

実直線配置の補空間の微分同相型

北海道大学大学院 理学院 数学専攻

小山元希 (Motoki OYAMA)

概要

実 n 次元空間における有限本の 1 次元アフィン空間の集合族である実直線配置に関して、和集合の補空間のホモトピー型、微分同相型が交差半順序集合のみで完全に決定出来るということが分かった。なお、本講演は石川剛郎氏（北海道大学）との共同研究に基づくものである。

1 はじめに

\mathbb{R}^n の部分空間配置 $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_m\}$ とは、有限個のアフィン部分空間の族のことである。部分空間配置の和集合の補空間 $M(\mathcal{A}) := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^m H_i$ についてのホモロジー群やコホモロジー環に関する研究が行われている。特に、ホモロジー群は部分空間配置の共通部分の集合を包含関係によって順序付けした交差半順序集合 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ によって組み合わせ的に決定されることが知られている。（Goresky, MacPherson [3] 参照） また、de Longueville, Schultz [1] によって、部分空間配置の補空間のコホモロジー環は完全に決定されている。しかし、部分空間配置の補空間のホモトピー型は、交差半順序集合のみでは決定出来ないことが知られており、超平面配置の場合でさえ決定されていない。Ziegler [6] の Theorem 2.1 によると、 \mathbb{R}^4 における 2 次元平面の配置において交差半順序集合が順序同型であるがコホモロジー環が異なる、即ち補空間がホモトピー同値でない例が存在することが知られている。しかし、有限本の直線の集合である実直線配置の補空間のホモトピー型について高さ関数を用い、交点の通過前後における位相の変化に関する考察を行った結果、ホモトピー型だけでなく微分同相型についても、交差半順序集合より少ない情報によって組み合わせ的に決定されることが分かった。

2 実直線配置

この章より後は $n \geq 2$ とする。 \mathbb{R}^n における実直線配置 $\mathcal{A} = \{l_1, \dots, l_m\}$ とは互いに異なる 1 次元アフィン部分空間の族のことである。実直線配置 \mathcal{A} の補空間を $M(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^m l_i$ と定義する。

Definition 2.1. $p \in \bigcup_{i=1}^m l_i$ が $\#\{l \in \mathcal{A} | p \in l\} = k$ を満たすとき、 p を \mathcal{A} に関する k 重点という。

次に、実直線配置 \mathcal{A} に対して、次の 2 つの条件を満たす単位ベクトル $v \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ を選び、高さ関数 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := x \cdot v$ (\cdot はユークリッド内積) を定義する。

(i) v は、 \mathcal{A} のどの直線とも垂直でない。

(ii) 任意の実数 c に関して $h^{-1}(c) \cap (\bigcup_{2 \leq k \leq m} \{p \in \bigcup_{i=1}^m l_i | p \text{ は } k \text{ 重点}\})$ は、高々 1 つの要素を持つ。

さらに,

$$M(\mathcal{A})_{\leq c} := \{x \in M \mid h(x) \leq c\}, \quad M(\mathcal{A})_{< c} := \{x \in M \mid h(x) < c\}$$

を定義する.

Lemma 2.2. $\mathcal{A} = \{l_1, \dots, l_m\}$ を \mathbb{R}^n における実直線配置とする. $c < d$ が

$$h^{-1}([c, d]) \cap \left(\bigcup_{2 \leq k \leq m} \{p \in \bigcup_{i=1}^m l_i \mid p \text{ は } k \text{ 重点} \} \right) = \emptyset$$

を満たすとき, $M(\mathcal{A})_{< c}$ と $M(\mathcal{A})_{< d}$ は微分同相となる.

Lemma 2.3. p は, \mathcal{A} に関する k 重点であり, $h(p) = c$ であるとする. ($k \geq 2$) このとき $\epsilon > 0$ を十分小さくとると $M(\mathcal{A})_{< c+\epsilon}$ は自明な接着写像

$$\phi : \bigsqcup_{i=1}^{k-1} D^2 \times \partial(D^{n-2}) \longrightarrow h^{-1}(c-\epsilon) \setminus \left(\bigcup_{l \in \mathcal{A}} l \right) \subset M(\mathcal{A})_{\leq c-\epsilon}$$

によって得られる $M(\mathcal{A})_{\leq c-\epsilon} \cup_{\phi} \left(\bigsqcup_{i=1}^{k-1} (D_i^2 \times D_i^{n-2}) \right)$ の内部と微分同相となる.

3 主定理

Theorem 3.1. (Ishikawa, Oyama [4])

\mathbb{R}^n における実直線配置 $\mathcal{A} = \{l_1, \dots, l_m\}$ は, p_k 個の k 重点を持っているとする. ($k \leq m$)

この時 $M(\mathcal{A})$ は n 次元閉球体に n 次元の $n-2$ -ハンドルを $m + \sum_{k=2}^m (k-1)p_k$ 個自明に接着して得られる n 次元境界付き多様体の内部と微分同相となる.

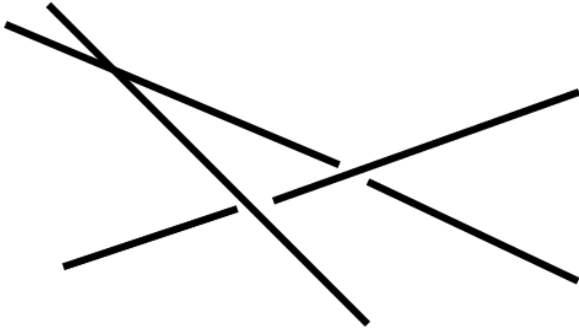


図1 $n = 3$ の場合の例

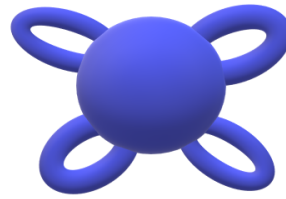


図2 上図の内部と微分同相になる

Corollary 3.2. $M(\mathcal{A})$ は $m + \sum_{k=2}^m (k-1)p_k$ 個の $n-2$ 次元球面の一点和とホモトピー同値である.

$$(M(\mathcal{A})) \cong \bigvee_{m + \sum_{k=2}^m (k-1)p_k} S^{n-2}$$

また, アレンジメントの分野において, 極小性という位相幾何的な性質の研究がなされている. l 次元有限セル複体 X が極小であるとは, $k = 1, \dots, l$ に対して (k 次元セルの個数) = (X の k 次 betti 数) が成り立つことである. 複素超平面配置の補空間の極小性については Randell の [5] や Dimca, Papadima の [2] において極小となることが示されている. ところが, 部分空間配置の補空間に関しては一般的には極小とは限らない. 特に, ホモロジー群に任意の単体複体のホモロジー群の成分を埋め込むことが出来る例が知られている. しかし, 主定理の系から実直線配置に関しては補空間が極小となることが分かった.

Corollary 3.3. \mathcal{A} を \mathbb{R}^n における実直線配置とする. このとき, 補空間 $M(\mathcal{A})$ は極小となる.

参考文献

- [1] de Longueville, Schultz, *The cohomology ring of complements of subspace arrangements*, Math. Annalen. 319, 625-646, (2000).
- [2] Dimca, Papadima, *Hypersurface complements, Milnor fibers and higher homotopy groups of arrangements*, Ann. Of Math. (2) 158(2003), no.2, 473-507.
- [3] Goresky, MacPherson, *Stratified Morse theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork, (1988).
- [4] Ishikawa, Oyama, *Topology of complements to real affine space line arrangements*, arXiv:1902.08377 (2019).
- [5] Randell, Morse theory, *Milnor fibers and minimality of hyperplane arrangements*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no.9, 2737-2743.
- [6] Ziegler, *On the difference between real and complex arrangements*, Math. Z. 212-1, 1993, 1-11.