

多孔質媒体方程式に対する時空均質化問題*

東北大学 大学院理学研究科 数学専攻
岡 大将 (Tomoyuki OKA)

1 序

本小論では、次の多孔質媒体方程式と呼ばれる非線形拡散方程式に対する時空均質化問題について考察する。

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(x, t) = \operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r} \right) \nabla |u_\varepsilon|^{p-1} u_\varepsilon(x, t) \right), & x \in \Omega, t \in I, \\ |u_\varepsilon|^{p-1} u_\varepsilon(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in I, \quad u_\varepsilon(x, 0) = u^0(x), x \in \Omega. \end{cases}$$

ただし、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域, $I = (0, T)$, $1 < p < 2$ とし、また $0 < r < +\infty$, $u^0 \in L^3(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ とする。以下では、 $\square = (0, 1)^N$, $J = (0, 1)$ とし、 $a = a(y, s) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ は滑らかで $(\square \times J)$ -周期的な一様楕円性条件、すなわち、ある $\lambda > 0$ が存在し、任意の $\xi \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\lambda |\xi|^2 \leq a(y, s) \xi \cdot \xi \leq |\xi|^2 \quad \text{for all } (y, s) \in \mathbb{R}^{N+1} \quad (1)$$

を満たす $N \times N$ 対称行列とする。また、 $0 < r < +\infty$ は係数行列 $a(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r})$ の時空間周期の対数比に対応していることに注意する。

(周期的) 均質化問題がどのような問題であるかについては次節で述べるが、数学的には、周期 $\varepsilon > 0$ で振動する係数行列を伴う偏微分方程式に対して、 $\varepsilon \rightarrow 0_+$ としたときに解の収束極限が満たす方程式 (均質化方程式) を厳密に導出する問題である。そこで、本小論では (P_ε) に対して、 $\varepsilon \rightarrow 0_+$ としたときに解 u_ε の収束極限が満たす均質化方程式について考察する。特に、均質化方程式に現れる係数行列 (均質化行列) が、対数比 $0 < r < +\infty$ に応じてどのように表現されるかについて焦点を当てる。さらに、昨年度の第16回数学総合若手研究会のテクニカルレポート集 [12] で報告した Fast Diffusion 方程式の場合との差異についても考察する。

1.1 均質化問題とは

均質化問題 (*homogenization problem*) は、材料科学関連の分野で考案された均質化法に基づく数学的な問題であり、均質化法は材料特性を調べるための解析手法として知られている。一般に材料は不均質で複雑かつ無数の微視的構造 (*microstructure*) を持ち、材料特性

* 本研究は赤木 剛朗 教授 (東北大学) との共同研究に基づく。また、本研究は科学研究費補助金 (JP20H01812, JP18K18715, JP16H03946, JP17H01095, JP20H00117, JP20J10143) 及び、東北大学学際高等研究教育院の助成を受けたものである。

はこの微視的構造に大きく影響される。そのため、単純に考えれば微視的構造を全て考慮して解析していくことになるが、このような直接計算は微視的構造の数を把握するだけでなく、莫大な計算コストを消費するため現実的ではない。そこで、この微視的構造を適切に粗視化 (*coarse graining*) することである種の平均量を導出することが有効な解析手法だと考えられる。この粗視化の代表的な手法として均質化法が知られており、図1のように考察の対象となる(材料) Ω 内で周期的な微視的構造を持つと仮定し、その周期幅 $\varepsilon > 0$ を $\varepsilon \rightarrow 0_+$ とし、て一様な材料特性、すなわち、微視的構造に対応した巨視的構造 (*macrostructure*) の導出を考える。このプロセスは、上述したように周期パラメータ $\varepsilon > 0$ に依存した係数行列を伴う偏微分方程式に対して、 $\varepsilon \rightarrow 0_+$ としたときの解の収束極限が満たす均質化方程式について考察することに対応し、これを均質化問題と呼ぶ。

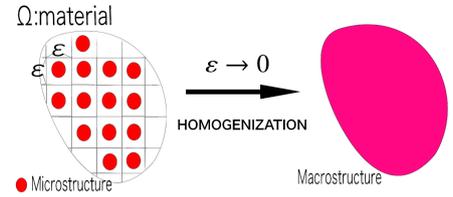


図1 均質化法の概略図

1.2 例

本節では、次の線形楕円型方程式:

$$(E_\varepsilon) \quad -\operatorname{div} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \nabla u_\varepsilon \right) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$$

を例として考える。ここで $a = a(y) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ は滑らかで \square -周期的な一様楕円性条件 (すなわち、変数 s に依存しない (1)) を満たす $N \times N$ 行列とし、 $f \in H^{-1}(\Omega)$ とする。また、係数行列 $a(\frac{x}{\varepsilon})$ が図1に現れる微視的構造に対応する。以下、均質化問題として、 $\varepsilon \rightarrow 0_+$ とした際に弱解 u_ε の収束性や収束極限が満たす均質化方程式について議論する。まず、 (E_ε) に対する弱解の一意可解性は Lax–Milgram の定理によって保証され、それに伴い u_ε に対するアプリアリ評価:

$$\lambda \|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \quad (2)$$

が得られる。従って、ここでは部分列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ に依存するが、ある $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ が存在し、

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0 \quad \text{weakly in } H_0^1(\Omega), \quad (3)$$

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0 \quad \text{strongly in } L^2(\Omega) \quad (4)$$

が $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$ として得られる。ここで、(4) を得る際に Rellich–Kondrachov の定理を用いており、 $H_0^1(\Omega)$ 上での強収束性までは得られていないことに注意する。さらに、係数行列 $a(\frac{x}{\varepsilon})$ は $\varepsilon \rightarrow 0_+$ とすることで激しく振動するが、平均値の性質 (命題 2.5) によって各成分 $a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon})$, $i, j = 1, \dots, N$ は

$$a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \rightarrow \langle a_{ij} \rangle_y := \int_{\square} a_{ij}(y) dy \quad \text{weakly-* in } L^\infty(\Omega) \quad (5)$$

を $\varepsilon \rightarrow 0_+$ として満たす。しかし、 $a(\frac{x}{\varepsilon}) \nabla u_\varepsilon$ の収束極限を考察する際、得られる情報が (3) と (5) 程度に留まるため、均質化問題では弱収束する関数同士の積の収束極限を考察しなければならない。すなわち、変数 s に依存しない (1) 及び、(2) により、 $a(\frac{x}{\varepsilon_n}) \nabla u_{\varepsilon_n}$ の $[L^2(\Omega)]^N$ 上の弱極限を j_{hom} とすると、一般に

$$j_{\text{hom}}(x) \neq \langle a(y) \nabla u_0(x) \rangle_y$$

を意味するため、図 1 に現れる巨視的構造を微視的構造の単純平均として特徴づけられず、 j_{hom} の特定が均質化問題の難点となる。そこで、様々な収束理論 (例えば、 H -収束 [10], 2 スケール収束 [3], [11], *unfolding* 法 [5] など) が考案され、これらを用いると結果的に

$$j_{\text{hom}}(x) = a_{\text{hom}} \nabla u_0(x), \quad a_{\text{hom}} e_k = \langle a(y)(\nabla_y \Phi_k(y) + e_k) \rangle_y, \quad k = 1, \dots, N$$

が示される。ここで、定数係数行列 (均質化行列) a_{hom} が図 1 に現れる巨視的構造に対応し、 $\Phi_k \in H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R}$ は次のセル問題:

$$(CP)_E \quad -\text{div}_y[a(y)(\nabla_y \Phi_k + e_k)] = 0 \quad \text{in } \square$$

の解であり、本小論全体を通して e_k は \mathbb{R}^N の標準基底の k 番目の基本ベクトル、 $H_{\text{per}}^1(\square) := \overline{C_{\text{per}}^\infty(\square)}^{\|\cdot\|_{H^1(\square)}}$, $C_{\text{per}}^\infty(A) := \{\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \rho \text{ is } A\text{-periodic}\}$, $A \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ を表し、“ \mathbb{R} ” は零平均 (すなわち、この場合は $\langle \Phi_k \rangle_y = 0$) を意味する。また、一般に $\Phi_k \neq 0$ であることから巨視的構造が微視的構造の単純平均にならないことが従う。以上より、再び Lax–Milgram の定理を用いると、 $(CP)_E$ の一意可解性が得られ、それに伴い均質化行列は一意的に定まり、結果的に部分列に依存せず

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x) dx = \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} a_{\text{hom}} \nabla u_0(x) \cdot \nabla \phi(x) dx \quad \text{for all } \phi \in H_0^1(\Omega)$$

が $\varepsilon \rightarrow 0$ として成り立ち、均質化方程式:

$$(E_0) \quad -\text{div}(a_{\text{hom}} \nabla u_0) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega)$$

が得られる。すなわち、 $(CP)_E$ を解きさえすれば (E_0) に現れる a_{hom} を明示的に表すことができるため、均質化問題では考える方程式毎に対応したセル問題を探し出すことは重要な問題である。

1.3 先行研究

方程式 (P_ε) は $p = 1$ のとき、線形拡散方程式を表す。線形拡散方程式に対する均質化問題の研究は、漸近展開法 [4] や 2 スケール収束 [7] を用いた結果などが知られている。ここでも拡散束 $a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}\right) \nabla u_\varepsilon$ の収束性が問題となるが、 (E_ε) との差異はほとんどなく、 $(CP)_E$ と同型のセル問題が得られ、均質化行列の表現も同様になることが知られている。ここで注目すべき結果は、ある特定のスケール (この場合は放物型スケール, $r = 2$) に於いてセル問題が

$$\partial_s \Phi_k - \text{div}_y[a(y)(\nabla \Phi_k + e_k)] = 0 \quad \text{in } \square \times J$$

となり、 (P_ε) だけでなく、セル問題も線形拡散方程式になる点である。すなわち、微視的構造が空間のみならず、時間にも依存するような時空均質化問題 (*space-time homogenization problem*) では、時空間に対する周期パラメータの (対数) 比 $0 < r < +\infty$ によって、均質化行列の様相が異なり、巨視的構造は特定の条件下で微視的構造の時間発展の影響を受けることを意味する。

一方、非線形拡散方程式に対する時空均質化問題の研究結果として、 $p = 1$ に対する (P_ε) の拡散項 $-\text{div}\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}\right) \nabla u_\varepsilon\right)$ を $-\text{div} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}, \nabla u_\varepsilon\right)$ のように拡張し、 p -Laplace 方程式などを包含した [6] や (P_ε) も包含するように $-\text{div} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\right)$ のように拡張した結果 [8] などが知られている。しかし、 (P_ε) に対するセル問題の特定までは考察されておらず、前節の j_{hom} 程度の情報量に留まってい

る. また, この場合, 漸近展開法によって形式的な議論を行うことも容易ではない. そこで, 本小論では, (P_ε) に対して (時空) 2 スケール収束理論を適用し, 均質化方程式の特定や均質化行列 a_{hom} の特徴づけ及び, その定性的性質の導出を行う.

2 時空 2 スケール収束

本節では, (時空) 2 スケール収束に関するいくつかの性質を証明なしに述べる. また, 本節全体を通して, $1 < q < +\infty$ とし, $1 < q' < +\infty$ をその Hölder 共役指数 (すなわち, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ を満たす) とする. まず, (時空) 2 スケール収束で用いるテスト関数を次のように定義する.

定義 2.1 (アドミシブルテスト関数). 可分なノルム空間 $(X, \|\cdot\|_X) \subset L^{q'}(\Omega \times I \times \square \times J)$ がアドミシブルテスト関数空間 (*admissible test function space*) であるとは, 任意の $\Psi \in X$ 及び, $\varepsilon > 0$ に対して, $(x, t) \mapsto \Psi(x, t, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r})$ が $\Omega \times I$ 上の可測関数であり, 以下を満たすときである.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left\| \Psi\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}\right) \right\|_{L^{q'}(\Omega \times I)} &= \|\Psi(x, t, y, s)\|_{L^{q'}(\Omega \times I \times \square \times J)}, \\ \left\| \Psi\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}\right) \right\|_{L^{q'}(\Omega \times I)} &\leq C \|\Psi(x, t, y, s)\|_X. \end{aligned}$$

またこのとき, $\Psi \in X$ をアドミシブルテスト関数 (*admissible test function*) という.

注意 2.2. 本小論では, $\Psi(x, t, y, s) = \phi(x)\psi(t)b(y)c(s)$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\psi \in C_c^\infty(I)$, $b \in C_{\text{per}}^\infty(\square)$, $c \in C_{\text{per}}^\infty(J)$ がアドミシブルテスト関数であることを用いる.

本小論では, アドミシブルテスト関数を用いて次のように (時空) 2 スケール収束を定義する.

定義 2.3 (時空 2 スケール収束). 関数 $u_\varepsilon \in L^q(\Omega \times I)$ が $u \in L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ に時空 2 スケール収束 (*space-time two-scale convergence*) するとは, (u_ε) が $L^q(\Omega \times I)$ 上の有界列であり, 任意のアドミシブルテスト関数 $\Psi \in X \subset L^{q'}(\Omega \times I \times \square \times J)$ に対して以下を満たすことを意味する.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_0^T \int_\Omega u_\varepsilon(x, t) \Psi\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}\right) dx dt = \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square u(x, t, y, s) \Psi(x, t, y, s) dy ds dx dt.$$

またこのとき, $u_\varepsilon \xrightarrow{2;2} u$ in $L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ と記述する.

注意 2.4 (弱収束と時空 2 スケール収束の関係性). 関数 $u_\varepsilon \in L^q(\Omega \times I)$ が $u \in L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ に時空 2 スケール収束するならば, u_ε は u の $\square \times J$ 上の平均値に $L^q(\Omega \times I)$ 上で弱収束することに注意する. 実際, アドミシブルテスト関数を注意 2.2 のように取り, $b(y) = c(s) \equiv 1$ とすれば,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_0^T \int_\Omega u_\varepsilon(x, t) \phi(x) \psi(t) dx dt = \int_0^T \int_\Omega \left[\int_0^1 \int_\square u(x, t, y, s) dy ds \right] \phi(x) \psi(t) dx dt$$

となり, 主張を得る. 従って, 時空 2 スケール収束は弱収束よりも詳細な情報 (具体的には零平均になる情報) を引き出すことができる. ここで, 定義 2.3 で課した (u_ε) の L^q -有界性が本質的であることに注意する (詳細は [9] の例 11, 12 を参照).

強収束性と時空 2 スケール収束の関係性を述べる上で, 次の周期関数に関する性質を用いる.

命題 2.5 (平均値の性質). 関数 $g \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$ を $g \in L^q(\square \times J) := \overline{C^\infty_{\text{per}}(\square \times J)}^{\|\cdot\|_{L^q(\square \times J)}}$ とし, $0 < r < +\infty$ とする. このとき, 任意の有界な開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $I \subset \mathbb{R}$ に対して

$$g\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}\right) \rightarrow \langle g \rangle_{y,s} := \int_0^1 \int_{\square} g(y,s) dy ds \quad \text{weakly in } L^q(\Omega \times I)$$

が成り立つ. ただし, ここでは $q = 1$ の場合も許し, $q = +\infty$ ならば, 汎弱収束の意味で成り立つ.

注意 2.6 (強収束と時空 2 スケール収束の関係性). 関数 u_ε が u に $L^1(\Omega \times I)$ 上で強収束するならば, 時空 2 スケール収束極限は u に一致する. 実際, アドミシブルテスト関数を注意 2.2 のように取り, $b(y)$ と $c(s)$ に対して命題 2.5 を用いると,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_0^T \int_{\Omega} u_\varepsilon(x,t) \phi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \psi(t) c\left(\frac{t}{\varepsilon^r}\right) dx dt &= \int_0^T \int_{\Omega} u(x,t) \phi(x) \langle b \rangle_y \psi(t) \langle c \rangle_s dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\square} u(x,t) \phi(x) b(y) \psi(t) c(s) dy ds dx dt \end{aligned}$$

が成り立つ. このようなアドミシブルテスト関数を用いて成り立つ事実は, 任意のアドミシブルテスト関数に対しても成り立つため主張を得る (詳細は [7] を参照). 従って, 時空 2 スケール収束極限は変数 y, s に依存しないことに注意する. 以上より, 時空 2 スケール収束は弱収束と強収束の中間層を分析可能にする収束理論と解釈できる.

以下, 時空 2 スケール収束に関する性質について述べる.

定理 2.7 (時空 2 スケールコンパクト性). 任意の $L^q(\Omega \times I)$ 上の有界列は時空 2 スケール収束する部分列を持つ.

定理 2.8 (勾配に対する時空 2 スケールコンパクト性). 関数列 (u_ε) を $L^q(I; W^{1,q}(\Omega))$ 上の有界列とし, その $L^q(\Omega \times I \times \square \times J)$ 上の時空 2 スケール収束極限を $u(x,t)$ とする. このとき, ある部分列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ と $u_1 \in L^q(\Omega \times I; L^q(J; W^{1,q}_{\text{per}}(\square)/\mathbb{R}))$ が存在して次が成り立つ.

$$\nabla u_{\varepsilon_n} \xrightarrow{2,2} \nabla u + \nabla_y u_1 \quad \text{in } [L^q(\Omega \times I \times \square \times J)]^N.$$

注意 2.9. 関数 u_1 の \square -周期性によって $\langle \nabla_y u_1 \rangle_y = 0$ が成り立つため, 勾配に対する時空 2 スケール収束では, 弱収束では取り扱うことができない情報を引き出していることに注意する.

定理 2.8 の系として以下が成り立つ.

系 2.10. 任意の $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $b \in C^\infty_{\text{per}}(\square)/\mathbb{R}$, $\psi \in C_c^\infty(I)$, $c \in C^\infty_{\text{per}}(J)$ に対して

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{u_{\varepsilon_n} - u}{\varepsilon_n}(x,t) \phi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \psi(t) c\left(\frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\square} u_1(x,t,y,s) \phi(x) b(y) \psi(t) c(s) dZ$$

が $\varepsilon_n \rightarrow 0_+$ として成り立つ. ここで, $dZ = dy ds dx dt$ であり, u_1 は定理 2.8 で現れた関数である.

注意 2.11. 系 2.10 では注意 2.2 で与えた $b(y)$ に $\langle b \rangle_y = 0$ が追加されていることに注意する.

3 主結果

本節では、本小論の主結果について述べる。

定理 3.1 (均質化定理, [2]). 各 $\varepsilon > 0$ に対して, $u_\varepsilon \in W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega))$ は $|u_\varepsilon|^{p-1}u_\varepsilon \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ を満たす (P_ε) の弱解とする. このとき, ある部分列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ と $u_0 \in W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega))$ 及び, $z \in L^2(\Omega \times I; L^2(J; H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R}))$ が存在して

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_n} &\rightarrow u_0 \text{ weakly in } W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega)), \\ |u_0|^{p-1}u_0 &\in L^2(I; H_0^1(\Omega)), \quad |u_{\varepsilon_n}|^{p-1}u_{\varepsilon_n} \rightarrow |u_0|^{p-1}u_0 \text{ weakly in } L^2(I; H_0^1(\Omega)), \\ a\left(\frac{x}{\varepsilon_n}, \frac{t}{\varepsilon_n}\right) \nabla |u_{\varepsilon_n}|^{p-1}u_{\varepsilon_n} &\xrightarrow{2,2} a(y, s) (\nabla |u_0|^{p-1}u_0 + \nabla_y z) \text{ in } [L^2(\Omega \times I \times \square \times J)]^N \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, u_0 は次の均質化方程式の弱解となる.

$$(P_0) \quad \begin{cases} \partial_t u_0(x, t) = \operatorname{div} j_{\text{hom}}(x, t), & x \in \Omega, t \in I, \\ |u_0|^{p-1}u_0(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in I, \quad u_0(x, 0) = u^0, x \in \Omega. \end{cases}$$

ただし,

$$j_{\text{hom}}(x, t) := \int_0^1 \int_{\square} a(y, s) (\nabla |u_0|^{p-1}u_0(x, t) + \nabla_y z(x, t, y, s)) dy ds \quad (6)$$

とする.

注意 3.2. 定理 3.1 の主張は, $2 \leq p < +\infty$ に対しても成り立つ.

次の定理によって, (6) は均質化行列 a_{hom} とベクトル $\nabla |u_0|^{p-1}u_0$ の積として表現することができる. ここで均質化行列 a_{hom} の表現がパラメータ $0 < r < +\infty$ に応じて変化することに注意する.

定理 3.3 (均質化行列の表現, [2]). 関数 u_0 を (P_0) の弱解とする. このとき (6) の表現を与える均質化行列 a_{hom} は $0 < r < +\infty$ の値に応じて次のように特徴づけられる.

(i) $0 < r < 2$ の場合, a_{hom} は定数行列で, 以下によって与えられる.

$$a_{\text{hom}} e_k = \int_0^1 \int_{\square} a(y, s) (\nabla_y \Phi_k(y, s) + e_k) dy ds. \quad (7)$$

ただし, $\Phi_k \in L^2(J; H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R})$ は次のセル問題の一意的な超関数解とする.

$$-\operatorname{div}_y (a(y, s) [\nabla_y \Phi_k(y, s) + e_k]) = 0 \text{ in } \mathcal{D}'_{\text{per}}(\square \times J).$$

(ii) $r = 2$ の場合, a_{hom} は (7) と同様に与えられるが, $\Phi_k(x, t, \cdot, \cdot) \in L^2(J; H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R})$ は, $u_0(x, t) = 0$ となる $(x, t) \in \Omega \times I$ に対して, $\Phi_k(x, t, \cdot, \cdot) \equiv 0$ とし, また, $u_0(x, t) \neq 0$ となる $(x, t) \in \Omega \times I$ に対して, $\Phi_k = p|u_0|^{p-1}\Psi_k$ とし, Ψ_k は次のセル問題の超関数解である.

$$\partial_s \Psi_k(x, t, y, s) - \operatorname{div}_y (a(y, s) [p|u_0(x, t)|^{p-1} \nabla_y \Psi_k(x, t, y, s) + e_k]) = 0 \text{ in } \mathcal{D}'_{\text{per}}(\square \times J).$$

よって a_{hom} は (x, t) の関数である. 特に, $u_0(x, t) = 0$ となる $(x, t) \in \Omega \times I$ に於いて, $a_{\text{hom}}(x, t)$ は $a(y, s)$ の単純平均である.

(iii) $2 < r < +\infty$ の場合, a_{hom} は定数行列で, 以下によって与えられる.

$$a_{\text{hom}} e_k = \int_{\square} \langle a(y, s) \rangle_s (\nabla_y \Phi_k(y) + e_k) dy.$$

ここで, $\Phi_k \in H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R}$ は次のセル問題の一意的な超関数解とする.

$$-\text{div}_y (\langle a(y, s) \rangle_s [\nabla_y \Phi_k(y) + e_k]) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'_{\text{per}}(\square).$$

特に, $r \neq 2$ に対して, u_0 は一意的に定まり, (u_ε) は u_0 へ全列収束する.

さらに, 各セル問題の解 Φ_k を用いることで均質化行列に関する以下の性質が得られる.

命題 3.4 (均質化行列の定性的性質, [2]). 定理 3.3 の仮定の下, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) (一様楕円性) 一様楕円性条件 (1) で与えられる定数 $\lambda > 0$ に対して

$$\lambda \alpha \leq a_{\text{hom}}(x, t) \xi \cdot \xi \leq \alpha, \quad \alpha = \sum_{k=1}^N \left(1 + \|\nabla_y \Phi_k(x, t, \cdot, \cdot)\|_{L^2(\square \times J)}^2 \right) |\xi_k|^2$$

が任意の $\xi \in \mathbb{R}^N$ に対して成り立つ. ただし, Φ_k は定理 3.3 で現れたパラメータ $0 < r < +\infty$ に対応するセル問題の超関数解である.

(ii) (対称性と非対称性) 「 $r \neq 2$ 」または「 $r = 2$ かつ $u_0(x, t) = 0$ 」のとき, $a_{\text{hom}}(x, t)$ は対称であり, 「 $r = 2$ かつ $u_0(x, t) \neq 0$ 」のとき, $a_{\text{hom}}(x, t)$ は非対称である.

注意 3.5. Fast Diffusion 方程式 ($0 < p < 1$) の場合でも, 定理 3.3 と命題 3.4 は同様に成り立つが, $r = 2$ のとき, $u_0(x, t) = 0$ となる $(x, t) \in \Omega \times I$ 上で a_{hom} が持つ性質が多孔質媒体方程式の場合と異なることに注意する. 実際, Fast Diffusion 方程式の場合, $u_0(x, t) = 0$ ならば, セル問題は $0 < r < 2$ の場合と一致し, 領域 Ω 全体で a_{hom} の一様楕円性が改良されるが, 多孔質媒体方程式の場合, u_0 の台の外側では, $\Phi_k \equiv 0$ のため, a_{hom} は $a(\frac{x}{\varepsilon})$ の単純平均となり一様楕円性は改良されない.

4 証明の概略

本節では, 3 節で述べた主結果に対する証明の概略を述べる. 証明の中心になるアイデアの 1 つは, (P_ε) の拡散項が非線形であるため, $v_\varepsilon = |u_\varepsilon|^{p-1} u_\varepsilon$ と置き, 以下の方程式について解析することである.

$$(P_\varepsilon)' \quad \begin{cases} \partial_t |v_\varepsilon|^{(1-p)/p} v_\varepsilon(x, t) = \text{div} \left(a \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r} \right) \nabla v_\varepsilon(x, t) \right), & x \in \Omega, t \in I, \\ v_\varepsilon(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \in I, \quad |v_\varepsilon|^{(1-p)/p} v_\varepsilon(x, 0) = u^0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

以降, 本小論全体を通して, $|v_\varepsilon|^{(1-p)/p} v_\varepsilon$ を $v_\varepsilon^{1/p}$ と記述する. まず, $(P_\varepsilon)'$ に対する弱解を次のように定義する.

定義 4.1 ($(P_\varepsilon)'$ の弱解). 関数 $v_\varepsilon \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ が $(P_\varepsilon)'$ の弱解であるとは,

$$(i) \quad v_\varepsilon^{1/p} \in W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega)),$$

(ii) $v_\varepsilon^{1/p}(t) \rightarrow u^0$ strongly in $H^{-1}(\Omega)$ as $t \rightarrow 0_+$,

(iii) $\left\langle \partial_t v_\varepsilon(t)^{1/p}, \Psi \right\rangle_{H_0^1(\Omega)} + A_\varepsilon(v_\varepsilon(t), \Psi) = 0$ for all $\Psi \in H_0^1(\Omega)$ a.e. in I

を満たすことを意味する. ただし $A_\varepsilon(v_\varepsilon, \Psi)$ は次の $H_0^1(\Omega)$ 上の双線形形式とする.

$$A_\varepsilon(u, v) = \int_{\Omega} a\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^r}\right) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad \text{for } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

本小論では, $(P_\varepsilon)'$ の適切性についての議論は省略する. 詳細は [1], [2] を参照されたい.

次に定理 3.1 を証明するために, 以下の一様有界性を用いる.

補題 4.2 (解の一様有界性). $(P_\varepsilon)'$ の解 $v_\varepsilon \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ に対して次が成り立つ.

(i) (v_ε) は $L^2(I; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(I; L^{(1+p)/p}(\Omega))$ 上で有界.

(ii) $(v_\varepsilon^{1/p})$ は $L^\infty(I; L^2(\Omega)) \cap L^2(I; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,2}(I; H^{-1}(\Omega))$ 上で有界.

注意 4.3. 関数列 $(v_\varepsilon^{1/p})$ の $L^2(I; H_0^1(\Omega))$ 上での有界性を得る上で $1 < p < +\infty$ を $1 < p < 2$ に制限していることに注意する.

この事実から以下の収束性が得られる.

補題 4.4. 関数 $v_\varepsilon \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ を $(P_\varepsilon)'$ の弱解とする. このとき, ある部分列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ 及び, $v_0 \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon_n} &\rightarrow v_0 && \text{weakly in } L^2(I; H_0^1(\Omega)), \\ v_{\varepsilon_n} &\rightarrow v_0 && \text{strongly in } L^{(p+1)/p}(\Omega \times I), \\ v_{\varepsilon_n}^{1/p} &\rightarrow v_0^{1/p} && \text{weakly in } L^2(I; H_0^1(\Omega)), \\ v_{\varepsilon_n}^{1/p} &\rightarrow v_0^{1/p} && \text{strongly in } L^2(\Omega \times I). \end{aligned}$$

さらに, 補題 4.2 と定理 2.8 を組み合わせることにより, 以下の収束性が得られる.

補題 4.5. 関数 v_0 を $(P_{\varepsilon_n})'$ の弱解 $v_{\varepsilon_n} \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ に対する $L^2(I; H_0^1(\Omega))$ 上の弱収束極限とする. このとき, $z \in L^2(\Omega \times I; L^2(J; H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R}))$ 及び, $w \in L^2(\Omega \times I; L^2(J; H_{\text{per}}^1(\square)/\mathbb{R}))$ が存在して以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} a\left(\frac{x}{\varepsilon_n}, \frac{t}{\varepsilon_n^r}\right) \nabla v_{\varepsilon_n} &\xrightarrow{2;2} a(y, s) (\nabla v_0 + \nabla_y z) && \text{in } [L^2(\Omega \times I \times \square \times J)]^N, \\ \nabla v_{\varepsilon_n}^{1/p} &\xrightarrow{2;2} \nabla v_0^{1/p} + \nabla_y w && \text{in } [L^2(\Omega \times I \times \square \times J)]^N. \end{aligned}$$

これらの事実を用いることで定理 3.1 が証明される. 詳細は, 昨年度の報告した [12] の定理 3.1 の証明と同様であるため省略する. ここでは, $v_\varepsilon^{1/p}$ の $L^2(I; H_0^1(\Omega))$ 上の有界性を用いないため, 全ての $1 < p < +\infty$ に対して定理 3.1 の主張が得られる.

次に, 定理 3.3 を示すために以下の補題を用いる.

補題 4.6. 関数 v_{ε_n} を $(P_{\varepsilon_n})'$ の弱解とする. また, u_0 を (P_0) の弱解とし, $v_0 = |u_0|^{p-1} u_0$ とする.

このとき、任意の $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $b \in C^\infty(\square)/\mathbb{R}$, $\psi \in C_c^\infty(I)$, $c \in C^\infty_{\text{per}}(J)$ に対して以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0_+} \varepsilon_n^{2-r} \int_0^T \int_\Omega \frac{v_{\varepsilon_n}^{1/p} - v_0^{1/p}}{\varepsilon_n} (x, t) \phi(x) b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \psi(t) \partial_s c\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) dx dt \\ & - \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0_+} \int_0^T \int_\Omega a\left(\frac{x}{\varepsilon_n}, \frac{t}{\varepsilon_n}\right) \nabla v_{\varepsilon_n}(x, t) \cdot \phi(x) \nabla_y b\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right) \psi(t) c\left(\frac{t}{\varepsilon_n}\right) dx dt = 0. \end{aligned}$$

注意 4.7. 定理 3.3 の証明では系 2.10 を用いるため、注意 2.2 で与えたテスト関数 $b(y)$ に $\langle b \rangle_y = 0$ が追加されていることに注意する。

以下、紙面の都合上 $r = 2$ の場合に於ける結果のみ概略を述べる。まず、 $r = 2$ に対して、補題 4.6 を適用すると、補題 4.5 と系 2.10 から

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square w(x, t, y, s) \phi(x) b(y) \psi(t) \partial_s c(s) dy ds dx dt \\ & - \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 \int_\square a(y, s) \left(\nabla v_0(x, t) + z(x, t, y, s) \right) \cdot \phi(x) \nabla_y b(y) \psi(t) c(s) dy ds dx dt = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\psi \in C_c^\infty(I)$ の任意性から変分法の基本補題より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \int_\square \partial_s w(x, t, y, s) b(y) c(s) dy ds \\ &+ \int_0^1 \int_\square a(y, s) (\nabla v_0(x, t) + \nabla_y z(x, t, y, s)) \cdot \nabla_y b(y) c(s) dy ds \quad \text{a.e. in } \Omega \times I \quad (8) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $w \in L^2(\Omega \times I; W^{1,2}(J; (H^1_{\text{per}}(\square)/\mathbb{R})^*))$ であることを用いた。さらに、 z と w について以下の関係性が得られる。

補題 4.8. 関数 v_0, z, w を補題 4.5 と同一の関数とする。このとき、

$$z(x, t, y, s) = p|v_0(x, t)|^{(p-1)/p} w(x, t, y, s) \quad \text{for a.e. } (x, t, y, s) \in \Omega \times I \times \square \times J$$

が成り立つ。

従って、定理 3.3 の (ii) のように $\Phi_k(x, t, \cdot, \cdot) \in L^2(J; H^1_{\text{per}}(\square)/\mathbb{R})$ を定め、

$$\tilde{w}(x, t, y, s) = \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} v_0(x, t) \Psi_k(y, s)$$

と置くと、 $v_0(x, t) \neq 0$ となる $(x, t) \in \Omega \times I$ に対して、 w を \tilde{w} としても (8) を満たす。このとき w と \tilde{w} に対する弱形式 (8) の差を取り、テスト関数 $b(y)c(s)$ として $(y, s) \mapsto (w - \tilde{w})(x, t, y, s)$ を選び、両辺を $\square \times J$ 上で積分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 \frac{d}{ds} \|(w - \tilde{w})(x, t, \cdot, s)\|_{L^2(\square)}^2 ds}_{=0 \text{ by periodicity in } s} \\ &+ p|v_0(x, t)|^{(p-1)/p} \int_0^1 \int_\square a(y, s) \nabla_y (w - \tilde{w})(x, t, y, s) \cdot \nabla_y (w - \tilde{w})(x, t, y, s) dy ds \\ &\geq \lambda p |v_0(x, t)|^{(p-1)/p} \|\nabla_y (w - \tilde{w})(x, t)\|_{L^2(\square \times J)}^2 \geq \frac{\lambda p |v_0(x, t)|^{(p-1)/p}}{C} \|(w - \tilde{w})(x, t)\|_{L^2(\square \times J)}^2 \end{aligned}$$

となり, $w = \tilde{w}$ と書ける. ただし, 最後の不等式は Poincaré–Wirtinger の不等式を用いた. 以上より,

$$\begin{aligned} j_{\text{hom}}(x, t) &= \int_0^1 \int_{\square} a(y, s) (\nabla v_0(x, t) + \nabla_y z(x, t, y, s)) dy ds \\ &= \sum_{k=1}^N \underbrace{\left(\int_0^1 \int_{\square} a(y, s) (\nabla_y \Phi_k(y, s) + e_k) dy ds \right)}_{= a_{\text{hom}} e_k} \partial_{x_k} v_0(x, t) \end{aligned}$$

が得られ a_{hom} は (7) のように書けるため証明が完了する.

注意 4.9. 省略した $r \neq 2$ の場合も補題 4.6 を用いることが証明の議論の中心となる. また, 命題 3.4 の証明は (7) とセル問題を用いて示される. これらの詳細は [2] を参照されたい.

5 結論

本小論では, 多孔質媒体方程式に対する時空均質化問題について報告した. 具体的には時空 2 スケール収束を用いて (P_ε) に対する均質化方程式 (P_0) を導出し, 均質化行列を明示的に特徴づけた. これらの結果は, 線形拡散に於ける結果 [7] の拡張になるだけでなく, 時空間周期の対数比が放物型スケールの場合, 均質化行列が変動係数行列として特徴づけられることを示し, 線形拡散には現れない非線形特有の (臨界) 現象を特定した. さらに, 均質化行列に関する定性的な性質 (一様楕円性や対称性) を導出し, 臨界現象が起こったとき, 多孔質媒体方程式と Fast Diffusion 方程式の拡散の性質 (有限伝播性と無限伝播性) の違いによって均質化行列が持つ性質が異なることを明らかにした.

参考文献

- [1] G. Akagi, Doubly nonlinear evolution equations governed by time-dependent subdifferentials in reflexive Banach spaces, *J. Differential Equations* **231** (2006), 32–56.
- [2] G. akagi, T. Oka, Space-time homogenization for nonlinear diffusion, arXiv:2007.09977.
- [3] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 1482–1518.
- [4] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Studies in Mathematics and Its Applications, vol. 5, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [5] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, *The periodic unfolding method. Theory and applications to partial differential problems*, Series in Contemporary Mathematics, vol. 3, Springer, Singapore, 2018.
- [6] L. Flodén, M. Olsson, Reiterated homogenization of some linear and nonlinear monotone parabolic operators, *Canad. Appl. Math. Quart.* **14** (2006), 149–183.
- [7] A. Holmbom, Homogenization of parabolic equations an alternative approach and some corrector-type results, *Appl. Math.* **42** (1997), 321–343.
- [8] H. Jian, On the homogenization of degenerate parabolic equations, *Acta Math. Appl. Sinica.* **16** No.1(2000), 100–110.
- [9] D. Lukkassen, G. Nguetseng, P. Wall, Two-scale convergence, *Int. J. Pure Appl. Math.* **2** (2002), 35–86.
- [10] F. Murat, L. Tartar, H-convergence, In: *Topics in the mathematical modelling of composite materials*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol.31, Birkhäuser Boston, Boston, MA, pp.21–43, 1997.
- [11] G. Nguetseng, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, *SIAM J. Math. Anal.* **20** (1989), 608–623.
- [12] 岡 大將, Fast Diffusion 方程式に対する時空均質化問題, *北海道大学数学講究録* **178** (2020), 359–368.