正則グラフの内周と隣接行列の localized な固有ベクトル

熊本大学 大学院先端科学研究部 (工学系)・日本学術振興会特別研究員 PD
佐竹 翔平 (Shohei SATAKE)
shohei-satake@kumamoto-u.ac.jp

概要

近年, スペクトラルグラフ理論では, 隣接行列の固有ベクトルからグラフの性質に迫る研究が盛んに行われている. Ganguly-Srivastava (2019) は, localized な固有ベクトルの情報から正則グラフの内周の上界を示し, その最適性も示した. Alon-Ganguly-Srivastava (2020) は, 全ての奇素数 d に対して, Ganguly らの上界の最適性を示す $(d+1)$-正則グラフを構成し, また, それらがエクスパンダーグラフであることも示した. 本稿では, Alon らの構成を一般の次数に拡張する. ここでは, prime gap に関する結果が重要な役割を果たす.

1 導入

スペクトラルグラフ理論の主な目的の1つは, グラフの様々な性質をそのグラフの隣接行列のスペクトラムから解明していくことにある. 本稿では, 簡単のため, 多重辺やループを許さない単純 (無向) グラフを考える. なお, n 頂点グラフ G に対し, その頂点集合と辺集合をそれぞれ $V(G)$, $E(G)$ と表す. グラフ G の**隣接行列** $A(G)$ は, 各行各列が G の頂点でラベル付けされた n 次 0-1 正方行列であり, その (u,v)-成分は G において 2 頂点 u, v が隣接する場合にのみ 1 であるとする. 本稿では, ノルムが 1 であるような $A(G)$ の固有ベクトルを考える. また, G の**内周**を G 内の最短閉路の長さと定義し, $\mathrm{girth}(G)$ と表す. 内周は直観的にはグラフの「疎さ」を示す量ととらえられ, 彩色数との関連性や Ramsey 数, Turan 数の評価などのグラフ理論的問題において長く研究されてきたのみならず, Hash 関数の構成とその性能保証などの暗号理論の研究などにおいても重要な量になる. 以下では, グラフの中でも各頂点に一定個数の辺が接続する**正則グラフ**のクラスに着目する. 特に, 整数 $d \geq 0$ に対して, 各頂点にちょうど $(d+1)$ 本の辺が接続する正則グラフを $(d+1)$**-正則グラフ**とよぶ.

Brooks-Lindenstrauss [2] は, 整数 $d \geq 2$ と $(d+1)$-正則グラフ G に対して, $A(G)$ の任意の固有ベクトル $\mathbf{v} = (v_x)_{x\in V(G)}$, 任意の実数 $\varepsilon \in (0,1)$, さらに $||\mathbf{v}_S||_2^2 := \sum_{x\in S} v_x^2 \geq \varepsilon$ なる任意の $S \subset V(G)$ に対して, 以下の不等式が成り立つことを示した.

$$|S| \geq \Omega_d(\varepsilon^2 d^{2^{-7}\varepsilon^2 \mathrm{girth}(G)}) \qquad (|V(G)| \to \infty). \tag{1}$$

ここで, $A(G)$ の固有ベクトル $\mathbf{v} = (v_x)_{x\in V(G)}$ が, ある k-点部分集合 $S \subset V(G)$ に対して $||\mathbf{v}_S||_2^2 \geq \varepsilon$ を満たすとき, 固有ベクトル $\mathbf{v}$ は (k,ε)-*localized* であるという. したがって, Brooks-Lindenstrauss の結果を言い換えると, もし $A(G)$ が (k,ε)-localized な固有ベクトルをもてば, $k \geq \Omega_d(\varepsilon^2 d^{2^{-7}\varepsilon^2 \mathrm{girth}(G)})$ が成り立つ, ということになる. ここで重要なことは, 隣接行列の固有ベク

トルの情報から, グラフの幾何学的な情報である内周の上界式が得られるという点である.

その後 Ganguly-Srivastava [4] は. 同様の仮定の下で以下の不等式を示し, (1) 式を改善した.

$$|S| \geq \frac{\varepsilon d^{(\frac{\varepsilon}{4}\cdot \mathrm{girth}(G))}}{2d^2}. \tag{2}$$

さらに, 任意の整数 $d \geq 2$ と任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して, Ganguly-Srivastava [4] は, 無限個の正の整数 m に対して, ある $(d+1)$-正則グラフ G_m が存在し, $\mathrm{girth}(G_m) \geq (1/8)\log_d(m)$ かつ $A(G_m)$ が $k = O(d^{4\varepsilon\cdot \mathrm{girth}(G_m)})$ $(m \to \infty)$ なる (k, ε)-localized な固有ベクトルを持つことを示した. したがって, (2) 式は概ね最善であることが示される.

上述の Ganguly-Srivastava の $(d+1)$-正則グラフの存在証明は確率的手法に基づく非構成的な証明であるのに対し, Alon-Ganguly-Srivastava [1] は以下の定理を, グラフを明示的に構成することで証明した.

定理 1（[1]） 任意の奇素数 d, 任意の実数 $\varepsilon \in (0,1)$, そして任意の実数 $\alpha \in (0, 1/6)$ に対し, 無限個の正の整数 m に対して, ある $(d+1)$-正則グラフ G_m が存在し, 以下が成り立つ.

1. $\mathrm{girth}(G_m) \geq 2\alpha \log_{2d-1}(m) \geq 2\alpha\log_d(m)\cdot(1 - \frac{\log 2}{\log(2d-1)})$;
2. 隣接行列 $A(G_m)$ は $\lfloor \alpha \log_d(m) \rfloor$ 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\lfloor \alpha\log_d(m)\rfloor}$ をもち, 各々の固有値は $k = O(m^\alpha)$ $(m \to \infty)$ なる (k, ε)-localized な固有ベクトルをもつ.

さらに, 特筆すべきことに, 定理 1 において明示的に構成された $(d+1)$-正則グラフに対して, その隣接行列の (絶対値の意味で) 2 番目に大きな固有値 (**第 2 固有値**) は高々 $\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{d} \approx 2.121\sqrt{d}$ であり, ほぼ最適な *spectral gap* をもつ. すなわち, これらのグラフはほぼ最適な**エクスパンダーグラフ**となる (詳しくは, [3], [5] などを参照されたい).

2 主結果

本稿では, 定理 1 の一般の次数への拡張を考える. 以下の定理は, 任意の (奇素数とは限らない) 整数 $d \geq 29$ に対して, $(d+1)$-正則グラフに対する (2) 式が概ね最適であることを示す $(d+1)$-正則グラフを, 整数論における prime gap に関する結果を用いた明示的な構成によって与える.

定理 2 任意の整数 $d \geq 29$, 任意の実数 $\varepsilon \in (0,1)$, そして任意の実数 $\alpha \in (0, 0.163...)$ に対し, 無限個の正の整数 m に対して, ある $(d+1)$-正則グラフ G_m が存在し, 定理 1 と同じ条件が成立する.

ここで定理 1 と定理 2 を比べると, 定理 2 において, α は 0.163... 未満である必要があるため, 内周の評価式が少し弱くなっているものの, 依然として Ganguly-Srivastava [4] が非明示的に存在性を示したグラフの内周の下界式より sharp である.

次の定理では, 定理 1 における第 2 固有値の評価を保持するように, 定理 1 をより一般の次数に拡張している.

定理 3 整数 $d \geq 2$ は, $p - t < (\frac{5}{2\sqrt{6}} - 1)\sqrt{t} \approx 0.02\sqrt{t}$ なるある素数 p と正の整数 $t < p$ に対して, $d \in [t, p]$ を満たすとする. このとき, 任意の実数 $\varepsilon \in (0,1)$ と任意の実数 $\alpha \in (0, 1/6)$ に対して, 無限

個の正の整数 m に対しある $(d+1)$-正則グラフ G_m が存在し, 定理 1 と同じ条件が成立する. さらに $A(G_m)$ の第 2 固有値は, 高々 $\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{d} \approx 2.121\sqrt{d}$ である.

Prime gap に関する整数論的な結果を用いると, 定理 3 はほとんどすべての正の整数 d をカバーした結果を与えていることが示される.

謝辞

本研究は科学研究費補助金 (特別研究員奨励費 20J00469) による支援を受けております.

参考文献

[1] N. Alon, S. Ganguly, N. Srivastava, High-girth near-Ramanujan graphs with localized eigenvectors, To appear in Israel J. Math, arXiv:1908.03694.

[2] S. Brooks, E. Lindenstrauss, Non-localization of eigenfunctions on large regular graphs, *Israel J. Math.*, **193** (2013), 1–14.

[3] G. Davidoff, P. Sarnak, A. Valette, Elementary Number Theory, Group theory, and Ramanujan Graphs, Cambridge University Press, 2003.

[4] S. Ganguly, N. Srivastava, On non-localization of eigenvectors of high girth graphs, *Int. Math. Res. Not.*, available online.

[5] M. R. Murty, Ramanujan graphs, *J. Ramanujan Math. Soc.*, **18** (2001), 1–20.

[6] S. Satake, On high-girth expander graphs with localized eigenvectors, preprint.