生成ファイバー X_η は *rank one* の非特異 *del Pezzo* 曲面である。 f の次数 (*i.e.*, X_η の次数) が 4 以下であるとすると、定理 1.10 より f に関する垂直シリンダーは存在しない。一方、次数が 4 以下であっても、底空間 X にシリンダー (特に 3 次元アフィン空間 $\mathbb{A}_\mathbb{C}^3$) を含むような *del Pezzo* ファイブレーション $f : X \rightarrow Y$ は存在する ([7, Theorem 2]).

本稿では、定理 1.10 での設定を S が高々 Du Val 特異点をもつ場合へ拡張する事を考える。即ち、次の問題を考える：

問題 1.12. S を k 上に定義された *rank one* の *Du Val del Pezzo* 曲面とすると、 S はいつシリンダーを含むか？

本稿の主結果は、問題 1.12 に対し完全な解答を与えたものである。しかし、得られた結果を述べるためには、Du Val 特異点に関する準備が必要であり、そのような準備を §2 で行う。また、本稿の主結果は §3 で述べる。

2 Du Val 特異点の表記

2.1 代数閉体上に定義された Du Val 特異点

V を \bar{k} 上に定義された代数曲面とし、 p を V 上の特異点とする。このとき、 p の極小特異点解消 $\sigma : \tilde{V} \rightarrow V$ に対し、 σ の例外集合 $E := \sigma^{-1}(p)$ の任意の既約成分が (-2) -曲線^{*3}であるときに、 p を **Du Val 特異点** という事にする。 E の既約成分を双対グラフを用いて表したとき、 A_n -型 ($n \geq 1$)、 D_n -型 ($n \geq 4$)、 E_n -型 ($n = 6, 7, 8$) のいずれかのルート系における Dynkin 図形に対応している事が知られている (例えば [16] などを見よ)。こうした背景から、例えば E の既約成分の双対グラフが A_n -型のルート系における Dynkin 図形に対応しているとき、Du Val 特異点 p を A_n -型特異点などという。最後に、Du Val 特異点は、有理二重特異点、2次元標準特異点、2次元有理 Gorenstein 特異点など、様々な同値な解釈が知られている事を述べておく。

^{*3} 即ち、射影直線と同型で自己交叉数 -2 の曲線の事である。

2.2 非代数閉体上に定義された Du Val 特異点

一般に、代数多様体が特異点を含むという概念は、基礎体が代数閉体である場合に定義される概念である事に注意しよう。そこで、代数閉体とは限らない体 k 上に定義された代数曲面 S に対し、 S の \bar{k} への係数拡大 $S_{\bar{k}} := S \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(\bar{k})$ が高々 Du Val 特異点をもつとき、 S は高々 Du Val 特異点をもつという事にする。また、(上記の意味で) 高々 Du Val 特異点をもつ del Pezzo 曲面の事を、単に **Du Val del Pezzo 曲面** という事にする。

非代数閉体 k 上に定義された代数多様体 X を取り扱う際、 X を直接扱うのは一般に厄介であるため、次のようなテクニックを取り入れる場合がある。即ち、まず X を k の代数閉包 \bar{k} へ係数拡大 $X_{\bar{k}} := X \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(\bar{k})$ を取る。この操作は、直観的には X を (局所的に) 定義する多項式の係数の入れ物 k を \bar{k} に拡大する操作と解釈できる。このとき、 $X_{\bar{k}}$ は \bar{k} 上に定義された代数多様体であるため、代数閉体上に定義された代数多様体の理論を援用する事ができる。また、 $X_{\bar{k}}$ には Galois 群 $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ が自然に作用している。このとき、 $X_{\bar{k}}$ の部分集合 Y に対して、 Y が k 上に定義されている事と $X_{\bar{k}}$ に作用している Galois 群に対し $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -不変である事は同値である事が知られている。従って、 $X_{\bar{k}}$ で調べた (一部の) 情報を $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -作用によって k 上に還元する事ができる。例えば文献 [17] などに、このようなテクニックについて説明がある。

以下では、非代数閉体 k 上に定義された代数曲面 V に対し、 k -有理点^{*4} p が $V_{\bar{k}}$ で Du Val 特異点であるようなものについて注意を述べる。 $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$ を p の k 上での極小特異点解消とし、 E を $\sigma_{\bar{k}}$ の例外曲線とすると、 $\tilde{V}_{\bar{k}}$ に自然に作用する $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -作用に関して E は $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -不変である。このとき、 E の各既約成分への $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -作用の振る舞いを観察する事により、非代数閉体上に定義された Du Val 特異点は代数閉体上に定義された Du Val 特異点の分類よりも更に詳細に特異点のタイプを区分できる：

定義 2.1. V を k 上に定義された代数曲面とし、 p を V 上の k -有理点とし $V_{\bar{k}}$ 上で Du Val 特異点であるとす。 $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$ を p の k 上での極小特異点解消とし、 E を $\sigma_{\bar{k}}$ の例外曲線とする。

- (1) p が $V_{\bar{k}}$ の A_1 -型特異点であるとする：
 - $E(k) \neq \emptyset$ であるとき、 $p \in V$ を A_1^+ -型特異点という事にする。
 - $E(k) = \emptyset$ であるとき、 $p \in V$ を A_1^{++} -型特異点という事にする。
- (2) $n \geq 2$ とし、 p が $V_{\bar{k}}$ の A_n -型特異点であるとする：
 - $\rho_k(\tilde{V}) - \rho_k(V) = n$ であるとき、 $p \in V$ を A_n^- -型特異点という事にする。
 - $\rho_k(\tilde{V}) - \rho_k(V) < n$ かつ $E(k) \neq \emptyset$ であるとき、 $p \in V$ を A_n^+ -型特異点という事にする。
 - $\rho_k(\tilde{V}) - \rho_k(V) < n$ かつ $E(k) = \emptyset$ であるとき、 $p \in V$ を A_n^{++} -型特異点という事にする。
- (3) $n \geq 4$ とし、 p が $V_{\bar{k}}$ の D_n -型特異点であるとする：
 - $\rho_k(\tilde{V}) - \rho_k(V) = n$ であるとき、 $p \in V$ を D_n^- -型特異点という事にする。
 - $\rho_k(\tilde{V}) - \rho_k(V) < n$ であるとき、 $p \in V$ を D_n^+ -型特異点という事にする。
- (4) p が $V_{\bar{k}}$ の E_6 -型特異点であるとする：
 - $\rho_k(\tilde{V}) - \rho_k(V) = n$ であるとき、 $p \in V$ を E_6^- -型特異点という事にする。
 - $\rho_k(\tilde{V}) - \rho_k(V) < n$ であるとき、 $p \in V$ を E_6^+ -型特異点という事にする。

注意 2.2. 定義 2.1 について、幾つか注意を述べる：

- (1) $k = \mathbb{R}$ のとき、これらの定義は実 Du Val 特異点の定義の言い換えである (実 Du Val 特異点については [15] をみよ)。但し例外的に、実 Du Val 特異点の定義では、 A_1^- -特異点も定義されている (A_1^+ -型特異点のみ)。

^{*4} k 上に定義された代数多様体 V 上の点 x が k -有理点であるとは、 x の剰余体 $k(x)$ が k に一致する事が定義であるが、 $V_{\bar{k}}$ に自然に作用する Galois 群 $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ に関して $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -不変であるような $V_{\bar{k}}$ 上の閉点と解釈しても良い。

異点と同一視される) が, 本稿では (主結果の述べる関係上) A_1^- -特異点は定義せず, A_1^- -特異点に相当するものは全て A_1^+ -型特異点として扱っている事に注意する.

- (2) $\rho_k(\tilde{V}) - \rho_k(V) = n$ (*resp.* $\rho_k(\tilde{V}) - \rho_k(V) < n$) は, E への Galois 群 $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ の作用に対し, 任意の E の既約成分が $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -不変である (*resp.* $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -不変でないような E の既約成分が存在する) 事を意味する.
- (3) n を正整数とし, p を $V_{\bar{k}}$ 上の k -有理な A_n -型特異点とすると, p の極小特異点解消による例外因子 E は, n 本の (-2) -曲線の鎖状である. 即ち, n が偶数ならば, 鎖状の中心にある 2 本の (-2) -曲線の交点は k -有理点である. 従って, A_n^{++} -型特異点という概念は, n が奇数の場合にのみ定義できる.
- (4) p が $V_{\bar{k}}$ 上の k -有理な E_7 または E_8 -型特異点であるとき, 常に $\rho_k(\tilde{V}) - \rho_k(V) = n$ をみたしている.

2.3 Du Val del Pezzo 曲面の分類と注意

一般に, 標数 0 の代数閉体上に定義された Du Val del Pezzo 曲面は, 極小特異点解消によって得られる非特異 weak del Pezzo 曲面と 1:1 の対応があり, また非特異 weak del Pezzo 曲面は次数と自己交叉数が負の曲線の構造に関して分類されている事が知られている ([9, 6] など参照せよ). 特に, V を \bar{k} 上に定義された次数 2 (*resp.* 次数 1) の Du Val del Pezzo 曲面とし, A_5 -型特異点 (*resp.* A_7 -型特異点) p を含んでいるとする. このとき, V の極小特異点解消 $\sigma: \tilde{V} \rightarrow V$ に対し, $E := \sigma^{-1}(p)$ の双対グラフの中心の頂点に対応する (-2) -曲線 E_0 に関して, 主張「 E_0 と交わる (-1) -曲線が存在する。」を考える. この主張が成立するとき, p を V の $(A_5)'$ -型特異点 (*resp.* $(A_7)'$ -型特異点) と書く事にし, この主張が成立しないとき, p を V の $(A_5)''$ -型特異点 (*resp.* $(A_7)''$ -型特異点) と書く事にする*5. なお, この表記は [4] を参考にした.

3 主結果

次が, 本稿の主結果である:

定理 3.1 ([20]). S を代数閉体とは限らない標数 0 の体 k 上に定義された rank one の Du Val del Pezzo 曲面とし, d を S の次数とする.

- (1) $d \geq 5$ ならば, S はシリンダーを含む.
- (2) $d = 3, 4$ のとき, S がシリンダーを含むための必要十分条件は, S に A_1^{++} -型特異点ではない k -有理な特異点をもつ事である.
- (3) $d = 1, 2$ のとき:
 - (i) $d = 2$ (*resp.* $d = 1$) かつ $S_{\bar{k}}$ に A_6, A_7, D_n, E_n -型特異点 (*resp.* $A_8, D_6, D_7, D_8, E_7, E_8$ -型特異点) をもつならば, S はシリンダーを含む.
 - (ii) $d = 2$ (*resp.* $d = 1$) かつ $S_{\bar{k}}$ に $(A_5)''$ -型特異点 (*resp.* $(A_7)''$ -型特異点) をもつとき*6, S はシリンダーを含むための必要十分条件はその特異点が S 上で (A_5^{++}) -型特異点 (*resp.* (A_7^{++}) -型特異点) でない事である.
 - (iii) $d = 2$ (*resp.* $d = 1$) かつ $S_{\bar{k}}$ が高々 A_1 -型特異点 (*resp.* 高々 A_1, A_2, A_3, D_4 -型特異点) しかもたないならば, S はシリンダーを含まない.
 - (iv) $S_{\bar{k}}$ は上の (i)-(iii) のいずれの仮定もみたしていないとき, S にシリンダーを含むための必要十分条件は S が A_n^-, D_n^-, E_n^- -型のいずれかの特異点をもつ事である.

*5 非自明な事実だが, 上記の主張が成立するならば, E_0 と交わる (-1) -曲線は一意であり, 上記の主張が成立しないならば E_0 と交わる 2 本の (-2) -曲線と交わる (-1) -曲線がそれぞれ一意的に存在する.

*6 この $S_{\bar{k}}$ 上の特異点は, 明らかに k -有理点である事が分かる.

\mathbb{C} 上に定義された支配的な射影的射 $f: X \rightarrow Y$ で、全空間 X が高々標準特異点しかもたず、 f の生成ファイバー X_η が rank one の del Pezzo 曲面であるとき、 f を **canonical del Pezzo** ファイブレーションという事にすれば*7, X_η は定理 3.1 の条件をみたす曲面になるため、canonical del Pezzo ファイブレーションに関する垂直シリンダーの存在条件は X_η の次数と特異点をみる事により判別する事が可能である。

なお、今回の報告では深入りしない予定であるが、シリンダーの条件を強めて \mathbb{A}_k^2 -シリンダー (i.e., アフィン平面 \mathbb{A}_k^2) を含むための条件についても、次のように得られている：

定理 3.2. S を定理 3.1 のものとしたとき、 S が \mathbb{A}_k^2 -シリンダーを含むための必要十分条件は、 $d \geq 5$ または $(d, \text{singularities}) = (4, D_5), (4, D_4), (4, A_2 + 2A_1), (4, A_2), (3, E_6), (3, D_4), (2, E_7), (2, E_6), (2, A_6), (1, E_8)$ のいずれかとなる事である。

注意 3.3. 定理 3.2 において、実は、 S_k のもつ特異点を高々対数的標準特異点まで悪くしても類似の結果が得られている。関連した先行研究については、[13, 14] を参照されたい。

4 具体例

定理 3.1 に関する具体例を幾つか紹介する：

例 4.1. $f: X \rightarrow Y$ を次数 3 または 4 の *canonical del Pezzo fibration* とし、 X_η を f の生成ファイバーとし、 Y は曲線であると仮定する。このとき、定理 3.1(2) によれば、 f に関する垂直シリンダーが存在するための必要十分条件は、 X_η に A_1^{++} -型でない $\mathbb{C}(Y)$ -有理な特異点を含む事であった。そこで、 X_η には $X_{\eta, \overline{\mathbb{C}(Y)}}$ 上で A_1 -型であるような $\mathbb{C}(Y)$ -有理な特異点 p を含むと仮定する。すると、 p の極小特異点解消による例外集合 E は、 $\mathbb{C}(Y)$ -有理点をもつ。これは、 Y が曲線であるため、Tsen の定理によって、 $\mathbb{C}(Y)$ が C_1 -体である事より従う。従って、 X_η は A_1^{++} -型特異点を決してもたない事から、 f に関する垂直シリンダーが存在するための必要十分条件は、 X_η が $\mathbb{C}(Y)$ -有理な特異点を含む事である。

例 4.2. 基礎体 k が C_1 -体でないとき、次数 3 または 4 の *rank one* の *Du Val del Pezzo* 曲面 S に対し、 S は k -有理な特異点を含むがシリンダーを含まないケースが存在する。その具体例を紹介する。 $k = \mathbb{R}$ とし、4 次元射影空間 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ の完全交叉：

$$S := (x^2 + y^2 + zw = 0, zw + wv + vz = 0) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4 = \text{Proj}(\mathbb{R}[x, y, z, w, v])$$

を考える。 S は次数 4 の *Du Val del Pezzo* 曲面である。更に簡単な計算によって、 $S_{\mathbb{C}}$ は、点 $[1: \pm\sqrt{-1}: 0: 0: 0]$ でそれぞれ A_1 -型特異点 p_{\pm} を、点 $[0: 0: 1: 0: 0]$ で A_1 -型特異点 p をもつ事が確かめられる。特に、2 点 $p_+, p_- \in S_{\mathbb{C}}$ は *Galois* 群 $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ の作用によって互いに移り合う事に注意すると、 S は *rank one* であり、 \mathbb{R} -有理な特異点 p をもつ事が確かめられる。このとき、 $p \in S_{\mathbb{C}}$ の極小特異点解消によって得られる例外曲線は、局所的にパラメーター (s, t) を用いて：

$$(s^2 + t^2 + 1 = 0) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 = \text{Spec}(\mathbb{C}[s, t])$$

と表される。従って、 p は S 上で A_1^{++} -型特異点であるため、定理 3.1(2) によって S はシリンダーを含まない。

例 4.3. 最後に、*canonical del Pezzo* ファイブレーションの非自明な具体例を紹介する。 $k = \mathbb{C}(t)$ とし、

*7 ここでいう canonical del Pezzo ファイブレーションに対し、然るべき条件を課す事によって、高々標準特異点をもつ相対次数 2 の森ファイバー空間になる。

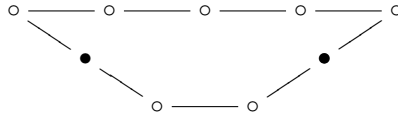
$(\mathcal{O}, t\mathcal{O})$ を $\mathbb{C}(t)$ の離散付値環とし*8, \mathbb{C} 上に定義された 3 次元代数多様体 X_n を次のように定める:

$$X_n := (t^n w^2 + x^2 y^2 + yz^3 = 0) \subseteq \mathbb{P}(1, 1, 1, 2) \times \text{Spec}(\mathcal{O})$$

但し, n は整数であり, $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2) = \text{Proj}(\mathbb{C}[x, y, z, w])$ である*9. このとき, X_n を \mathcal{O} -スキームとみなす事で, 構造射 $f_n: X_n \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O})$ が定まる. $\text{Spec}(\mathcal{O})$ の生成点を η とすれば, f_n の生成ファイバー $X_{n,\eta}$ は次のように表せる:

$$X_{n,\eta} := (t^n w^2 + x^2 y^2 + yz^3 = 0) \subseteq \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$$

但し, $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2) = \text{Proj}(\mathbb{C}(t)[x, y, z, w])$ である. $S_n := X_{n,\eta}$ とおく事にすれば, 簡単な計算によって, $S_{n,\bar{\mathbb{C}}}$ は, 点 $[1:0:0:0]$ で A_5 -型特異点 p_5 を*10, 点 $[0:0:1:0]$ で A_2 -型特異点 p_2 をもつ事が確かめられる. 従って, S_n は次数 2 の rank one の Du Val del Pezzo 曲面である事が分かり, 特に f_n は次数 2 の canonical del Pezzo ファイブレーションである. 更に, $\sigma_n: \tilde{S}_n \rightarrow S_n$ を極小特異点解消とすれば, $\tilde{S}_{n,\overline{\mathbb{C}(t)}}$ には 2 本の (-1) -曲線を含み, これらの $\text{Gal}(\overline{\mathbb{C}(t)}/\mathbb{C}(t))$ -軌道は共通であり*11, 次のような \tilde{S}_n に含まれる曲線の和集合に対応する双対グラフが得られる:



ここで, \circ は (-2) -曲線を意味し, \bullet は (-1) -曲線を意味する. 従って, 定理 3.1(3)(iv) より, S_n がシリンダーを含むために必要十分条件は, p_2 が S_n 上で A_2^- -型特異点である事である. この条件をより精密に考察する. p_2 の極小特異点解消によって得られる例外集合は, 局所的にパラメーター (u, v) を用いて:

$$(t^n u^2 + v^2 = 0) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}(t)}^2 = \text{Spec}(\mathbb{C}(t)[u, v])$$

と表される. 従って, p_2 が S_n 上で A_2^- -型特異点であるための必要十分条件は, 多項式 $t^n u^2 + v^2$ が $\mathbb{C}(t)[u, v]$ 上で既約である事であり, 更にそれは n が偶数である事と同値である. 以上によって, f_n に関する垂直シリンダーが存在するための必要十分条件は, n が偶数である事と結論付けられる.

参考文献

- [1] G. Belousov, *Cylinders in del Pezzo surfaces with Du Val singularities*, Bull. Korean Math. Soc. **54** (2017), 1655–1667.
- [2] I. Cheltsov, J. Park, Y. Prokhorov, M. Zaidenberg, *Cylinders in Fano varieties*, preprint, arXiv:2007.14207, 2020.
- [3] I. Cheltsov, J. Park and J. Won, *Affine cones over smooth cubic surfaces*, J. Eur. Math. Soc. **18** (2016), 1537–1564.
- [4] I. Cheltsov, J. Park and J. Won, *Cylinders in singular del Pezzo surfaces*, Compos. Math. **152** (2016), 1198–1224.
- [5] I. V. Dolgachev, *Weighted projective varieties*, In: *Group Actions and Vector Fields*, 34–71, Lecture Notes in Math. **956**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

*8 ここで, $t\mathcal{O}$ は \mathcal{O} の唯一の極大イデアルである.

*9 ここで, $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ は重み付き射影空間という射影代数多様体である. 詳細は, 例えば [5] を参照せよ.

*10 この p_5 は, $(A_5)'$ -型特異点である.

*11 より正確には, これら 2 本の (-1) -曲線は, それぞれ $\mathbb{C}(t)$ 上に定義されている, または, Galois 群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{C}(t)}/\mathbb{C}(t))$ -作用によって互いに移り合う, のいずれかが成立している.

- [6] I. V. Dolgachev, *Classical Algebraic Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
- [7] A. Dubouloz and T. Kishimoto, *Cylinders in del Pezzo fibrations*, Israel J. Math. **225** (2018), 797–815.
- [8] A. Dubouloz and T. Kishimoto, *Deformations of \mathbb{A}^1 -cylindrical varieties*, Math. Ann. **373** (2019), 1135–1149.
- [9] P. Du Val, *On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction (part I–III)*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **30** (1934), 453–459, 460–465, 483–491.
- [10] H. Flenner and M. Zaidenberg, *Rational curves and rational singularities*, Math. Z., **244** (2003), 549–575.
- [11] T. Kishimoto, Y. Prokhorov and M. Zaidenberg, *Group actions on affine cones*, In: *Affine Algebraic Geometry*, 123–163, CRM Proc. Lecture Notes **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
- [12] T. Kishimoto, Y. Prokhorov and M. Zaidenberg, *Unipotent group actions on del Pezzo cones*, Algebr. Geom. **1** (2014), 46–56.
- [13] H. Kojima, *Minimal singular compactifications of the affine plane*, Nihonkai Math. J. **12** (2001), 165–195.
- [14] H. Kojima and T. Takahashi, *Notes on minimal compactifications of the affine plane*, Ann. Mat. Pura Appl. **188** (2009), 153–169.
- [15] J. Kollár, *Real algebraic threefolds III. Conic bundles*, J. Math. Sci. **94** (1999), 996–1020.
- [16] J. Kollár and S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Math. **134**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [17] J. Kollár, K. E. Smith and A. Corti, *Rational and Nearly Rational Varieties*, Cambridge Studies in Advanced Math. **92**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [18] M. Miyanishi and D. -Q. Zhang, *Gorenstein log del Pezzo surfaces of rank one*, J. Algebra **118** (1988), 63–84.
- [19] M. Sawahara, *Cylinders in weak del Pezzo fibrations*, preprint, arXiv:1912.09016, 2019.
- [20] M. Sawahara, *Cylinders in canonical del Pezzo fibrations*, preprint, arXiv:2012.10062, 2020.