Positive-Fefferman 空間の幾何学

埼玉大学大学院 理工学研究科 理工学専攻
大山人紀 (Toki OHYAMA)

概要

接触リーマン多様体上には, S^1 束である Fefferman 空間が存在する. この空間は標準的に Lorenz 型計量をもつが, この Lorenz 計量はある変形を行うことでリーマン計量にできる. このリーマン計量を含めて positive-Fefferman 空間と呼ぶ. positive-Fefferman 空間の特徴は, リーマン沈め込みの構造をもつこと, スピン構造をもつことである. 講演では, この空間のリーマン幾何の性質とスピン幾何について, 現在分かっている事柄を説明していく.

1 準備

まず, 本講演で重要になるリーマン沈めこみとスピン幾何の定義や基本的な性質について簡単に述べておく. ここで, 多様体とは連結かつパラコンパクトな C^∞ 多様体を意味する.

1.1 リーマン沈めこみ

今, 沈めこみ $\pi : N \to M$[*1] の N と M がそれぞれリーマン計量 g_N と g_M をもつとする. この状況を $\pi : (N, g_N) \to (M, g_M)$ で表す.

$\pi : (N, g_N) \to (M, g_M)$ に対して, TN の部分束である垂直ベクトル束 $\mathcal{V}$ と水平ベクトル束 $\mathcal{H}$ が,

$$\mathcal{V} := \bigcup_{y \in N} \mathcal{V}_y, \quad \mathcal{V}_y := \ker(\pi_*)_y$$

$$\mathcal{H} := \mathcal{V}^\perp$$

によって定まる. 明らかに, $TN = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ である.

定義 1. $\pi : (N, g_N) \to (M, g_M)$ がリーマン沈めこみであるとは, 各点 $y \in N$ において,

$$(\pi_*)|_{\mathcal{H}_y} : \mathcal{H}_y \to T_{\pi(y)}M$$

が等長同型であるときにいう.

この定義より直ちに, リーマン沈めこみ $\pi : (N, g_N) \to (M, g_M)$ に関して, π による等長同型

$$(\mathcal{H}, g_N|_{\mathcal{H}}) \cong (\pi^* TM, \pi^* g_M), \quad v_y \mapsto (\pi(y), \pi_*(v_y))$$

[*1] つまり, 各点 $y \in N$ で $(\pi_*)_y : T_y N \to T_{\pi(y)}M$ が全射であるとする.

が誘導されることがわかる．一般のリーマン沈めこみについては, [O'N66, Gr67, Be] に詳しく載っている．

1.2　スピン構造

スピン群 $\mathrm{Spin}(n)$ とは, 特殊直交群 $SO(n)$ の普遍被覆群として定義される群である．特に, この被覆射は二重被覆になっている．ここでは, この普遍被覆射を $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ と表記する．

定義 2. 有向リーマン多様体 (N^n, g) 上に, 主 Spin 束 $\mathrm{Spin}(N)$ と束写像

$$\Phi : \mathrm{Spin}(N) \to SO(N)$$

が存在するとする．ここで, $SO(N)$ とは, 各ファイバーが正の正規直交枠の全体である主 $SO(n)$ 束である．このとき, 組 $(\mathrm{Spin}(N), \Phi)$ をスピン構造とよぶ．

スピン構造をもつ同値条件は, ある特性類で述べられる．

命題 1.1. *有向多様体 N がスピン構造をもつための必要十分条件は, N の第二種 Stiefel–Whitney 類が消えることである．*

Stiefel–Whitney 類 w とは, 以下の公理から特徴づけられる特性類である (cf. [MS]):

SW1 ランク n の実ベクトル束 E (底空間を M) に対して,

$$w_0(E) = 1 \in H^0(M; \mathbb{Z}_2), \qquad w_i(E) \in H^i(M; \mathbb{Z}_2) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

を対応させる．

SW2 束写像 $\bar{f} : E \to F$ について, $w(E) = f^* w(F)$ となる．ここで, f とは, E と F の底空間を M, N とするとき束写像 $\bar{f}$ から定まる $f : M \to N$ である．

SW3 同じ多様体上のベクトル束 E と F について, $w(E \oplus F) = w(E) \cdot w(F)$ となる．

SW4 円周 $\mathbb{R}P^1$ 上の標準実ライン束 γ_1^1 について, $w(\gamma^1)_1 \neq 0$ である．

また, スピン構造の拡張にスピン c 構造がある．スピン構造とは $SO(M)$ に二重被覆するスピン束であったが, スピン c 構造とは複素ライン束 L の自由度を加えた $SO(M) \times U(L)$ に二重被覆するスピン c 束である．ここで, スピン c 群とは, $\mathrm{Spin}(n)$ と $U(1)$ の両方に含まれる ± 1 でそれらの積を割った群である:

$$\mathrm{Spin}^c(n) \coloneqq \mathrm{Spin}(n) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1) \coloneqq (\mathrm{Spin}(n) \times U(1))/\{\pm 1\}.$$

定義 3. 有向リーマン多様体 (N, g) と複素ライン束 L に関して, 主 Spin 束 $\mathrm{Spin}^c(N)$ と束写像

$$\Phi^c : \mathrm{Spin}^c(N) \to SO(N) \times U(L)$$

が存在するとする．この組 $(\mathrm{Spin}^c(N), \Phi^c)$ をスピン c 構造と呼ぶ．

$\mathbb{Z}$ 係数のコホモロジー類 α を $\mathbb{Z}_2$ 係数のコホモロジー類に移した元を $\alpha \mod 2$ と表記する．

命題 1.2. 有向多様体 N がスピン c 構造をもつための必要十分条件は, ある複素ライン束 L が存在してその第一チャーン類 $c_1(L)$ が

$$w_2(N) = c_1(L) \mod 2 \quad in \quad H^2(N, \mathbb{Z}_2)$$

を満たすことである.

スピン構造 (またはスピン c 構造) をもつと, スピノール束という複素ベクトル束が誘導される. このスピノール束は Clifford 代数が作用しスピノール接続をもち hermite 内積をもつ. スピン幾何では様々な結果が知られており, 例えば物性物理にも深い関係がある Atiyah–Singer 指数定理はよく知れている. より詳しいスピン幾何については, [LM, BGV, Fr, Mo] などを参照してほしい.

1.3 接触リーマン多様体

定義 4. M^{2n+1} 上の 1 形式 θ が, 各点で $\theta \wedge (d\theta)^n \neq 0$ を満たすとき, 接触形式という. (M, θ) を接触多様体という.

接触多様体 (M, θ) には, Reeb 場 ξ が一意に存在している. Reeb 場とは,

$$\theta(\xi) = 1, \quad \xi \rfloor d\theta = 0$$

で特徴づけられるベクトル場である. また, 接触多様体の接束は,

$$TM = H \oplus \mathbb{R} \cdot \xi, \quad H := \ker \theta$$

というベクトル束の分解を引き起こす.

定義 5. 接触多様体 $(M^{2n+1}, \theta : \xi)$ に, 以下をみたすリーマン計量 g と接束の自己束写像 J があるとする:

$$J^2 X = -X + \theta(X)\xi, \quad g(X, Y) = d\theta(X, JY) + \theta(X)\theta(Y).$$

この組 $(\theta : \xi, g, J)$ を接触リーマン構造と呼び, $(M, \theta : \xi, g, J)$ を接触リーマン多様体という.

接触多様体には接触リーマン構造になる (g, J) が存在することが知られている (cf. [Bl]). ただし, 接触構造に対して, 接触リーマン構造は一意ではない. また, 接触リーマン構造を H に制限すると, 簡単な計算より $(H, g|_H, J|_H)$ が Hermite 束になることがわかる. 特に, H 上では,

$$d\theta(X, Y) = g(JX, Y) \qquad (X, Y \in H)$$

を満たしている事には注意してほしい. この Hermite 構造より, H を複素化した $H^{\mathbb{C}}$ の分解

$$H^{\mathbb{C}} = H_+ \oplus H_- \qquad H_\pm := \{X \in H^{\mathbb{C}} \mid JX = \pm iX\}$$

と $H^{\mathbb{C}}$ のユニタリー枠 $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{\bar{1}}, \ldots, \xi_{\bar{n}})$ を得る. ξ を加えた $(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{\bar{1}}, \ldots, \xi_{\bar{n}})$ は $TM^{\mathbb{C}}$ の枠になり, これを M のユニタリー枠と呼ぶ.

上で接触リーマン多様体は Hermite 束をもつことを述べた. スピン幾何の一般論より, Hermite 束から標準スピン c 構造が構成される (cf. [Mo, Fr]). このスピン c 構造は TM のスピン c 構造に拡張され, 接触リーマン多様体は標準的スピン c 構造をもつ (cf. [Pe03]).

次に, よく使う接続を紹介する. 一般に接触リーマン多様体上の接続として, Tanno 接続[*2]はよく知られている. Tanno 接続 ∇^T は, Levi–Civita 接続 ∇^g を用いて

$$\nabla^T_X Y = \nabla^g_X Y - \frac{1}{2}\theta(X)Y - \theta(Y)\nabla^g_X \xi + (\nabla^g_X \theta)(Y)\xi$$

と表される. この Tanno 接続の hermite 部分を抽出した接続が Tanno–Nagase 接続 ∇^{TN} である. つまり, ∇^{TN} は

$$\nabla^{TN}_X Y = \nabla^T_X Y - \frac{1}{2}J(\nabla^T_X J)(Y)$$

で定められる. Tanno–Nagase 接続は次の性質を満たす.

命題 1.3. *Tanno–Nagase* 接続 ∇^{TN} は以下を満たす. また, 以下の条件を満たす接続はただ一つ存在する.

$$\nabla^{TN}\theta = 0, \qquad \nabla^{TN} g_M = 0, \qquad \nabla^{TN} J = 0$$

$$T(X_+, Y_+) = \frac{1}{4}[J_M, J_M](X_+, Y_+) \qquad (X_+, Y_+ \in \Gamma(H_+))$$

$$T(X_+, Y_-) = i g_M(X_+, Y_-) \qquad (X_+ \in \Gamma(H_+), Y_- \in \Gamma(H_-))$$

$$J \circ \tau + \tau \circ J = 0$$

ここで, $T(X,Y) = \nabla^{TN}_X Y - \nabla^{TN}_Y X - [X,Y]$, $\tau = \xi \rfloor T$, $[J_M, J_M]$ は *Nijenhuis* テンソルである.

この接続 ∇^{TN} の曲率 $F(\nabla^{TN})$ に関して, 2 形式 $\mathrm{Ric}^{\nabla^{TN}}$ と関数 $s^{\nabla^{TN}}$ を

$$\mathrm{Ric}^{\nabla^{TN}}(X,Y) = \sum g(F(\nabla^{TN})(X,Y)\xi_\alpha, \xi_{\bar\alpha}), \qquad s^{\nabla^{TN}} = \sum \mathrm{Ric}^{\nabla^{TN}}(\xi_\alpha, \xi_{\bar\alpha})$$

と定める. ここで, $(\xi_1, \ldots \xi_n, \xi_{\bar 1}, \cdots, \xi_{\bar n})$ は $H^{\mathbb{C}}$ のユニタリー枠である. この $\mathrm{Ric}^{\nabla^{TN}}$ と $s^{\nabla^{TN}}$ をそれぞれ pseudo リッチ曲率と pseudo スカラー曲率とよぶ.

2 Positive-Fefferman 空間

Fefferman 空間は, C. Fefferman によって複素空間のある超平面上の主 S^1 束として定められ, J. M. Lee によって接触リーマン多様体にまで拡張されたものである ([Fe76, Le86]). Fefferman 空間では, Fefferman 形式 σ が重要な役割を担い, これにより Fefferman 空間に CR 共形不変な Lorentz 計量が定まる. この Feffeman 空間の幾何学は, C. Lee, H. Baum, M. Nagase らによって様々な結果が得られている. 特に, [Bu99, Na1902, NO20] は $F(M)$ 上の Lorentz スピン幾何に関する結果である[*3].

ここでは, これらの話題には触れず, 講演者の研究対象である positive-Fefferman 空間について述べていく.

[*2] generated Tanaka–Webster 接続, Tanaka-Webster-Tanno 接続とも呼ばれることがある.

[*3] [Bu99] に関しては, 正確には $F(M)$ の主 S^1 としての平方根をとった主 S^1 束上の Lorentz スピン幾何であり, 底空間の M がスピン構造をもつことを仮定している.

2.1 Fefferman 空間と Fefferman 形式

接触リーマン多様体 $(M^{2n+1}, \theta : \xi, g_M, J_M)$ とする．複素ライン束 K を

$$K \coloneqq \{\eta \in \wedge^{n+1}(T^*M \otimes \mathbb{C}) \mid X_- \rfloor \eta = 0 \quad \forall X_- \in H_-\}$$

と定める．K から各ファイバーの原点を除いたものを K_0 と表記する．明らかに, 正の実数は K_0 に自由かつ推移的に作用し, この作用による商空間を

$$F(M) \coloneqq K_0/\mathbb{R}$$

とする．このとき, $\eta \in K_0$ による $F(M)$ の元を $[\eta]$ と表記する．$F(M)$ は M 上の主 S^1 束となる．この射影を π とする．

補題 2.1. $\eta \in K_0$ について, ある $\lambda_\eta > 0$ が一意に存在して,

$$i^{n^2} n! \, (\xi \rfloor \eta) \wedge \overline{(\xi \rfloor \eta)} = \lambda_\eta (d\theta)^n$$

この補題より, 単射写像

$$\iota : F(M) \to K, \quad [\eta] \mapsto \eta/\sqrt{\lambda_\lambda}$$

が定まる．また, K 上にはトートジー形式 $\mathcal{T}$ が存在する．トートジー形式 $\mathcal{T}$ とは

$$\mathcal{T}_{[\eta]}(X_0, \ldots, X_n) \coloneqq \eta_x({\pi'}_* X_0, \ldots, {\pi'}_* X_n)$$

で定まる $n+1$ 形式である．ここで, π' は $K \to M$ の射影, $x = \pi([\eta])$ である．今, $\mathcal{I} \coloneqq \iota^* \mathcal{T} \in \Omega^{n+1}(F(M))$ とする．

補題 2.2. 次を満たす $\mathcal{E} \in \Omega^n(F(M))$ が一意に存在する:

$$\mathcal{I} = \pi^* \theta \wedge \mathcal{E}$$

この準備のもと次の命題がいえる．

命題 2.3 (cf. [Na1901])**.** 次をみたす $\sigma \in \Omega^1(M)$ が一意に存在する:

$$d\mathcal{I} = i(n+2)\sigma \wedge \mathcal{I} + e^{i\varphi}\pi^* \mathcal{W}$$

$$\sigma \wedge d\mathcal{E} \wedge \bar{\mathcal{E}} = \mathrm{tr}(d\sigma) i\sigma \wedge (\pi^*\theta) \wedge \mathcal{E} \wedge \bar{\mathcal{E}}$$

この σ を Fefferman 形式と呼び．次に σ の重要な性質を紹介する．

命題 2.4. $i(n+2)\sigma$ は $F(M)$ の *Ehresmann* 型接続になる．

接続に関する一般論より, 接続 $i(n+2)$ によって, $F(M)$ の接束は水平分布 $\mathcal{H}$ と垂直分布 $\mathcal{V}$ に分解される (cf. [KN1])．つまり, $\mathcal{H} = \ker(i(n+2)\sigma)$, $\mathcal{V} = \ker(\pi_*)$. で与えられ,

$$TF(M) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$$

となる．ここで, 水平分布から定まる $X \in \Gamma(TM)$ の水平リフトを X^* と表記する．また, $\mathrm{rk}(\mathcal{V}) = 1$ より基本ベクトル場は本質的にただ一つである．この基本ベクトル場を接続 $i(n+2)\sigma$ で正規化したものを, Σ と表記する．つまり,

$$\Sigma_p = \frac{1}{n+2}\left(\frac{d}{dt}p.e^{it}|_{t=0}\right) \qquad p \in F(M).$$

以上で, $F(M)$ で重要な Fefferman 形式 σ が構成された．この σ を用いて, $F(M)$ 上にリーマン計量を定める．

定義 6. $F(M)$ 上の $(0,2)$ テンソル g を

$$g \coloneqq \pi^* g_M + \sigma \otimes \sigma,$$

と定める．

明らかに, g は $F(M)$ 上のリーマン計量であり, $\pi : (F(M), g) \to (M, g_M)$ はリーマン沈めこみになる．つまり, 次が等長同型になる:

$$\pi_*|_{\mathcal{H}} : (\mathcal{H}_p, g_p) \cong (T_{\pi(p)}M, (g_M)_{\pi(p)}).$$

さらに, $TF(M)$ には底空間の擬概複素構造から概複素構造が定まる．ここで,

$$TF(M) = \pi^*_{\mathcal{H}} H \oplus \mathbb{R}^2_{\pi^*_{\mathcal{H}}\xi, \Sigma} \qquad (H = \ker\theta)$$

となることに注意しておく．ここで, $\mathbb{R}^2_{\pi^*_{\mathcal{H}}\xi, \Sigma}$ は ξ^* と Σ で構成されるランク 2 の実自明束である．

定義 7. $(1,1)$ テンソル $J = J_1 + J_2$ *(*$J_1 \in \mathrm{End}(\pi^*_{\mathcal{H}} H)$, $J_2 \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2_{\xi^*, \Sigma})$*)* を

$$J_1 \coloneqq \pi^*_{\mathcal{H}} \circ J_M \circ \xi*, \qquad J_2 : \begin{cases} \xi^* \mapsto \Sigma \\ \Sigma \mapsto \xi^* \end{cases}$$

で定まる．

簡単な計算より, J が概複素構造になること, $(F(M), g, J)$ が概 Hermite 束になることがわかる．

定義 8. 上記で定めた $(F(M), g, J)$ を *positive-Fefferman* 空間と呼ぶ．

2.2 positive-Fefferman 空間の基本的性質

ここでは, positive-Fefferman 空間 $(F(M), g, J)$ の基本的性質をみていく．ここのリーマン沈めこみの性質は, [Gr67, O'N66, Be] を参考にした．まず, 次を定めておく．

$$\mathcal{F}(\sigma) \coloneqq \frac{i}{n+2}\left(\mathrm{Ric}^{\nabla^{TN}} + \frac{id(s^{\nabla^{TN}}\theta)}{2(n+1)}\right)$$

これを π で持ち上げて定数 $n+2$ をかけたものが, $i(n+2)\sigma$ の曲率になる．つまり,

$$F(i(n+2)\sigma) = (n+2)\pi^*\mathcal{F}(\sigma).$$

最初に, $F(M)$ 上の特殊なベクトル場 ξ^* と Σ が Killing 場になる条件について紹介する．

命題 2.5. Σ は *Killing* 場である.

命題 2.6. ξ^* が *Killing* 場になるための必要十分条件は, 次の二条件を満たすことである:

- $\xi \rfloor \mathcal{F}(\sigma) = 0$
- ξ が *Killing* 場.

次に $(F(M), g, J)$ の基本二次形式と可積分性について紹介する. ここで, 基本二次形式 ω とは, $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$ で定まる 2 形式である.

命題 2.7. $X, Y \in H$ とする.

$$d\omega = 0 \qquad on \quad \pi_{\mathcal{H}}^* H$$

$$(d\omega)(X^*, Y^*, \xi^*) = -\mathcal{F}(\sigma)(X, Y), \quad (d\omega)(\pi_{\mathcal{H}}^* X, \pi_{\mathcal{H}}^* Y, \Sigma) = d\theta(X, Y)$$

$$(d\omega)(X^*, \xi^*, \Sigma) = 0$$

この命題の二段目の第二式より, ω はシンプレクティック形式にならないことがわかる.

命題 2.8. J が可積分になるための必要十分条件は, 以下の条件を満たすことである:

- J_M が可積分,
- $\xi \rfloor \mathcal{F}(\sigma) = 0$ かつ $\mathcal{F}(\sigma)$ が J 不変.

最後に, $(F(M), g)$ の曲率 R が (M, g_M) の曲率 $\underline{R}$ を用いて表されることを紹介する[*4](cf. [O'N66, Gr67, Be]).

命題 2.9. $X, Y, Z, W \in TM$ とする.

$$R(X^*, \Sigma, Z^*, \Sigma) = g(h^2(\pi_{\mathcal{H}}^* X), \pi_{\mathcal{H}}^* Z)$$

$$R(X^*, Y^*, Z^*, \Sigma) = \frac{1}{2}(\nabla^g_{\pi_{\mathcal{H}}^* Z} \mathcal{F}(\sigma))(X, Y)$$

$$\begin{aligned} R(X^*, Y^*, Z^*, W^*) = {} & \underline{R}(X, Y, Z, W) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(\sigma)(X, Y)\mathcal{F}(\sigma)(Z, W) \\ & - \frac{1}{4}\mathcal{F}(\sigma)(Y, Z)\mathcal{F}(\sigma)(X, W) - \frac{1}{4}\mathcal{F}(\sigma)(X, Z)\mathcal{F}(\sigma)(Y, W) \end{aligned}$$

これよりリッチ曲率 Ric についても, 底空間のリッチ曲率 $\underline{\mathrm{Ric}}$ によって表されることがわかる[*5].

系 2.10. $\mathrm{Ric} = \pi^* \underline{\mathrm{Ric}} + |\mathcal{F}(\sigma)|^2 \sigma \otimes \sigma$

これより, 直ちに次がわかる.

系 2.11. g が *Einstein* 計量になるための必要十分条件は, 次の二条件である.

- g_M が *Einstein* 計量

[*4] ここでは, ∇ の曲率を, $[\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ としている.
[*5] 曲率 R のリッチ曲率を $\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum R(e_i, X, Y, e_i)$ とする. ここで (e_i) は正規直交枠である.

- g_M の *Einstein* 定数を λ とすると，$|\mathcal{F}(\sigma)|^2 = \lambda$.

さらにスカラー曲率については次が成り立つ．

系 2.12. $s = \pi^* s + |\mathcal{F}(\sigma)|^2$

2.3 positive-Fefferman 空間のスピン幾何

$(F(M), g)$ はスピン構造をもつことが知られている (命題 2.14)．また，よく知られているようにスピン構造は $H^1(F(M), \mathbb{Z})$ と一対一対応をもつが，講演者は，この中で，標準的スピン構造を構成することができた．その構成法を以下で紹介していく．そのアイデアの大部分は [NO20] に起因している．また，この標準的スピン構造に関するスピン幾何については，本講演に譲ることとする．

補題 2.13. K を $\pi : F(M) \to M$ で引き戻した $\pi^* K$ の第一チャーン類は消える．つまり，$c_1(\pi^* K) = 0$.

命題 2.14 ([NO20])**.** $F(M)$ の第二種 *Stiefel–Whitney* 類は消える．つまり，$(F(M), g)$ はスピン構造をもつ．

$TF(M) = \pi_{\mathcal{H}}^* H \oplus \mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^* \xi, \Sigma}$ と命題 2.14 から，Stiefel–Whitney 類の公理を用いると，$w_2(TF(M)) = w_2(\pi_{\mathcal{H}}^* H)$ がいえる．よって，ベクトル束 $\pi_{\mathcal{H}}^* H$ もスピン構造をもつことがわかる．

一方，$(F(M), g, J)$ には，概 Hermite 多様体であるから，この構造から誘導される標準スピン c 束 $(\mathrm{Spin}^c(\pi_{\mathcal{H}}^* H), \Phi^c_{\pi_{\mathcal{H}}^* H})$[*6]が存在した (cf. §1.3):

$$\Phi^c_{\pi_{\mathcal{H}}^* H} : \mathrm{Spin}^c(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \to SO(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \times U(\pi^* K^{-1}) \tag{1}$$

ここで，スピン c 群が $\mathrm{Spin}^c(2n) = \mathrm{Spin}(2n) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1)$ と表記されることから，上のスピン c 束を形式的に

$$\mathrm{Spin}^c(\pi_{\mathcal{H}}^* H) = \mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \times_{\mathbb{Z}_2} U(\pi^* K^{-1/2}) \tag{2}$$

と表記する．注意だが，右辺の $\mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H)$ と $U(\pi^* K^{-1/2})$ は主束としては存在せず局所的に存在するものである．特に，これらはコサイクル条件が満たさないが，$\{\phi_{\alpha\beta}\}$ を変換関数とした際に

$$\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\gamma}\phi_{\gamma\alpha} = \pm 1$$

は満たす．

しかし，上式の $U(\pi^* K^{-1/2})$ は局所的にしか定まっていない束であるが，補題 2.13 より，適切にねじることで自明束になることがわかる (適切なねじり方は後述する)．この適切なねじりを (2) の右辺全体で行い，このねじりのあとにできる束を $\widetilde{\ }$ を付けたもので表記すると，

$$\mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \times_{\mathbb{Z}_2} U(\pi^* K^{-1/2}) = \widetilde{\mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H)} \times_{\mathbb{Z}_2} U(\widetilde{\pi^* K^{-1/2}}) = \widetilde{\mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H)} \times_{\iota} \mathrm{Spin}^c(2n)$$

[*6] このスピン c 構造は底空間の Hermite 束 H から定まる H の標準スピン c 構造を π で持ち上げたものと一致する．

となる．ここで, 標準的包含 $\iota : \mathrm{Spin}(2n) \to \mathrm{Spin}^c(2n)$ である．特に, $\mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \coloneqq \widetilde{\mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H)}$ は $F(M)$ 上の主 Spin 束である．よって, (1) は, 簡約され, $\pi_{\mathcal{H}}^* H$ のスピン構造

$$\Phi_{\pi_{\mathcal{H}}^* H} : \mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \to SO(\pi_{\mathcal{H}}^* H)$$

を得る．このスピン構造は TM に拡張される．実際, $TF(M) = \pi_{\mathcal{H}}^* H \oplus \mathbb{R}^2_{\pi_{\mathcal{H}}^* \xi, \Sigma}$ より, 標準的包含 $SO(2n) \to SO(2n+2)$ によって,

$$SO(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \times SO(2n+2) = SO(TF(M))$$

となる．よって, 標準的包含 $\mathrm{Spin}(2n) \to \mathrm{Spin}(2n+2)$ によって, $\mathrm{Spin}(F(M)) \coloneqq \mathrm{Spin}(\pi_{\mathcal{H}}^* H) \times \mathrm{Spin}(2n+2)$ とすると, $(F(M), g)$ のスピン構造

$$\Phi : \mathrm{Spin}(F(M)) \to SO(TF(M))$$

を得る．

最後に $U(\pi^* K^{-1/2})$ を自明束にするねじり方について説明する．これは $\pi^* K$ の自明化を与えることと同値である．まず, $H^{\mathbb{C}}$ にユニタリー枠 $\xi.$ を取ると, $F(M)$ は局所自明化

$$F(M)|_U \cong U \times S^1, \quad p = z.[\theta \wedge \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n]_x \mapsto (x, \varphi(p) = z)$$

をえる ($\theta^\cdot$ は $\xi.$ の双対枠)．このとき, $\pi^* K \subset K \times F(M)$ の局所自明化を

$$\pi^* K|_{\pi^{-1}(U)} \to \pi^{-1}(U) \times \mathbb{C}, \quad (\lambda\theta \wedge \cdots \wedge \theta^n, p) \mapsto (p, \lambda\varphi(p))$$

とする．実は, これは $F(M)$ 全体で貼り合う．よって, この自明化によって得られたスピン構造を

$$\Phi : \mathrm{Spin}(F(M)) \to SO(TF(M)) \tag{3}$$

とする．

定義 9. $F(M)$ のスピン構造 (3) を M の標準的スピン構造と呼ぶ．

参考文献

[BGV] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag, Berlin, (1992).

[Be] A. L. Besse, *Einstein Manifolds*, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin (2008).

[Bl] D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and sympelctic manifolds*, Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA (2010).

[Bu99] H. Baum, *Lorentzian twistor spinors and CR-geometry*, J. Geom. Phys. **34**, no. 3–4, 270–286 (2000).

[Fe76] C. Fefferman, *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudo-convex domains*, Ann. of Math. (2) **103**, no. 2, 395–416 (1976).

[Fr] T. Friedrich, *Dirac operators in Riemannian geomtry*, American Mathematical Society, Providence, RI (2000).

[Gr67] A. Gray, *Pseudo-Riemannian Almost Product Manifolds and Submersion*, J. Math. Mech. **16**, 715–737 (1967).

[Ko56] S. Kobayashi, *Principal fibre bundles with* 1*-dimensional toroidal group*, Toihoku Math. J. (2) **8**, 29-45 (1956).

[Ko63] S. Kobayashi, *Topology of positively pinched Kaehler manifolds*, Tohoku Math. J. (2) **15**, 121–139 (1963).

[KN1] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. I*, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1996).

[Le86] J. M. Lee, *Pseudo-Einstein structures on CR manifolds*, Amer. J. Math. **110**, no. 1, 157-178 (1986).

[LM] H. B. Lawson, JR. and M-L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1989).

[MS] J. W. Milnor and J. D. Stasheff *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, (1974).

[Mo] , J. W. Morgan, *The Seiberg–Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1996).

[Na1901] M. Nagase, *On the curvature of the Fefferman metric of contact Riemannian manifolds.* , Tohoku Math. J. (2) **71**, no. 3, 425–436 (2019).

[Na1902] M. Nagase, *Dirac operators on the Fefferman spin spaces in almost CR-geometry*, Osaka J. Math. **56**, no. 3, 507–524 (2019).

[NO20] M. Nagase and T. Ohyama, *canonical spin structure and twistor spinors on the Fefferman space over a contact Riemannian manifolds*, Tohoku Math. J. (2) **72**, no. 3, 261–282 (2020).

[O'N66] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. **13**, 459–469 (1966).

[Pe03] R. Petit, *Spin^c-structures and Dirac operators on contact manifolds*, Differential Geom. Appl. **22**, no. 2, 229–252 (2005).

[Ta67] S. Tanno, *Harmonic forms and Betti numbers*, J. Math. Soc. Japan **19**, 308–316 (1967).