ICE-closed subcategories and wide τ-tilting modules

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
酒井嵐士 (Arashi SAKAI)

概要

多元環の表現論は多元環上の加群のなす圏を調べる分野である。そこではその部分圏についての結果がいくつかあり、torsion class と wide 部分圏はよく調べられてきた。本稿ではこれらの部分圏の共通一般化である ICE-closed 部分圏を紹介する。また ICE-closed 部分圏は wide τ-傾加群という加群と対応していることを紹介する。この研究は名古屋大学の榎本悠久氏との共同研究である。

1 導入

有限次元多元環 (以下多元環) とは平たく言えば有限次元ベクトル空間であるような環のことである。多元環の表現論での主な研究対象は多元環 Λ 上の有限生成加群のなす圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ である。多元環の簡単な例としては体 K、もしくは K 上の n 次行列全体のなす環 $M_n(K)$ などがある。

簡単な具体例をひとつ見ておく。

例 1.1.

$$T_3(K) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_3(K) \middle| a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 \right\} = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix}$$

以下は $T_3(K)$ の元を左からかけることにより左 $T_3(K)$-加群であることがわかる。

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ K \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} K \\ K \\ K \end{bmatrix}$$

実は $\mathsf{mod}\,T_3(K)$ で直既約（非自明な直和で表せない）な加群は上の 3 つと剰余加群 $P_2/P_1, P_3/P_1, P_3/P_2$ で（同型を除いて）すべてであることが知られている。また多元環上の任意の有限生成加群は直既約加群の有限直和であらわせる（Krull-Schmidt の定理) ことから、上の 6 つの加群のいくつかの有限直和であらわせることになる。

このように与えられた多元環 Λ に対し、直既約な加群 ($\mathsf{mod}\,\Lambda$ の構成要素) を記述することは多元環の表現論における目標の一つである。詳しい多元環の表現の基礎事項については [ASS], [ARS] を参照していただきたい。

次に部分圏の分類問題について述べる。本稿では部分圏と言えば充満な加法部分圏、すなわち零対象を含み直和で閉じるものを考える。また $\mathsf{mod}\,\Lambda$ より広く、アーベル圏で議論を進める。以下 wide 部分圏、torsion class を紹介するために、いくつかの定義をしておく。

定義 1.2. $\mathcal{A}$ をアーベル圏、$\mathcal{C}$ をその部分圏とする。

(1) $\mathcal{C}$ が拡大で閉じるとは任意の $\mathcal{A}$ での短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対し、$X, Z \in \mathcal{C}$ ならば $Y \in \mathcal{C}$ が成り立つということである。
(2) $\mathcal{C}$ が商対象で閉じるとは任意の $\mathcal{C}$ の対象 C、任意の全射 $f : C \to A$ に対し、A がまた $\mathcal{C}$ に属するということである。
(3) $\mathcal{C}$ が核で閉じるとは任意の $\mathcal{C}$ の射 f に対し $\operatorname{Ker} f$ が $\mathcal{C}$ に属するということである。
(4) $\mathcal{C}$ が余核で閉じるとは任意の $\mathcal{C}$ の射 f に対し $\operatorname{Cok} f$ が $\mathcal{C}$ に属するということである。
(5) $\mathcal{C}$ が像で閉じるとは任意の $\mathcal{C}$ の射 f に対し $\operatorname{Im} f$ が $\mathcal{C}$ に属するということである。

ではまずは wide 部分圏について述べる。

定義 1.3. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathcal{W}$ が wide 部分圏であるとは拡大と核と余核で閉じることである。

Wide 部分圏では核と余核をとることができるので、またアーベル圏になる。例 1.1 では $\mathsf{add}(P_1 \oplus P_3 \oplus P_3/P_1)$ が wide 部分圏をなしている。ここで加群 M に対し $\mathsf{add}\, M$ は M の有限直和の直和因子としてあらわせる加群全体のなす部分圏をあらわす。

では次に torsion class について述べる。

定義 1.4. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathcal{T}$ が torsion class であるとは拡大と商対象でとじることである。

Torsion class は [Dic] で導入された。典型例は有限生成アーベル群のなす圏 Ab においてねじれ群（ある $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ に対し、$nM = 0$ をみたすアーベル群 M) のなす部分圏である。また例 1.1 では $\mathsf{add}(P_1 \oplus P_3 \oplus P_3/P_1 \oplus P_3/P_2)$ が torsion class をなしている。ではここで次の問題について考えたい。

問題 1.5. 与えられた多元環 Λ に対し、$\mathsf{mod}\,\Lambda$ の torsion class を分類せよ。

この問は一般には難しいが、関手的有限性というある種の有限性を満たす torsion class に限れば可能であることが知られている。

定義 1.6. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathcal{C}$ が関手的有限であるとは以下の 2 条件を満たすことをいう。

(1) (反変的有限)
任意の $\mathcal{A}$ の対象 X に対しある射 $f : C_X \to X$ が存在し次を満たす:
任意の射 $g : C \to X$ に対し $C \in \mathcal{C}$ ならば g は f を経由する。
(2) (共変的有限)
任意の $\mathcal{A}$ の対象 X に対しある射 $f : X \to C^X$ が存在し次を満たす:
任意の射 $g : X \to C$ に対し $C \in \mathcal{C}$ ならば g は f を経由する。

補足 1.7. 実は $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の torsion class は自動的に定義 1.6 (1) を満たす。また例 1.1 のように直既約加群が (同型を除いて) 有限個であるような多元環 (すなわち有限表現型) ではすべての部分圏が関手的有限となっている。関手的有限性は技巧的な仮定に見えるが、これをみたす部分圏は十分に存在

している。

では次に台 τ-傾加群を導入する。傾加群は多元環の導来同値をひきおこす重要な対象であり、台 τ-傾加群は傾加群の一般化になっている。

定義 1.8. $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ が台 τ-傾加群であるとはある射影加群 $P \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ が存在し以下をみたすときをいう。

- $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, M) = 0$
- $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \tau M) = 0$
- $|P| + |M| = |\Lambda|$

ここで τ は Auslaner-Reiten 移動をあらわし、$|M|$ は加群 M の互いに非同型な直既約因子の個数をあらわす。さらに台 τ-傾加群 M が $|M| = |\Lambda|$ をみたすとき (すなわち上の定義で $P = 0$ の場合)、これを τ-傾加群という。

実はこの台 τ-傾加群が関手的有限な torsion class と対応するのである。

定理 1.9. [AIR, Theorem 2.7] Λ を有限次元多元環とする。以下の全単射が存在する。

(1) $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の関手的有限な torsion class の集合
(2) 基本的な台 τ-傾加群の同型類の集合

ここで加群が基本的であるとは直既約に分解したときにあらわれる加群の重複度がすべて 1 ということである。(1) から (2) へは torsion class の射影生成子をとることで、(2) から (1) へは台 τ-傾加群 M に対し部分圏 $\mathsf{Fac}\,M$ をとることで対応している。ここで $\mathsf{Fac}\,M$ とは M の有限直和の剰余加群としてあらわせる加群全体のなす部分圏である。

台 τ-傾加群には変異とよばれる操作があり、これを用いて与えられた台 τ-傾加群から新しい台 τ-傾加群を作り出すことができる。上の全単射を通して関手的有限な torsion class は台 τ-傾加群を用いて調べられるのである。台 τ-傾加群の理論には興味深い話題がたくさんあるが、詳しくは [AIR] を参照していただきたい。

2 主結果

この節では前節の定理 1.9 の拡張を紹介する。まずは ICE-closed 部分圏の定義から始める。

定義 2.1. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の部分圏 $\mathcal{C}$ が ICE-closed 部分圏であるとは像と余核と拡大で閉じることである。

像 (Image)、余核 (Cokernel)、拡大 (Extension) で閉じることから、これらの頭文字をとり ICE-closed 部分圏と名付けられた。次のことが簡単にわかる。

命題 2.2. アーベル圏 $\mathcal{A}$ において wide 部分圏、torsion class は ICE-closed 部分圏である。

つまり ICE-closed 部分圏は wide 部分圏と torsion class の共通の一般化になっている。 次の命題から ICE-closed 部分圏を見つけることが容易になる。

命題 2.3. [ES, Lemma 2.2] $\mathcal{W}$ をアーベル圏 $\mathcal{A}$ の wide 部分圏とする。アーベル圏 $\mathcal{W}$ の torsion class $\mathcal{T}$ は $\mathcal{A}$ の中で ICE-closed 部分圏となる。

簡単なので証明を載せておく。

証明. $\mathcal{C}$ が拡大で閉じることは定義からすぐにわかる。$\mathcal{C}$ での任意の射 $f: X \to Y$ に対し、次の $\mathcal{A}$ での短完全列を考える。

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to X \to \operatorname{Im} f \to 0$$

$$0 \to \operatorname{Im} f \to Y \to \operatorname{Cok} f \to 0$$

$\mathcal{W}$ が wide 部分圏であることから、これらはアーベル圏 $\mathcal{W}$ での短完全列でもある。$\mathcal{C}$ は $\mathcal{W}$ での torsion class であることから $\operatorname{Im} f, \operatorname{Cok} f \in \mathcal{C}$ がわかる。 □

ここで前節で見たように $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の ICE-closed 部分圏についても分類 (ある加群との対応) を調べたくなる。多元環 Λ が遺伝的 (大局次元が 1 以下) のときには定理 1.9 の類似の対応が次のように得られている。

定理 2.4. [Eno, Theorem 2.3] Λ を遺伝的有限次元多元環とする。以下の集合の間に全単射が存在する。

(1) 射影的に豊富な ICE-closed 部分圏の集合
(2) 基本的な rigid 加群の同型類の集合

ここで加群 $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ が rigid であるとは $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(M, M) = 0$ をみたすことである。(1) から (2) へは部分圏の射影生成子をとることで、(2) から (1) へは rigid 加群 M に対し部分圏 $\mathsf{cok}\,M$ をとることで対応している。ここで $\mathsf{cok}\,M$ とは $\mathsf{add}\,M$ の射の余核であらわせる加群全体のなす部分圏である。

では一般の多元環 Λ についての ICE-closed 部分圏の分類の話を始める。次の命題は命題 2.3 のある意味での逆が成り立つことを主張している。

命題 2.5. [ES, Proposition 3.1] $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の任意の ICE-closed 部分圏はある wide 部分圏の (wide 部分圏をアーベル圏とみなしたときの) tosion class として実現できる。

この命題によって ICE-closed 部分圏を調べることが wide 部分圏とその中の torsion class を調べることに帰着される。

前節では torsion class のうち関手的有限なものに着目したのと同様に ICE-closed 部分圏については二重関手的有限性を考える。

定義 2.6. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の ICE-closed 部分圏 $\mathcal{C}$ が二重関手的有限であるとはある関手的有限な wide 部分圏 $\mathcal{W}$ が存在し、$\mathcal{C}$ がアーベル圏 $\mathcal{W}$ の中で関手的有限な torsion class となることである。

では次に対応する加群について述べる。台 τ-傾加群を含む加群のクラスである wide τ-傾加群を定義する。

定義 2.7. $M \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ が wide τ-傾加群であるとは、ある 関手的有限な wide 部分圏 $\mathcal{W}$ が存在し、M は $\mathcal{W}$ の中で $\tau_{\mathcal{W}}$-傾加群であるということである。

補足 2.8. 実は $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の関手的有限な wide 部分圏はある多元環 Γ 上の加群圏 $\mathsf{mod}\,\Gamma$ と圏同値になる ([Eno, Proposition 4.12] 参照)。ここでの $\tau_{\mathcal{W}}$-傾加群とはこの圏同値を通して $\mathsf{mod}\,\Gamma$ での τ-傾加群に対応するものである。

定義 1.8 での台 τ-傾加群 M は wide 部分圏 $\mathcal{W} = P^{\perp}$ (P からの任意の射が零になる加群全体のなす部分圏) によって wide τ-傾加群となっている。例 1.1 において $P_1 \oplus P_3$ は wide τ-傾加群である。このとき wide 部分圏は $\mathsf{add}(P_1 \oplus P_3 \oplus P_3/P_1)$ である。次の結果は定理 1.9 の拡張となっている。

定理 2.9. [ES, Theorem 4.13, 5.2] Λ を有限次元多元環とする。以下の集合の間に全単射が存在する。

(1) $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の二重関手的有限な ICE-closed 部分圏の集合
(2) 基本的な wide τ-傾加群の同型類の集合

ここでの (1) と (2) の間の対応は定理 2.4 のものと同じである。さらにこの全単射は定理 1.9 に制限される。また Λ が遺伝的であるとき、この全単射は定理 2.4 に一致する。

参考文献

[AIR] T. Adachi, O. Iyama, I. Reiten, *τ-tilting theory*, Compos. Math. 150 (2014), no. 3, 415–452.

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts, 65. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. x+458 pp.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 36. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Dic] S.E. Dickson, *A torsion theory for Abelian categories*, Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 223–235.

[Eno] H. Enomoto, *Rigid modules and ICE-closed subcategories over path algebras*, arXiv:2005.05536.

[ES] H. Enomoto, A. Sakai, *ICE-closed subcategories and wide τ-tilting modules*, arXiv:2010.05433.