

# 粒子反応拡散方程式の数学的取り扱いについて

無所属

岡本守 (Mamoru OKAMOTO)

## 概要

領域上の点の運動と、領域上の物理量の発展を記述する方程式のクラスとして、粒子反応拡散方程式を提案し、簡単な例について初期値問題の可解性と特殊解の存在条件を与える。特に、特殊解の存在条件に対する結果は、ある自走粒子系で見られる特徴的な運動に関する知見を直接的に与えるものである。

## 1 はじめに

集団が作り出すダイナミクスを理解しようとする試みにおいては、まず Vicsek の報告が挙げられる [1]。Vicsek はこの報告の中で、相互作用する多数の粒子が全体としてどのような挙動を示すかということを取り扱い、粒子の運動に加えられるノイズの大きさと粒子の密度によってある種の分岐現象が起こることを数値的に示した。Vicsek のものよりも現実に近い設定として、場と粒子の相互作用によって生じる集団運動が考えられる。そのような運動を記述するための方程式系として、次のような粒子反応拡散方程式を提案する：

$$\begin{cases} m \frac{d^2 \mathbf{x}_c}{dt^2} + \mu \frac{d\mathbf{x}_c}{dt} = G[u](\mathbf{x}_c, t), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = Au + F[\mathbf{x}_c], \\ 0 < t, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}_c(t) \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\Omega$  は運動を考える領域であり、 $\mathbf{x}_c$  は運動を考える対象の座標、 $u$  は運動に対して本質的に重要と考えられる物理量を表す。後で述べるように、例えば界面活性剤を用いて自走粒子系においては、 $u$  としては界面活性剤濃度を考えるのが適当であろう。 $A$  は粒子の影響が無い場合の  $u$  の発展を記述する作用素である。典型的には以下のような例が考えられる：

$$A := D\Delta, \quad A := \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad A := D\Delta - k,$$

左が拡散、中央が移流を表現し、一番右は後の例で再び登場するもので、拡散と領域からの指数的な除去を表現している。

このような粒子反応拡散方程式は全く新しい概念という訳ではなく、各論的には知られ、また研究も行われている。例として、界面活性剤、特に樟脳を用いた自走粒子系で用いられているモデル方程式がある。重要なパラメータの同定、制御が困難である生物系とは異なり、研究室内で実験が完結し、制限はあるものの比較的簡単に種々のパラメータを制御することができることから、この系は実

験的にも知られている。実際に樟脳を用いた系は多くの実験がなされており、実験的、理論的な解析が進められている [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]。理論的な解析には多くの報告で同じ数理モデル、あるいはその変種が用いられ、数値計算を援用することによってそのモデル方程式の分岐構造を調べようと試みた報告もある [7, 10]。また、純粋に数学的な結果も得られており、粒子が停止していることに対応する定常解の安定性 [11]、あるいは定常解から生じる分岐について報告されている [7, 12]。

樟脳系のモデル方程式として、次の形のものが知られている [10]：

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 x_c^i}{dt^2} &= \frac{\gamma(u(x_c^i(t) + r, t)) - \gamma(u(x_c^i(t) - r, t))}{2r} - \mu \frac{dx_c^i}{dt}, \quad i = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku + \sum_{i=1}^N F(x - x_c^i(t)), \quad x \in \mathbb{R}, \\ F(x) &= \begin{cases} u_0, & |x| < r, \\ 0, & |x| \geq r. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

第一式はろ紙の運動方程式である。  $\rho > 0$  はろ紙の面積密度、  $\mu > 0$  は粘性による抵抗の係数、  $L > 4r > 0$  は順に水路長とろ紙の半径である。  $\gamma \in C^2(0, \infty)$  は樟脳分子濃度から表面張力を求める関数で、更に Lipschitz 条件を満たすことを仮定する。第二式は水面の樟脳分子濃度の発展方程式で、樟脳分子の輸送に関して拡散過程を仮定している。  $D > 0$  は樟脳分子の拡散係数で、  $k > 0$  は樟脳の緩和係数である。  $-ku$  なる項は、主として樟脳の持つ昇華性のために樟脳分子が水面から取り除く事から導入された。  $F$  は水面への樟脳分子の供給を表現する関数で濾紙の存在する領域で樟脳分子が一様に供給される事を表している。以下のようにおけば、(2) 式が (1) 式の特殊なものであることはすぐに了解されるであろう：

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{R}, \quad G[u](x, t) = \frac{\gamma(u(x + r, t)) - \gamma(u(x - r, t))}{2r}, \\ A &= D \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k, \quad F[x_c^1, \dots, x_c^N](x, t) = \sum_{i=1}^N F(x - x_c^i(t)). \end{aligned}$$

粒子反応拡散方程式一般への理論構築のための一歩として、比較的簡単な例ではあるが、我々は (2) 式の初期値問題に対する可解性を肯定的に解決した。議論は Young の不等式がわかれば理解できる程度の初等的な手法を用いたものである。

また、特殊解の構成について議論するため、最小限の集団運動として、図 1 に示す非対称な回転運動に注目した。これは樟脳を含んだ円形のろ紙 2 枚が円環水路上で等速運動を行うものである。現象面において注目すべき点は 2 枚のろ紙が近接した状態で等速運動を行なっている点である。古くから指摘されているように、一般には表面張力差で駆動されると考えられる物体は、水面の汚染によってその運動の程度を弱める [13]。それ故、後続のろ紙は先行するろ紙が放出する樟脳分子によってその速さを遅くするのが自然であるように思われるが、実際には図 1 のように、2 枚のろ紙が近接して等速運動を続ける様子が観察されている。

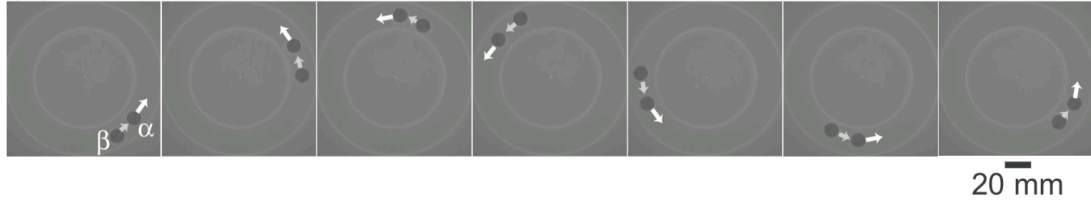


図1 [10] より引用. 非対称な等速回転運動のスナップショット. 時間間隔は 1.0[s].

先行研究ではモデル方程式を構成し、数値的にそのような非対称な回転運動に対応する解を発見し、また、数値的に分岐構造を解析することで、そのような非対称な回転運動は対称な回転運動から Pitch-fork 分岐を経て生じることを示唆した [10]. しかしながら、このような非対称な回転運動がいかなる物理的要因によって生じるかは明らかにはされなかった.

数学的な側面としては、この現象に対応する解は、 $u$  の形状に注目すれば二つ山の進行パルス波として特徴付けられ、珍しい例なのではないかと思われる. また、証明した内容からは、二つ山の進行パルス波が存在するための条件は主に界面活性剤濃度  $u$  から表面張力を与える関数  $\gamma$  の形状に極めて強く依存することが分かった.

今回、第一の結果として、モデル方程式 (2) の初期値問題が一意的な時間大域解を持つことが得られた. また、第二の結果として、モデル方程式 (2) に周期境界条件を課した方程式が非対称な等速回転運動に対応する進行パルス解を持つこと、およびそのための条件を見出した. 見出した条件は、進行パルス波の存在、非存在は水面の樟脳分子濃度から表面張力を記述する関数  $\gamma$  の凸性から大きな影響を受けることがわかった.

## 2 初期値問題の一意的可解性

$F$  の不連続性から、 $u$  が  $C^2$  級となるような解は存在しないことに注意せよ. このため、我々は次のような弱解を導入した:

**Definition 1.**  $r > 0$ ,  $\mu > 0$ , および  $\gamma \in C[0, \infty)$  を Lipschitz 連続とせよ. 与えられた  $x_0^1, \dots, x_0^N, v_0^1, \dots, v_0^N \in \mathbb{R}$ ,  $u_0 \in C^b(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  に対し、関数の組  $\mathbf{x}_c = (x_c^1, \dots, x_c^N) \in (C^2(0, \infty))^N$ ,  $u \in L^1_{\text{loc}}((0, \infty); L^1(\mathbb{R})) \cap C((0, \infty); C_0(\mathbb{R}))$  が以下を満たす時、 $(\mathbf{x}_c, u)$  を (2) の弱解であると言う.

(i)  $i = 1, \dots, N$ ,

$$\frac{d^2 x_c^i}{dt^2} + \mu \frac{dx_c^i}{dt} = \frac{\gamma(u(x_c^i + r, t)) - \gamma(u(x_c^i - r, t))}{2r}, \quad (3)$$

$$x_c^i(0) = x_0^i, \quad v_c^i(0) = v_0^i,$$

を満たす.

(ii) 任意の  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$  に対して,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0) u_0(x) dx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varphi \right) u + \varphi \sum_{i=1}^N F(x - x_c^i) dx dt, \quad (4)$$

を満たす.

以上の定義は,  $\mathbf{x}_c$  については古典解,  $u$  については超関数の意味での弱解となることを要求するものである.

可解性の証明について概略を示す. まず (2) の  $u$  に関する部分を見れば, これは非斉次線形の拡散方程式であり, 与えられた  $\mathbf{X} = (X_c^1, \dots, X_c^N)$  について, その解を以下のように書き下すことができる:

$$U[\mathbf{X}_c](x, t) = e^{-t} \int_{\mathbb{R}} H(x - y, t) u_0(y) dy + e^{-t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(x - y, t - \tau) e^\tau \sum_{i=1}^N F(y - X_c^i(\tau)) dy d\tau.$$

ここで,  $H(x, t) \equiv (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2/(4t)}$  は Gauss 核である. ここで得られた  $U[\mathbf{x}_c]$  を  $\mathbf{x}_c$  に関する方程式に代入することで,  $\mathbf{x}_c$  のみで閉じた微分方程式が得られる:

$$\rho \frac{d^2 x_c^i}{dt^2} + \mu \frac{dx_c^i}{dt} = \frac{\gamma(U[\mathbf{x}_c](x_c^i(t) + r, t)) - \gamma(U[\mathbf{x}_c](x_c^i(t) - r, t))}{2r}, \quad i = 1, \dots, N,$$

あとはこれを積分方程式に変換し, 適当な重み付け空間の上で Banach の不動点定理を適用すれば所望の結果が得られる.

議論は初等的であるが, より特異性の強い方程式を扱った例 [14] でも同様の議論が行われている: 任意の粒子の運動  $\mathbf{x}_c$  に対する, 場の方程式の解  $u[\mathbf{x}_c]$  を構成し, それを ODE 部分に代入して  $\mathbf{x}_c$  に対する微分積分方程式を得た後, 反復写像を構成して適当な空間の上で不動点定理を用いる.

この議論のために本質的に重要であるのは PDE 部分の well-posedness であり, 特に,  $\mathbf{x}_c$  に対して  $u[\mathbf{x}_c]$  が連続的に変化するという点であり, いまだ議論の途上ではあるものの, 粒子反応拡散方程式一般に対する理論を構築する上では重要な視点になるのではないかと考えている.

### 3 進行パルス解

$N = 2$  として, 一般の反応拡散系における進行波解と同様に, (2) に対して動座標変換  $(\tau, z) = (t, x - ct)$  を施し, その座標系における定常解を考えた:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(U(\tau, Z^i + r)) - \gamma(U(\tau, Z^i - r)) - \mu c, & i = 1, 2, \\ 0 &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + c \frac{\partial U}{\partial z} - U + F(z - Z^1) + F(z - Z^2), & z \in [0, L]. \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $c$ は無次元化された速度に対応するパラメータである。また、単純のため、 $0 = Z^2 < Z^1 < L$  および、 $2r < Z^1 < L - 2r$  とする。方程式の並進対称性から、この仮定で一般性を損なう事は無い。以降の議論のため、(5)の解を次のように分類する：

**Definition 2.** (5)の解  $(Z^1, c, U(z))$  を等速回転解と呼ぶ。もしも等速回転解  $(Z^1, c, U(z))$  が  $z^1 = L/2$  を満たす時、その解は対称であると言う。そうではない時、等速運動解は非対称であるという。

対称な等速回転解が存在することは容易に示される。また、実験においてはこの解は正反対の位置にありながら等速に運動する2枚の濾紙を表現するもので、容易に確認されるものである。当然数値的にもそのような解は確認されている。図1で示した非対称な等速運動は、この定義で言う所の非対称性が強い等速回転解が対応すると考えられる。従って、我々の主たる興味は非対称な等速回転解の存在と非存在に関する条件となる。

## 4 主結果

ここまでの問題に対して、我々は“ある  $c$  に対して、速度  $c$  の非対称な等速回転解が存在するようなパラメータ  $(r, L, \mu)$  および関数  $\gamma$  は存在するか？”という観点で解析し、次のような結果を得た：

**Theorem 1.** (5)が速度0の非対称等速回転解を持つようなパラメータは存在しない。

**Theorem 2.** もしも  $\gamma'' \geq 0$  であるならば、任意の  $c > 0$  に対して (5) が非対称な等速回転解を持つようなパラメータは存在しない。

**Theorem 3.**  $\eta = 4r/L$  とする。もしも  $\gamma$  が

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{4r^2(1-\eta)} \right) \gamma'(\eta) < (1-\eta)\gamma''(\eta) < \gamma'(\eta),$$

を満たすならば、十分大きな  $c$  に対して、(5)が非対称な等速回転解を持つようなパラメータが存在する。特に、 $L, r$  は  $0 < 4r < L$  となるように任意に取ることができ、そのような  $c, r, L$  を選ぶ毎に、非対称な等速運動解が存在するような  $\mu$  が一意に定まる。

## 5 証明の概略

### 5.1 同値な非線形方程式の導出

まず、全ての定理に共通する部分を述べる。(5)の下段を見ると、これは  $c$  と  $z^1$  を決めるごとに、解を書き下すことができる：

**Lemma 1.**  $d = Z^1 - 2r$ ,  $0 \leq c$  とする。(5)を満たす  $U$  が  $c$  と  $d$  に対して一意に存在して、特に

以下の表式が得られる：

$$\begin{aligned} U(Z^1 - r) &= U_+(c)(1 + E_+(c, 2r + d)) + U_-(c)(E_-(c, L - 4r - d) + E_-(c, L - 2r)), \\ U(Z^1 + r) &= U_+(c)(E_+(c, L - 2r) + E_+(c, d)) + U_-(c)(E_-(c, L - 2r - d) + 1), \\ U(L - r) &= U_+(c)(1 + E_+(c, L - 2r - d)) + U_-(c)(E_-(c, L - 2r) + E_-(c, d)), \\ U(r) &= U_+(c)(E_+(c, L - 4r - d) + E_+(c, L - 2r)) + U_-(c)(1 + E_-(c, 2r + d)). \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \phi(c) &= \frac{-c}{2}, \quad \theta(c) = \frac{\sqrt{c^2 + 4}}{2}, \quad \lambda_{\pm}(c) = \phi(c) \pm \theta(c), \\ E_+(c, z) &= \exp(-\lambda_+(c)z), \quad E_-(c, z) = \exp(\lambda_-(c)z), \\ U_+(c) &= \frac{-\lambda - (c)}{2\theta(c)} \frac{1 - E_+(c, 2r)}{1 - E_+(c, L)}, \quad U_-(c) = \frac{\lambda + (c)}{2\theta(c)} \frac{1 - E_-(c, 2r)}{1 - E_-(c, L)}. \end{aligned}$$

以降, 以下のようにおく：

$$\begin{aligned} U_{1f} &= U_{1f}(c, d) = U(Z^1 + r), & U_{1r} &= U_{1r}(c, d) = U(Z^1 - r), \\ U_{2f} &= U_{2f}(c, d) = U(r), & U_{2r} &= U_{2r}(c, d) = U(L - r), \\ \Delta U_1 &= \Delta U_1(c, d) = U_{1f}(c, d) - U_{1r}(c, d), & \Delta U_2 &= \Delta U_2(c, d) = U_{2f}(c, d) - U_{2r}(c, d). \end{aligned}$$

続く議論では, 表記が煩雑となることを避けるため, 固定された値について考えれば十分であるときには変数を省略することとする. それぞれの意味としては,  $c > 0$  とすれば,  $U_{if}(U_{ir})$  は進行方向に沿って前方(後方)に対応する  $U$  の値であり,  $\Delta U_i$  は前方と後方の濃度差に対応する.

次に, (5) の第一式を見ると, 以下の方程式と同値であることがわかる：

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(U_{1f}(c, d)) - \gamma(U_{1r}(c, d)) - \mu c, \\ 0 &= \gamma(U_{1f}(c, d)) - \gamma(U_{1r}(c, d)) - (\gamma(U_{2f}(c, d)) - \gamma(U_{2r}(c, d))). \end{aligned}$$

この時, 以下の補題を用いる：

**Lemma 2.**  $0 < d < L - 4r$ ,  $0 < c$  とする. この時,  $\Delta U_1(c, d) < 0$  または  $\Delta U_2(c, d) < 0$ .

この補題から, 結局以下の方程式に対する解の存在が (5) の解の存在と同値であることが分かる：

$$0 = \gamma(U_{1f}(c, d)) - \gamma(U_{1r}(c, d)) - (\gamma(U_{2f}(c, d)) - \gamma(U_{2r}(c, d))). \quad (6)$$

以降,  $\Gamma(c, d) = \gamma(U_{1f}(c, d)) - \gamma(U_{1r}(c, d)) - (\gamma(U_{2f}(c, d)) - \gamma(U_{2r}(c, d)))$  とおく.

## 5.2 定理 1 の証明の概略

直接  $c = 0$  とすることで, 以下を得る：

$$\begin{aligned} U_{1f}(0, d) &= U_0(1 + E_0(L - 2r) + E_0(d) + E_0(L - 2r - d)), \\ U_{1r}(0, d) &= U_0(1 + E_0(L - 2r) + E_0(2r + d) + E_0(L - 4r - d)), \\ U_{2f}(0, d) &= U_0(1 + E_0(L - 2r) + E_0(2r + d) + E_0(L - 4r - d)), \\ U_{2r}(0, d) &= U_0(1 + E_0(L - 2r) + E_0(d) + E_0(L - 2r - d)), \end{aligned}$$

ただし,

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{1 - E_0(2r)}{1 - E_0(L)}, \quad E_0(x) = \exp(-x).$$

従って,

$$\begin{aligned} \Gamma(0, d) &= 2\gamma(U_0(1 + E_0(L - 2r) + E_0(d) + E_0(L - 2r - d))) \\ &\quad - 2\gamma(U_0(1 + E_0(L - 2r) + E_0(2r + d) + E_0(L - 4r - d))). \end{aligned}$$

また,  $\gamma$  が狭義単調減少であることから,  $\Gamma(0, d) = 0$  となるのは以下と同値:

$$\begin{aligned} 0 &= U_0(1 + E_0(L - 2r) + E_0(d) + E_0(L - 2r - d)) \\ &\quad - U_0(1 + E_0(L - 2r) + E_0(2r + d) + E_0(L - 4r - d)). \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} &U_0(1 + E_0(L - 2r) + E_0(d) + E_0(L - 2r - d)) \\ &\quad - U_0(1 + E_0(L - 2r) + E_0(2r + d) + E_0(L - 4r - d)) \\ &= U_0 E_0(d)(1 - E_0(2r))(1 - E_0(L - 4r - 2d)). \end{aligned}$$

以上から,  $\Gamma(0, d) = 0$  となるのは  $d = L/2 - 2r$  となる時に限られる. これは定理 1 の主張そのものである.

### 5.3 定理 2 の証明の概略

$\Gamma$  を以下の二つの積分形に書き直す:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{U_{1r}}^{U_{1f}} \gamma'(U) dU - \int_{U_{2r}}^{U_{2f}} \gamma'(U) dU, \\ &= \int_{U_{2f}}^{U_{1f}} \gamma'(U) dU - \int_{U_{2r}}^{U_{1r}} \gamma'(U) dU. \end{aligned}$$

これらの積分形の  $\Gamma$  に対して不等式評価を行い,  $U_{1f}$  と  $U_{2r}$  の大小関係で場合分けして  $\Gamma \neq 0$  を示す. その際, 以下の補題が重要となる:

**Lemma 3.**  $c > 0$  とする.

1.  $\Delta U_1(c, d) - \Delta U_2(c, d) = 0$  と  $L/2 - 2r - d = 0$  は同値. もしも  $L/2 - 2r - d \neq 0$  であるならば,  $\Delta U_1(c, d) - \Delta U_2(c, d)$  の符号は  $L/2 - 2r - d$  の符号と一致する.
2.  $U_{1f}(c, d) - U_{2f}(c, d) = 0$  と  $L/2 - 2r - d = 0$  は同値. もしも  $L/2 - 2r - d \neq 0$  ならば,  $U_{1f}(c, d) - U_{2f}(c, d)$  の符号は  $L/2 - 2r - d$  の符号と一致する.

## 5.4 定理3の証明の概略

定理3は $\Gamma(c, d)$ に対して中間値の定理を適用する。その際、以下の極限を評価する：

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{d \downarrow 0} \Gamma(c, d),$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \lim_{d \uparrow L/2 - 2r} \Gamma(c, d).$$

$\Gamma(c, d)$ の連続性から、これらの極限值が異符号となれば、十分大きな $c$ に対して、 $\Gamma(c, d)$ は $d$ を変化させることで異なる符号を取ることが分かる。ここで $d$ について中間値の定理を適用すればよい。

極限の評価には以下の補題が基本となる：

**Lemma 4.**  $z, z_1, z_2 > 0$  とせよ。この時、

$$\lim_{c \rightarrow \infty} U_+ = \frac{2r}{L}, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} U_- = 0, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \lambda_-^2 U_- = 1, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} E_+(z) = 1, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} E_-(z) = 0,$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{U_-}{1 - E_+(z)} = 0, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{U_-}{(1 - E_+(z_1))(1 - E_+(z_2))} = \frac{1}{z_1 z_2},$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1 - E_+(z_1)}{1 - E_+(z_2)} = \frac{z_1}{z_2}, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{E_-(z_1)}{1 - E_+(z_2)} = 0.$$

## 6 まとめ

今回、粒子反応拡散方程式に対する解析として、(2)式に対して初期値問題の可解性とある種の進行パルス解の存在条件について議論した。また、主結果から即座に分かるように、表面張力を表現する関数 $\gamma$ が下に凸である場合には非対称な等速回転解は存在せず、一方で、 $\gamma$ がある点で上に凸であれば、非対称な等速回転解が存在する可能性がある。従って、モデルの妥当性を検証するために $\gamma$ が物理的にはどのような関数であるかを検証する必要がある。また、その結果如何では我々の結果は既存のモデル方程式に修正を要求するもので、これは現状簡単のために省略されている何らかの効果運動に本質的な影響を与えていることを示唆するものである。

## 参考文献

- [1] Tamás Vicsek, András Czirók, Eshel Ben-Jacob, Inon Cohen, and Ofer Shochet. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1226–1229, Aug 1995.
- [2] Satoshi Nakata, Yasutaka Iguchi, Sachie Ose, Makiko Kuboyama, Toshio Ishii, and Kenichi Yoshikawa. Self-rotation of a camphor scraping on water: New insight into the old problem. *Langmuir*, 13(16):4454–4458, 1997.
- [3] Satoshi Nakata and Yuko Hayashima. Spontaneous dancing of a camphor scraping. *J. Chem. Soc., Faraday Trans.*, 94:3655–3658, 1998.
- [4] Masahiro. Kohira, Yuko Hayashima, Masaharu Nagayama, and Satoshi Nakata. Synchronized self-motion of two camphor boats. *Langmuir*, 17(22):7124–7129, 2001.



- [5] Yuko Hayashima, Masaharu Nagayama, and Satoshi Nakata. A camphor grain oscillates while breaking symmetry. *The Journal of Physical Chemistry B*, 105(22):5353–5357, 2001.
- [6] Satoshi Nakata, Yukie Doi, and Yuko Hayashima. Intermittent motion of a camphene disk at the center of a cell. *The Journal of Physical Chemistry B*, 106(44):11681–11684, 2002.
- [7] Masaharu Nagayama, Satoshi Nakata, Yukie Doi, and Yuko Hayashima. A theoretical and experimental study on the unidirectional motion of a camphor disk. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 194(3):151 – 165, 2004.
- [8] Nobuhiko J Suematsu, Satoshi Nakata, Akinori Awazu, and Hiraku Nishimori. Collective behavior of inanimate boats. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 81 5 Pt 2:056210, 2010.
- [9] Yumihiko S. Ikura, Eric Heisler, Akinori Awazu, Hiraku Nishimori, and Satoshi Nakata. Collective motion of symmetric camphor papers in an annular water channel. *Phys. Rev. E*, 88:012911, Jul 2013.
- [10] Kei Nishi, Ken Wakai, Tomoaki Ueda, Miyu Yoshii, Yumihiko S. Ikura, Hiraku Nishimori, Satoshi Nakata, and Masaharu Nagayama. Bifurcation phenomena of two self-propelled camphor disks on an annular field depending on system length. *Phys. Rev. E*, 92:022910, Aug 2015.
- [11] Elliott Ginder, Takaaki Minomo, Masaharu Nagayama, Satoshi Nakata, and Hiroya Yamamoto. Traveling pulse solutions in a point mass model of diffusing particles. *Computer Methods in Materials Science*, 17:111–121, 2017.
- [12] Xinfu Chen, Shin-Ichiro Ei, and Masayasu Mimura. Self-motion of camphor discs. model and analysis. *Networks & Heterogeneous Media*, 4:1, 2009.
- [13] Lord Rayleigh. Measurements of the amount of oil necessary in order to check the motions of camphor upon water. *Proc. R. Soc Lond.*, 47:364–367, 1890.
- [14] Jishan Fan, Masaharu Nagayama, Gen Nakamura, and Mamoru Okamoto. A weak solution for a point mass camphor motion. *Differential Integral Equations*, 33(7/8):431–443, 07 2020.