Piatetski-Shapiro 列の Diophantine 方程式

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科
齋藤 耕太 (Kota SAITO)

概要

任意の非整数 $\alpha > 0$ に対して，n^α $(n = 1, 2, \dots)$ の整数部分からなる数列を Piatetski-Shapiro 列という．集合 $\mathrm{PS}(\alpha)$ をその項を集めた集合とする．本講演では，方程式 $ax+by=cz$ が無限個の解 $(x, y, z) \in \mathrm{PS}(\alpha)^3$ を持つような α を集めた集合について議論し，その集合の Hausdorff 次元の下からの評価を与える．系として，$\mathrm{PS}(\alpha)$ が無限個の長さ 3 の等差数列を含むような $\alpha > 2$ は非加算無限個存在することがわかった．本研究は名古屋大学の松坂俊輝氏との共同研究である．

1 問題の背景と得られた結果

本講演では名古屋大学の松坂俊輝氏との共同研究で得られた結果 [MS20] について話していく．まず，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，$\lfloor x \rfloor$ を x の整数部分とする． 任意の非整数 $\alpha > 0$ に対して，数列 $(\lfloor n^\alpha \rfloor)_{n=1}^\infty$ を指数 α の Piatetski-Shapiro 列といい， $\mathrm{PS}(\alpha) = \{\lfloor n^\alpha \rfloor \colon n \in \mathbb{N}\}$ とおく． 方程式 $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ が無限個の $\#\{x_1, \dots, x_n\} = n$ を満たす解 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{PS}(\alpha)^n$ を持つとき，方程式は $\mathrm{PS}(\alpha)$ で solvable であるという．本講演では，固定された $a, b, c \in \mathbb{N}$ に対して，線形 Diophantine 方程式

$$ax + by = cz \tag{1.1}$$

の $\mathrm{PS}(\alpha)$ での solvability について議論する．先行研究を挙げると，任意の $\theta, \eta \in \mathbb{R}$ で $\theta \notin \{0, 1\}$ を満たすものに対して，Glasscock は 2 変数の方程式 $y = \theta x + \eta$ の $\mathrm{PS}(\alpha)$ での solvability について研究している [Gla17, Gla20]．その結果，方程式 $y = \theta x + \eta$ が無限個の解 $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ を持つとき， Lebesgue 測度の意味でほとんど至る $1 < \alpha < 2$ に対して，方程式が $\mathrm{PS}(\alpha)$ で solvable であることがわかった．さらに，ほとんど至る $\alpha > 2$ に対して，方程式が $\mathrm{PS}(\alpha)$ で solvable でないこともわかった．この結果の応用として， 任意の $a, b, c \in \mathbb{N}$ に対して，$\gcd(a, c) | b$ を満たすならば，ほとんど至る $1 < \alpha < 2$ に対して，方程式 $z = (a/c)x + (b/c)$ が $\mathrm{PS}(\alpha)$ で solvable になることがわかる． すなわち，$y = 1 = \lfloor 1^\alpha \rfloor$ とおくことで，$\gcd(a, c) | b$ を満たすならば，方程式 (1.1) は $\mathrm{PS}(\alpha)$ で solvable であることがわかる． 一方で，各 $\alpha > 2$ に対して，方程式 (1.1) が $\mathrm{PS}(\alpha)$ で solvable であるか否かはわかっていなかった．

そこで，本講演では方程式 (1.1) が $\mathrm{PS}(\alpha)$ で solvable になるような $\alpha \in [s, t]$ を集めた集合について議論する．ただし，$2 < s < t$ とする．定理を紹介する前に，$\{x\}$ を実数 x の小数部分と定義し，$\dim_{\mathrm{H}} X$ を集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ の Hausdorff 次元と定義する．Hausdorff 次元の定義はここでは与えない．文献 [Fal14] を見よ．

Theorem 1.1. $a, b, c \in \mathbb{N}$ とする．任意の実数 $2 < s < t$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\dim_{\mathrm{H}}\{\alpha \in [s,t] \colon ax + by = cz \text{ が } \mathrm{PS}(\alpha) \text{ で solvable}\} \\
&\geq \begin{cases} \left(s + \dfrac{s^3}{(2+\{s\}-2^{1-\lfloor s \rfloor})(2-\{s\})}\right)^{-1} & \text{if } a = b = c \\ 2\left(s + \dfrac{s^3}{(2+\{s\}-2^{1-\lfloor s \rfloor})(2-\{s\})}\right)^{-1} & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

が成立する．

ここで，得られた下界はどの場合も正である．よって，Hausdorff 次元が正であることから，この集合は任意の $2 < s < t$ に対して，非可算濃度であることがわかる．さらに，次が容易に示される:

Corollary 1.2. 任意の閉区間 $I \subset (2, \infty)$ に対して， 方程式 $ax + by = cz$ が $\mathrm{PS}(\alpha)$ で solvable であるような $\alpha \in I$ を集めた集合は非可算濃度で I に稠密である．

特に，$a = b = 1$, $c = 2$ の場合，方程式 (1.1) と $\#\{x, y, z\} = 3$ を満たす組 (x, z, y) は長さ 3 の等差数列である．したがって，Corollary 1.2 により， 次が成立する．

Corollary 1.3. 任意の閉区間 $I \subset (2, \infty)$ に対して，$\mathrm{PS}(\alpha)$ が無限個の長さ 3 の等差数列を持つような $\alpha \in I$ を集めた集合は非可算濃度で I に稠密である．

講演では等差数列と Piatetski-Shapiro 列についての先行研究をいくつか紹介する．さらに，$\mathrm{PS}(\alpha)$ が無限個の長さ 3 の等差数列を持つような $\alpha > 2$ の存在性について証明を与え，時間が許せば Hausdorff 次元についても議論する．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP20K14292, JP19J20878 の助成を受けたものである．

参考文献

[Fal14] Kenneth Falconer, *Fractal geometry*, third ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2014, Mathematical foundations and applications. MR 3236784

[Gla17] Daniel Glasscock, *Solutions to certain linear equations in Piatetski-Shapiro sequences*, Acta Arith. **177** (2017), no. 1, 39–52. MR 3589913

[Gla20] ———, *A perturbed Khinchin-type theorem and solutions to linear equations in Piatetski-Shapiro sequences*, Acta Arith. **192** (2020), no. 3, 267–288. MR 4048606

[MS20] Toshiki Matsusaka and Kota Saito, *Linear Diophantine equations in Piatetski-Shapiro sequences*, preprint (2020), available at https://arxiv.org/abs/2009.12899.