カイラル代数の具体的なコンパクト化の例と応用の可能性について

開智学園
桜井真 (Makoto SAKURAI)

概要

Beilinson-Drinfeld のカイラル代数理論は、その AMS からの出版が 2004 年にあるが、難解な内容のために発展が一部ストップしている。他方で、Beem, Rastelli らにより、物理サイドから VOA というよりカイラル代数理論の進展が、4D/2D 対応として研究されている。本研究では、桜井がデルペツォ曲面にコンパクト化したカイラル・ドラーム理論の量子アノマリーとしての解釈とともに、インスタントンなどの非摂動効果への拡張の可能性を議論したい。

1 導入・物理的背景

トポロジカル・ヴァーテックスに起源をもつ、open (relative) / closed Gromov-Witten 不変量の研究は、ミラー対称性予想の中心に存在する。しかしながら、数学者の定義は理論物理学者の研究とは一応は距離を置きつつ発展している。ミラー対称性予想が T-dual というトーラスのモジュライを入れ替える操作と深い関係をもつと予想されるのとは違い、もう一つの重要な「弦理論の双対性（予想)」である S-duality はインスタントンのモジュライ空間のオイラー数や保型形式との関係からも調べられてきた。この「S 双対性」は、本来的には T 双対性よりも重要なもので、位相的弦理論ではなく物理的弦理論の強弱弦理論の結合定数 g_s とディラトン場と呼ばれる仮説上の場の理論の拡張が背景としてある。ディラトン場は数学的にはあまり定義されていないようだ。本来的な意味の「S 双対性」は、このディラトン場を介した強弱弦理論の双対性のことで、その定義すら正確にはされていないようにみえる。「S 双対性予想が解けた」と主張するものは、私の見る限りでは「ゲージ理論の S 双対性」が解けたと主張しているもので、弦理論に関するものではないように見える。

物理的弦理論の経路積分を数学的に真正面から「定義」する試みはないわけではないが、残念ながら通常の意味の経路積分ですらその一般的な測度の存在が疑われる現在では、「位相的ツイスト」（後述）を課した位相的シグマモデルの周辺でしか満足な結果が得られていない。前述のトポロジカル・ヴァーテックス [AKMV] は、漸近級数としての意味での「散乱振幅」と呼ばれる場の理論の散乱問題としての観測可能量の類似がファインマンダイアグラムに類似するトーリック・カラビヤウ複素 3 次元多様体を「標的空間」としてもつ場合に、「Large N」双対性と呼ばれる、通常の摂動展開とは違う「非摂動効果」として持つとされている。

これらの物理的描像を尊重しつつ、数学の中には物理に追随する形でイデアル層の理論を追ったものもいた。しかし、私の知る限りでは Beilinson-Drinfeld 理論 [BD] は共形場理論とその頂点代数を

起源としつつも、一応は純粋数学として D 加群や高次の圏論の定式化にその大部分を求めている。桜井自身はトポロジカル・ヴァーテックスとの関係も調べたことがあったが、博士論文では絞って複素代数曲面を標的空間とするカイラル・ドラーム複体を調べた。当初はトーリック図を補助的な道具として必要としていたが、現在は複素射影平面の 6 次のブローアップまで調べられるように拡張した。

他方で、数学の発展を多少無視する形で AGT 対応予想 [AGT][MT] やその共形場理論からの導出 [AM][BLLPRR][BPRR] も数学者の協力を一部借りつつ進んだ。残念ながら著者はその発展のすべてを追っているわけではないが、カイラル・ドラーム複体との関係も [BPRR] では意識されていた。他方で、カイラル・ドラーム複体の 3 章にあたるカイラルドラーム複体ではなく、4 章にあたるカイラル・ホモロジーとの関係も因子化代数（というカイラル代数と圏同値な代数系）とその位相的場の理論との関係 [CG][GH] から模索されている。しかし、桜井の知る限りでは因子化代数の周辺では数学の高次の圏論の色が強すぎて、物理的応用・数学的定理はあまり知られていないようである。物理学者からの解釈が求められているといるのが現在の状態、とも受け止められる。

Acknowledgement

清水勇二先生には、忍耐強い激励と学問的な示唆をいただいた。アレクサンダー・ベイリンソン先生には、学問的な教訓と研究滞在費のサポートをいただいた。寺杣友秀先生には、このテーマに至る紆余曲折を受け止めていただいた。

2 「コンパクト化を巡って」（ウーレンベックとインスタントンのモジュライ空間）

「コンパクト化」という言葉は誤解を呼びやすい用語である。残念ながら、超弦理論なりミラー対称性で使われている「コンパクト化」は、トポロジーで言うところの（アレクサンドロフの）「1 点コンパクト化」とは異なる。本節では古すぎて述べないが、この「コンパクト化」と関連して、4 次元の多様体とゲージ理論の関係が Donaldson 理論とモース理論を中心にして調べられたことがあった。これは深谷先生の本にもあるとおりだが、サイバーグ・ウィッテン理論のモノポールのモジュライ空間につながる流れである。バブルによる議論は、「ウーレンベックのコンパクト化」としてインスタントンのモジュライ空間（反自己双対方程式の解接続空間をゲージ同値で割った空間）の解析に資するものである。

本論説で述べる「コンパクト化」は、以上のトポロジーの意味でのコンパクト化よりかは、超弦理論の意味に近い。すなわち、リーマン面の埋め込み全体を考える際の、標的空間（終域）の指定である。トポロジカル・ヴァーテックスの理論では、トーリック作用をもつ 3 次元カラビ・ヤウ多様体を（ウィッテンの位相的シグマモデルの）「標的空間」に考えるのだが、これは通常コンパクトにはなっていないので、用語法の乱れがある。

3 カイラル代数の暫定的定義

（コステロ・グウィリアムの第二巻の定義）

Beilinson-Drinfeld のカイラル代数とは、コチェイン複体 A であって、それは $\mathbb{C}[[\hbar]]$ 上平坦であり、可換な積とコホモロジー次数 1 のポアソン積を備えたものであり、以下の恒等式を満たすものである。

$$d(a \cdot b) = a \cdot (db) \pm (da) \cdot b + \hbar\{a, b\}$$

nLab には、これと等価であるが、次数付けについてより丁寧な定義が載っている。

Definition 2.1. A quantum BV complex or Beilinson-Drinfeld algebra is

1. a differential graded-commutative algebra A (whose differential we denote by $\triangle$) over the ring $R[[\hbar]]$ of formal power series over the real numbers in a formal constant $\hbar$,

2. equipped with a Poisson bracket $\{-,-\}$ of the same degree as the differential

such that

the following equation holds for all elements $a, b \in A$ of homogeneous degree $|a|, |b| \in \mathbb{Z}$

$$\triangle(a \cdot b) = (\triangle a) \cdot b + (-1)^{|a|} a \triangle b + \hbar\{a, b\}$$

カイラル・ドラーム複体がこの定義から従うかや、コステロ・グウィリアムではなく、Beilinson-Drinfeld の意味での因子化代数との関係も議論しなければならないが、この論説ではこの定義との関係は省略する。一言だけ付記すると、古典極限のポアソン括弧（ハミルトン形式の解析力学）との関係が背後にはあると言うことである。

4　カイラル・ドラーム複体と超対称性代数

カイラル・ドラーム複体は、頂点代数の文脈から出てきたので、物理の文脈から全く独立というわけではないのだが、Malikov-Schechtman-Vaintrob*1の原著論文では一応は物理の定義なりノーテーションとは*2独立に書かれている。桜井の論文 [S] では、Kapustin らの先行論文はいくつかあったものの、説明がはっきりしているとは言えなかった、超対称性代数の「Topological half-twist」について、Lie 環の生成元と関係式（構造定数）との関係を、その OPE（Operator-Product-Expansion：頂点作用素積展開）との解釈を含めて述べた。これは、代数的場の理論では局所性 (locality) と呼ばれているものである。

通常のド・ラーム複体は、位相的な特異ホモロジー理論と微分形式のド・ラーム複体の関係を述べたものである。カイラル・ドラーム複体にも de Rham 関手や位相幾何学的な抽象的な理論が存在するが、筆者の実力ではその内容を充分に説明することが出来ない。Beilinson-Drinfeld[BD] の 3 章のカイラル・ドラーム複体ではなく、4 章のカイラル・ホモロジーはまだ充分な理解がされていない。

*1 [S] の参考文献表を参照

*2 座標依存性があることは、Beilinson-Drinfeld[BD] でもあるように、Kapranov-Vasserot でも指摘されている。

解析的なカイラルホモロジーと呼ぶべきものが存在して、コステロ・グウィリアムの位相的なカイラルホモロジー（因子化ホモロジー）と一致する、という類いの主張が期待されるが、桜井の知る限りそのような文献はまだ存在しないようだ。

以下、本論文 [S] にのっとって、「曲がった空間」の”curved $\beta\gamma$ model”の定義を述べる。いくつか、物理の流儀（ノーテーション）に即した改変を行った。いちおうは、Mathematica の機械的な計算でトーリックな曲面については２次のチャーンキャラクターが「アノマリー（２形式)」として計算できるようにしたので、これについても説明を加えたい。

超対称性については、Deligne らによる IAS の講究録など、数学者に理解可能な形の文献がないわけではないが、物理学者の生来の定義とは同じものが少ない。近いものとして、ホロノミー群の退化の度合いと超対称性の大きさを比較する研究があったが、Joyce らのこれらの研究は長い割に使い勝手がよくないので、説明を割愛する。ここでは、次数付き微分リー代数 (dgla) としての側面のみを報告する。$\mathcal{N}=1, \mathcal{N}=2, \mathcal{N}=4, \mathcal{N}=(0,2)$ などは、すべてこの超対称性の大きさに関する分類であるが、ここでは名前の一部だと思ってもらいたい。

4.1 Malikov-Schetchtman-Vaintrob に従った定義

量子力学の生成消滅演算子と微分幾何の意味での共形場理論の最低限の知識に関する事項は、暗に仮定する。Lie 環の関係式を用いて、

$$[(\beta_i)_n, (\gamma^j)_m] = \delta_i^j \delta_{m,-n} C$$

と定義する。C は定数倍のオペレータだが、後で 1（多項式環の単位元）とする。このとき、$(\beta_i)_n$ は共形次元１、$(\gamma^j)_m$ は共形次元 0 である。このモード展開を用いて、

$$\gamma^i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n^i z^{-n}$$
$$\beta_i(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\beta_i)_n z^{-n-1}$$

と表す。$z \in \mathbb{C}$ は複素数である。δ はクロネッカーのデルタである。

x が $(\beta_i)_n$ または γ_n^i（$n \in \mathbb{Z}$ は任意）とするときに、正規化順序を $B \in End(V_N)$ に対して定義する。ただし、V_N は以上の生成消滅演算子が作用する状態空間である。

$$:xB: = \begin{cases} Bx & (x\text{ が消滅演算子の時}) \\ xB & (\text{それ以外の時}) \end{cases}$$

この正則化が well-defined であることを確かめる必要があるが、以下ではこれを省略する。「radial ordering(動径順序と訳すらしい)」と呼ばれる条件、$|z| > |w|$ を満たすとき、総和がオペレータの意味で絶対収束して、

$$\beta_i(z)\gamma^j(w) = \frac{\delta_i^j}{z-w} + (regular)$$

と、正則部分を省略して書くことが出来る。正則部分を省略して書いたことを明記するときは、$\sim$ という記号で表す。これを OPE(Operator-Product-Expansion) と呼ばれる、演算子積展開とよばれる正則化の方法である。これが well-defined であることや、Lie 環の構造定数を定めることと同値であることの説明は割愛する。Locality と呼ばれる公理がこの OPE を保証しているとされる。

同様にして、

$$\beta_i(z)\beta_j(w) = (regular)$$
$$\gamma^i(z)\gamma^j(w) = (regular)$$

が得られる。ストレス・エネルギーテンソルは $L(z) =: \partial_z\gamma(z)\beta(z):$ で与えられる。このストレス・エネルギーテンソルは、OPE

$L(z)L(w) \sim \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w L(w)}{z-w}$

で与えられることが、Wick の定理で確かめられる。

以上は、通常の Lie 環の（Heisenberg 代数の）交換関係だったが、反交換関係の Clifford 代数も同様にして得られる。長くなるので省略すると、

$$\beta_i(z)\gamma^j(w) \sim \frac{\delta^i_j}{z-w}, \gamma^i(z)\gamma^j(w) \sim 0, \beta_i(z)\beta_j(w) \sim 0$$
$$b^i(z)c_j(w) \sim \frac{\delta^i_j}{z-w}, b^i(z)b^j(w) \sim 0, c_i(z)c_j(w) \sim 0$$
$$\gamma^i(z)b^j(w) \sim 0, \gamma^i c_j(w) \sim 0, \beta_i(z)b^j(w) \sim 0, \beta_i(z)c_j(w) \sim 0$$

となる。b, c もモード展開が得られるが、それぞれ共形次元が $0, 1$ である。以下ではこの $bc - \beta\gamma$ 系の計算は直接は使わないが、（ランク D の）位相的頂点代数との関係を述べておく。このストレス・エネルギーテンソルは以下の L, J の組み替えで $\boxed{T = L - \frac{1}{2}\partial J}$ と与えられる。

$$L = \sum_i [: \partial\gamma^i(z)\beta_i(z) : + : \partial b^i(z)c_i(z) :]$$
$$J = \sum_i : b^i(z)c_i(z) :,$$
$$Q = \sum_i : \beta_i(z)b^i(z) :,$$
$$G = \sum_i : c_i(z)\partial\gamma^i(z) : .$$

ここで、超対称性代数の知識が Q, G の定義の理解に必要である。それぞれ共形次元が 1, 2 でありBRST コホモロジーを作るのに使えるが、L, J の共形次元は 2, 1 である。

$$L(z)L(w) \sim \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w L(w)}{z-w}$$
$$J(z)J(w) \sim \frac{D}{(z-w)^2}$$

$$L(z)J(w) \sim -\frac{D}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w J(w)}{z-w}$$

ここまでは Q, G の知識は必要ないが、

$$\begin{aligned}
&G(z)G(w) \sim 0, \\
&L(z)G(w) \sim \frac{2G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w G(w)}{z-w}, \\
&J(z)G(w) \sim -\frac{G(w)}{z-w}, \\
&Q(z)Q(w) \sim 0, \\
&L(z)Q(w) \sim \frac{Q(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w Q(w)}{z-w}, \\
&J(z)Q(w) \sim \frac{Q(w)}{z-w}, \\
&Q(z)G(w) \sim \frac{D}{(z-w)^3} + \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{L(w)}{z-w}
\end{aligned}$$

となる。ここで、γ^i を滑らかな複素多様体 X の局所座標とみなし、その複素次元を D とした。$Q(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Q_n z^{n-1}$ とモード展開することで、$[Q_0, G(w)]_+ = L(w)$ とすることができた。ただし、$[]_\pm$ は、Heisenberg 代数、Clifford 代数に対してそれぞれ交換関係、半交換関係となるような次数付き Lie 代数の交換関係である。

以上の「定義」は、物理の文脈から出てきたものであるので、物理的解釈は可能だが座標依存性があるという欠陥が知られている。

4.2 Nekrasov に従った定義

Paul Bressler による未出版のプレプリントにも同様の趣旨のことが書かれていたようだが、Nekrasov の[*3]レクチャーノートによる定義は、Malikov-Schechtman-Vaintrob の定義を簡略にして、微分幾何の言葉で表すことができる。以下、γ を座標とみなすだけではなく、β をベクトル場とみなす試みを行う。

正則な接ベクトル $V \in T_U$ と、正則な 1-形式 $B \in \Omega_U^1$ の座標近傍 U での切断が与えられたときに、

$$\begin{aligned}
J_V &= :\beta_i V^i(\gamma)(z): \\
&:= \lim_{\epsilon\to 0}[\beta_i(z+\epsilon)V^i(\gamma(z)) - \frac{1}{\epsilon}\partial_i V^i(\gamma(z))] \\
C_B &= B_i(\gamma(z))\partial\gamma^i
\end{aligned}$$

とおくことで、C_B は共形次元 1、J_V は共形次元 1 だが $L(z)$ との OPE で $(z-w)^{-3}$ の項がある。内部積 ι と Lie 微分 $\mathcal{L}$、交換関係を使うことで、以下の関係式が得られる。

[*3] [S] の参考文献リストを参照。

$$[V_a, V_b]^j(z) = \partial_i V_b^j(z) V_a^i(z) - \partial_i V_a^j(z) V_b^i(z)$$
$$\mathcal{L}_V B(z) = \partial_i B_j(z) V^i(z) + \partial_j V^i(z) B_i(z).$$

これらのオペレータの OPE は、同様に計算できる。この式を $V, W \in T_X$ と $\xi, \eta \in \Omega_X^1$ の直和で表すと便利である。このとき、この直和 $V \oplus \xi, W \oplus \eta$ を引数として、$\mathcal{O}_v = J_v + C_\xi$ と $\mathcal{O}_w = J_W + C_\eta$ をかけることができる。この計算の詳細は拙著論文 [S] セクション 2.5, 2.6 に譲る。

座標変換 $\tilde{\beta}_a = \beta_i g_a^i + B_{ai} \partial \gamma^i = J_{g_a} + C_{B_a}$ に対して、$\tilde{\beta}_a(z) \tilde{\gamma}^b(w) \sim \dfrac{\delta_a^b}{z-w}$ を課すと、この方程式に解があり $g_a^i = \dfrac{\partial \gamma^i}{\partial \tilde{\gamma}^a}$ と、z 座標を介さない式が得られる。

$\tilde{\beta}_a \tilde{\beta}_b \sim 0$ は、同様にして、$B_a = \frac{1}{2}(\sigma_{ab} - \mu_{ab}) d\tilde{\gamma}^b$ と、対称部分 σ と反対称部分 μ に分割することで、$\sigma_{ab} = \sigma_{ba} = \sum_{i,j} \partial_i g_a^j \partial_j g_b^i$ と不定性なく決まり、他方で、マウラー・カルタン方程式を途中で使うことで、

$$d\mu = tr\ (g^{-1} dg)^3,$$

と方程式が定まる。

4.3　Witten の例とそのブローアップによる拡張 [S]

Witten の例の「取り掛かり口」(アンザッツ) は、上記の Malikov-Schechtman-Vantrob, Nekrasov の例に従ったものではなく、$U_0 \to U_1 \to U_2 \to U_0$ という三回の座標変換のもとに

$$\gamma^j \to \gamma^j$$
$$\beta_i \to \beta_i' = \beta_i + f_{ij} \partial \gamma^j$$

と、反対称テンソル $f_{ij} = -f_{ji}$ で書かれるというものである。このもとで、$\mathbb{CP}^2$ の例（と Hopf 曲面の例）が述べられている。桜井はこの例の結果を一般化して、Nekrasov の仮定の下にブローアップを $n = 0, 1, 2, 3$ を施すことで、2 次のチャーンキャラクターが公式

$$ch_2(dP_n) = \frac{3(1-n)}{2}$$

で与えられること、さらには、

$dP_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \text{-1} & \text{-1} & \text{-1} & \text{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \text{-1} & \text{-1} \end{pmatrix}$, $dP_5 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \text{-1} & \text{-1} & \text{-1} & \text{-1} & \text{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \text{-1} & \text{-2} & \text{-1} \end{pmatrix}$,
$dP_6 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \text{-1} & \text{-1} & \text{-1} & \text{-1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \text{-1} & \text{-1} & \text{-1} & \text{-1} \end{pmatrix}$

というトーリック曲面との位相同型をもとに $n = 4, 5, 6$ の del Pezzo 曲面に対しても同様の公式が成り立つことを OPE をもとに計算した。これはディバイザーの線型系に対するリーマン・ロッホの結果と一致する結果であるが、OPE をもとに計算したことに意義がある。初等的な計算結果を積

み重ねているだけだという批判があるが、逆を言えば Mathematica などの数式計算ソフトのアルゴリズムとみなすことができるため、toric log del Pezzo 曲面の途中に出てくるトーリック図に同様の計算を機械的に施すことができる。

計算手法を、トーリック図の座標変換の部分（これも一般化できると考えている）をのぞいて述べる。Witten と Nekrasov の仮定は異なるが、原理的には 3 回の座標変換を考えるという意味では同じであり、

$$\begin{aligned} \gamma^i &\to \gamma^i \\ \beta_j &\to \beta_j - \frac{1}{2}(\psi_{\alpha\beta\gamma})_{Ij}\partial\gamma^I \end{aligned}$$

であり、これはトータルアノマリー $\psi_{\alpha\beta\gamma}$ と呼ばれる、

$$\psi_{\alpha\beta\gamma} = \mu_{\alpha\beta} + \mu_{\beta\gamma} + \mu_{\gamma\alpha} - tr(g''dg' \wedge dg)$$

を座標近傍の三角形分割に関して足し上げることで得られる。詳細な解析は拙著論文 [S] を参照されたい。

4.4 インスタントンの非摂動効果について

ダイグラーフ・ヴァッファの「A Perturbative Window into Non-Perturbative Physics」を除けば、通常はインスタントンは非摂動効果とされ、ファインマンダイアグラムは途中に挟むものの、通常のべき展開では表されないとされている。カイラル代数を「非摂動的に」拡張すればよいのではないかとナイーブには考えられる。この方面では八木絢彌さんの仕事があるが、残念ながら具体的に書き下されたのは $\mathbb{CP}^1$ の場合しかない。Beilinson-Drinfeld の原著 [BD] を参照する限り、上記の chiral de Rham complex はローカルな理論であり、ローカルな情報を張り合わせただけでは一般的なグローバルな情報であるカイラル・ホモロジーに迫ることは難しいと考えられている。

もっと一般的な仮定の下でインスタントンとの関係を述べたものは、Malikov-Schechtman と Arkhipov-Kapranov のもので、後者はループ空間と因子化代数の関係を使っているように見えるが追試ができていない。これらは Batyrev 環との関係を述べたもので、Topological vertex にもあるトーリックな条件を仮定しているように見える。トーリックな条件を弱めることは長年試みてきたが、ミラー対称性予想の周辺ではトロピカル幾何学という手法を使っているようである。残念ながらカイラル代数のトロピカル幾何学との関係ははっきりしない。

物理の文脈からはチャーンキャラクターはチャーンサイモンズの微分形式に近いもので、これはインスタントンのプロトタイプに他ならない。自由に考えを述べることが許されるのならば、[BD] の三章は位相的共形場理論を述べたもので、四章は位相的場の理論の BV-BRST 形式の量子化との関係を述べたものである。その意味で、Beilinson-Drinfeld の意味でのカイラル・因子化代数とコステロ・グウィリアムの意味での因子化代数 [CG] の関係の探索は物理的にも意味を持つものであり、ルリエの大部な著書を読み解くことにだけ資するものではない。

現在のところ、グウィリアムら [GH] の最近の発展を追っているが、因子化代数は頂点代数の層であるとみなせるカイラル代数とは一応は距離を置いた定義になっており、テンソル積を繰り返したようなオブザーバブルの余層であるとされている。この理論は最終的には積分形でまとめられるいうのが一般的な見解のようであるが、あまり使い勝手のよい形では結論が得られていない。BV-BRST 形式の量子化は、BRST 形式のコホモロジー系の一般化とみなせるもののうち、ゲージ理論の一般化としては限界まで一般化したものとされており、その意味で（位相的）場の理論としては正当な主張として因子化代数は受け止められている。そのカイラル代数や超弦理論との関係が気になるところであるが、インスタントンに限った場合ですら、その一般的な定義である深谷圏にはトーリックな条件を課さないと説得力のある結果は厳しいようである。

残念ながら以上のインスタントンの数理について数学サイドからの物理への応用の可能性は、今のところ期待薄である。日本からは荒川氏、中島啓氏などのすぐれた数学者が物理方面にも果敢に参入しているが、「OPE に／ワールドシートのリーマン面には複素構造は入りません」という理論物理学者の指導を思い起こすと、数学者に説明できる能力のある理論物理学者が少ないことが問題なのかもしれない。Braverman 氏と話して示唆を得たことを論文に書いたら、「数学者にインスタントンで謝辞を書くのはナンセンスだ」とレフェリーに叱責されたこともあった。

ミラー対称性予想のようにバイリンガルを目指すことを推奨するものではないが、Higgs ブランチ、クーロン・ブランチに関する直近の話題だけではインスタントンの数理はとりつくされていないように思う。その理由の大部分は、深谷圏との関係が明らかにならないこと、「物理的強弱弦理論」の意味での「S 双対性」と、以上の正則化をもとにした「位相的」弦理論の、定義の意味での違いが議論されていないことが気になる。これは、以上に位相的頂点代数にディラトン場が含まれていないことからも「いわれのある違和感」であることが見て取れる。導来圏周辺で論文を書いている研究者はこれらの定義の違いを気にしていないようであるが、ポルチンスキーの生来の定義に立ち返ったとき、これらの定義の違いはたんなる杞憂ではないように思われる。

かつて、故江口徹先生と議論を交わしたときに、「物理が見えている数学者はほとんどいない」「数学者の心配をするのはやめなさい」といわれ、数学が物理に先行することは、「まれにある。リー群なんかはそうだった」とおっしゃっていた。江口先生の想像を超える形で数学者が物理に貢献することを願って筆をおきたいと思う。

参考文献

[AGT] Luis F. Alday, Davide Gaiotto, Yuji Tachikawa: ”Liouville Correlation Functions from Four-Dimensional Gauge Theories”, Letters in Mathematical Physics volume **91**, 167-197 (2010)

[AKMV] Mina Aganagic, Albrecht Klemm, Marcos Marino, Cumrun Vafa: ”The Topological Vertex”, Commun. Math. Phys. **254** (2005) 425-478

[AM] Tomoyuki Arakawa, Anne Moreau:
”Arc spaces and chiral symplectic cones”, arXiv:1802.06533 [math.RT]/[math.AG]

[BD] Alexander A. Beilinson, Vladimir Drinfeld: ”Chiral Algebras”, AMS (2004)

[BLLPRR] Christopher Beem, Madalena Lemos, Pedro Liendo, Wolfger Peelaers, Leonardo Rastelli, Balt C. van Rees: "Infinite Chiral Symmetry in Four Dimensions", Commun. Math. Phys. **336** (2015) 3, 1359-1433

[BPRR] Christopher Beem, Wolfger Peelaers, Leonardo Rastelli, Balt C. van Rees, "Chiral algebras of class S", J. High Energ. Phys. **2015**, 20 (2015).

[CG] Kevin Costello, Owen Gwilliam: "Factorization Algebras in Quantum Field Theory: Volume 1", Cambridge (New Mathematical Monographs, Series Number 31), 2016

[GH] Owen Gwilliam, Rune Haugseng: "Linear Batalin-Vilkovisky quantization as a functor of ∞-categories", Sel. Math. New Ser. (2018) **24** 1247-1313 and references therein

[MT] Gregory W. Moore, Yuji Tachikawa: "On 2d TQFTs whose values are holomorphic symplectic varieties", Proc. Symp. Pure Math. **85** (2012) 191-208

[S] Makoto Sakurai: "Mixed anomalies of chiral algebras compactified to smooth quasi-projective surfaces" (欧文改題), Ph.D thesis at the University of Tokyo, arXiv:0712.2318 [hep-th]/[math.AG]

E-mail address: **makotosakuraijp@08.alumni.u-tokyo.ac.jp**