定曲率統計多様体の特徴づけ

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
大野優 (Yu OHNO)

概要

統計多様体とは, 擬リーマン多様体 (M, g) に, ∇g が対称であるような捩れのないアファイン接続 ∇ が定義された三つ組 (M, g, ∇) のことである. 指数分布族がなす統計多様体は平坦となることが知られている. 本講演では, 統計多様体 (M, g, ∇) が定曲率であることは, ∇ の双対接続である ∇^* が射影平坦であり, なおかつ ∇ の曲率 R と ∇^* の曲率 R^* が一致すること（共役対称と呼ばれる）が必要十分条件であることを説明する. さらに, 統計多様体が trace-free と呼ばれる特別な条件を満たすときは上記の曲率の条件が, リッチ曲率の共役対称性 $Ric = Ric^*$ と置き換わることを説明する.

1 導入

Riemann 多様体 (M, g) 上に捩れのないアファイン接続 ∇ が存在するとき，(0,3)-テンソル場 C を

$$C(X, Y, Z) = (\nabla_X g)(Y, Z)$$

と定義できる．テンソル場 C が対称であるとき (g, ∇) を**統計構造**といい，C を **cubic テンソル**と呼ぶ．Riemann 多様体 (M, g) が統計構造 (g, ∇) を持つとき，(M, g, ∇) を**統計多様体**と呼ぶ．(M, g, ∇) に対して，捩れのない双対アファイン接続 ∇^* が

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z)$$

が定義される．$\nabla = \nabla^*$ であることと ∇ が計量 g の Levi-Civita 接続となることは同値である．つまり統計多様体は Riemann 多様体の自然な一般化となっている．統計多様体の理論については [1] を参照されたい.
統計多様体 (M, g, ∇) に対し，∇ の曲率テンソルを R とおく．すなわち，

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

となる．そして R が**定曲率**であるとは，ある実数 k が存在して，

$$R(X, Y)Z = k\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}$$

が成立することを言う [8]．また曲率 R が**共役対称**であるとは，∇^* の曲率を R^* として，

$$R = R^*$$

となることを言う [10]. リッチ曲率 Ric が共役対称であることも同様に

$$Ric = Ric^*$$

と定義する．ただしリッチ曲率 Ric は

$$Ric(Y, Z) = \mathrm{tr}\{X \mapsto R(X, Y)Z\}$$

で定義される．R が定曲率であるとき R は共役対称となる．しかし一般に逆は成り立たない．本講演では R が定曲率となるための必要十分条件がどうなるのかを説明する．

2　統計多様体に対するテンソル解析

(M, g, ∇) を統計多様体とする．∇^* は

$$(\nabla^*_X g)(Y, Z) = -C(X, Y, Z)$$

を満たすため，(M, g, ∇^*) も統計多様体となる．ここで g の Levi-Civita 接続を $\widehat{\nabla}$ とし，(0,2)-テンソル場 K を

$$K(X, Y) := \nabla_X Y - \widehat{\nabla}_X Y \tag{1}$$

と定義する．これは差テンソルと呼ばれる．∇ と $\widehat{\nabla}$ は捩れがないため K は対称となる．(1,1)-テンソル K_X を $K_X Y = K(X, Y)$ で定義すれば

$$K_X = \nabla_X - \widehat{\nabla}_Y$$

を得る．
C の定義と対称性から

$$C(X, Y, Z) = -2g(K(X, Y), Z) \tag{2}$$

が成立する．関係式 $(\nabla^*_X g)(Y, Z) = -C(X, Y, Z)$ より

$$K_X = -\nabla^*_X + \widehat{\nabla}_X$$

が成立する．従って Levi-Civita 接続 $\widehat{\nabla}$ は接続 ∇ とその双対接続 ∇^* の平均である．つまり

$$\widehat{\nabla}_X Y = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla^*_X Y)$$

となる．さらに (1) と $\widehat{\nabla} g = 0$ であることから，

$$(\widehat{\nabla}_X C)(Y, Z, W) = -2g((\widehat{\nabla}_X K)(Y, Z), W)$$

が成立する．これらの関係式から cubic テンソル C の共偏微分 $\widehat{\nabla} C$ が対称であることの特徴づけを得る．

補題 2.1　[3, Lemma1] 次はすべて同値．

(1) ∇C は対称.

(2) $\widehat{\nabla} C$ は対称.

(3) $\widehat{\nabla} K$ は対称.

補題 2.1 は [3] の中でアファイン微分幾何学におけるブラシュケ超曲面で誘導された統計構造に対して証明されているが，任意の統計多様体に対しても簡単に一般化できる.

M を向き付け可能であると仮定し，(M, g) 上の体積要素 ω_g を

$$\omega_g = \sqrt{|\det g|}dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

と定義する．体積要素 ω_g の共偏微分 ∇_X は

$$\nabla_X \omega_g = \frac{1}{2}\operatorname{tr}_g(\nabla_X g)(\bullet, \bullet)\omega_g$$

となることが簡単に確かめられる．C の対称性により $\operatorname{tr}_g(\nabla_X g)(\bullet, \bullet) = \operatorname{tr}_g(\nabla_\bullet g)(\bullet, X)$ となるため，関係式 (2) と K の自己共役性，すなわち

$$g(K(X, Y), Z) = g(Y, K(X, Z))$$

が成立することから，

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}_g(\nabla_X g)(\bullet, \bullet)\omega_g = -g(\operatorname{tr}_g K(\bullet, \bullet), X) = -\operatorname{tr} K_X$$

となることより，1-形式 τ_g を

$$\tau_g(X) = \operatorname{tr} K_X \tag{3}$$

で定義すれば，

$$\nabla_X \omega_g = -\tau_g(X)\omega_g$$

が得られる．
Levi-Civita 接続 $\widehat{\nabla}$ のリッチ曲率を $\widehat{Ric}$ と書く.

補題 2.2 [15, Section 3] 向き付け可能な統計多様体 (M, g, ∇) と (3) で定義された τ_g に対して以下が成立する：

$$\begin{aligned}
Ric(Y, Z) &= \widehat{Ric}(Y, Z) + (\operatorname{div}^{\widehat{\nabla}} K)(Y, Z) - (\widehat{\nabla}_Y \tau_g)(Z) + \tau_g(K_Y Z) - g(K_Y, K_Z), \\
&= \widehat{Ric}(Y, Z) + (\operatorname{div}^{\nabla} K)(Y, Z) - (\nabla_Y \tau_g)(Z) - \tau_g(K_Y Z) + g(K_Y, K_Z), \\
Ric^*(Y, Z) &= \widehat{Ric}(Y, Z) - (\operatorname{div}^{\widehat{\nabla}} K)(Y, Z) + (\widehat{\nabla}_Y \tau_g)(Z) + \tau_g(K_Y Z) - g(K_Y, K_Z), \\
&= \widehat{Ric}(Y, Z) - (\operatorname{div}^{\nabla} K)(Y, Z) + (\nabla_Y \tau_g)(Z) + 3\tau_g(K_Y Z) - 3g(K_Y, K_Z).
\end{aligned}$$

さらに以下が成立する：

$$\frac{1}{2}Ric(Y, Z) - \frac{1}{2}Ric^*(Y, Z) = (\operatorname{div}^{\widehat{\nabla}} K)(Y, Z) - (\widehat{\nabla}_Y \tau_g)(Z), \tag{4}$$

$$= (\operatorname{div}^{\nabla} K)(Y, Z) - (\nabla_Y \tau_g)(Z),$$

$$\frac{1}{2}Ric(Y, Z) + \frac{1}{2}Ric^*(Y, Z) = \widehat{Ric}(Y, Z) + \tau_g(K(Y, Z)) - g(K_Y, K_Z). \tag{5}$$

補題 2.2 より，リッチ曲率が一般には対称とならないことがわかる．ここで捩れのないアファイン接続 ∇ が**局所等積**であるとは，M 上の任意の点においてある体積要素 ω が存在して，$\nabla\omega = 0$ を満たすことを言う．特に体積要素が体積要素 ω_g である場合は，$\nabla\omega_g = 0$ は

$$\operatorname{tr} K_X = 0$$

と同値であり，このような構造のことを **trace-free** であると呼ぶのは自然である [15].

系 2.3　統計多様体 (M, g, ∇) の接続 ∇ のリッチ曲率が対称であることと，∇ が局所等積であることは同値である．

次にアファイン接続が射影平坦であることの定義を与える．

定義 2.4　捩れのない局所等積な接続 ∇ と $\overline{\nabla}$ が M 上で**射影同値**であるとは，ある閉な 1-形式 ρ が存在して，

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \rho(X)Y + \rho(Y)X$$

を満たすことを言う．特に $\overline{\nabla}$ が平坦であるとき，∇ は**射影平坦**であるという．また**射影曲率テンソル** P を

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-1}\{Ric(Y,Z)X - Ric(X,Z)Y\}$$

で定義する．

射影平坦な接続は以下の定理で特徴づけられる．

定理 2.5　[5, p.88 and p.96] M 上の捩れのない局所等積な接続 ∇ が射影平坦であることは以下が成立していることと同値である．

(1)　$\dim M = 2$ なら，∇Ric が対称である．この場合，射影曲率テンソル P は自動的に 0 になる．

(2)　$\dim M \geq 3$ なら，射影曲率テンソル P が恒等的に 0 になる．この場合，∇Ric は自動的に対称になる．

3　主結果

本講演の目的である定曲率統計多様体の特徴づけに以下の補題を用いる．

補題 3.1　$(1,1)$-テンソル S を $Ric(X,Y) = (n-1)g(SX,Y)$ で定義する．Ric と ∇Ric が対称であると仮定する．ある滑らかな関数 λ が存在して，任意のベクトル場 Y に対して $SY = \lambda Y$ が成立するとき，λ は定数となる．

定曲率統計多様体の特徴づけを以下の定理で得た．

定理 3.2　[18] 統計多様体 (M, g, ∇) に対して以下は互いに同値 :

(1)　(M, g, ∇) は定曲率である．

(2)　R は共役対称かつ ∇^* は射影平坦．

さらに trace-free な定曲率統計多様体の特徴づけを以下で得た．

定理 3.3　[18] trace-free な統計多様体 (M, g, ∇) に対して以下は互いに同値：

(1)　(M, g, ∇) は定曲率である．
(2)　R は共役対称かつ ∇^* は射影平坦．
(3)　Ric は共役対称かつ ∇^* は射影平坦．

参考文献

[1] S. Amari, K. Nagaoka, *Method of Information Geometry*, Amer. Math. Soc., Oxford Univ. Press, 2000.

[2] F. Belgun, Projective and conformal flatness, Lectures given at Hamburg university, 2012, 7 pp.

[3] N. Bokan, K. Nomizu, U. Simon, Affine hypersurfaces with parallel cubic forms. *Tohoku Math. J. (2)* **42** (1990), no. 1, 101–108.

[4] M. F. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992.

[5] L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 8, 1927.

[6] H. Furuhata, I. Hasegawa, Submanifold theory in holomorphic statistical manifolds, *Geometry of Cauchy-Riemann submanifolds*, 179–215, Springer, Singapore, 2016.

[7] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* II, Interscience Tracts in Pure and Applied Math. **15**, Interscience Publishers, 1969.

[8] T. Kurose, Dual connections and affine geometry, *Math. Z.* **203** (1990), no. 1, 115–121.

[9] T. Kurose, On the divergences of 1-conformally flat statistical manifolds, *Tohoku Math. J. (2)* **46** (1994), no. 3, 427–433.

[10] S. L. Lauritzen, Statistical manifolds, in: *Differential Geometry in Statistical Inference*, IMS Lecture Notes: Monograph Series, **10**, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California, 1987, 163–216.

[11] J. Mikeš, E. Stepanova, A five-dimensional Riemannian manifold with an irreducible SO(3)-structure as a model of abstract statistical manifold, *Ann. Global Anal. Geom.* **45** (2014), no. 2, 111–128.

[12] C. Min, W. Ri, K. Kwak, D. An, Equiaffine structure and conjugate Ricci-symmetry of a statistical manifold, *Differential Geom. Appl.* **41** (2015), 39–47.

[13] K. Nomizu, T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press, 1994.

[14] B. Opozda, A sectional curvature for statistical structures, *Linear Algebra Appl.* **497** (2016), 134–161.

[15] B. Opozda, Bochner's technique for statistical structures, *Ann. Glob. Anal. Geom* **48**

(2015), 357–395.

[16] A. Rylov, Constant curvature connections on the Pareto statistical model, *Izv. PGPU Belinskogo* **30** (2012), 155–163, (in Russian).

[17] A. Rylov, Constant curvature connections on statistical models, in: *Information geometry and its applications*, Springer Proc. Math. Stat., **252**, Springer, Cham, 2018, 349–361.

[18] S. Kobayashi, Y. Ohno, On constant curvature statistical manifold, arXiv:2008.13394v3.