COTORSION PAIRS IN HOPFOLOGICAL ALGEBRA (HOPFOLOGICAL ALGEBRA における、ある COTORSION 対について)

信州大学博士研究員
小原 まり子

1. 本稿の概要

k を可換体とし、H を k 上有限次元の Hopf 代数とする。A を可換とは限らない k 代数とし、さらに A は左 H 加群の構造を持つとする (このとき k 上、を省略して、A は H 加群代数ということにする)。Hopf 代数は、もちろん多くの研究者が研究してきたが、ここでは Hopf 代数上の加群の圏と、Chian 複体との類似や導来圏との類似といった研究に焦点を当てよう [11], [13]. Qi [13] は、A と H のスマッシュ積と呼ばれる代数の、その上の加群を考察した。ここでいうスマッシュ積とはトポロジーの方でよばれている"空間のスマッシュ積"ではない。$A \otimes_k H$ 上に、(可換とは限らない) 環としての構造を、$(a \otimes h)(b \otimes \ell) = ah_{(1)}b \otimes h_{(2)}\ell$, $(a, b \in A,\, h, \ell \in H)$ と定めたものを $A\#H$ とおいて、これを A と H のスマッシュ積とよんでいる。さて Qi [13] によると、H を特別な Hopf 代数にとることにより、$A\#H$ 加群とその間の A 加群の写像のなす圏から、加群の圏および導来圏や、dg 加群の圏および導来圏を構成することが出来る。 Qi は論文 [13] において、$A\#H$ 加群の圏に"cofibrant"の概念を導入したり、その導来圏を考えたり、導来圏のコンパクト対象を考えたり、Grothendieck 群 K_0 や、G_0 を考えたりした。これらの事は、"Hopfological Algebra"とよばれて、Chain 複体や dg 加群の圏の圏における Homological algebra の類似とされた。

ところで、Qi は $A\#H$ 加群の圏にモデル圏の構造は導入してはいない。本研究では dg 加群の圏に射影モデル構造が入ることに類似として、$A\#H$ 加群の圏にモデル圏の構造が入り、それが dg 圏のモデル構造の類似になっている事を確認した。Qi の用いた Quasi-isomorphisms は contractible 対象を用いて定義されたのであったのだが、本研究で用いた Quasi-isomorphisms はホモロジー群の同型を誘導する写像として定めており、一般には両者は異なることに注意されたい。

本稿では Qi の"Hopfological algebra"の導入と本研究との関連, また dg 加群 (Chain 複体) との関係に言及したい。

2. DG 加群における状況

"Hopfological algebra"は、dg 加群の Homological algebra の類似として展開された。では、特に dg 加群のどのような側面の類似であったのか？ ここでは関連する dg 加群の側面について挙げていく。dg 加群についての参考文献は [1], [2], [3], [9], [10] などがある。

A を dg 代数とする。

- dg A 加群 M が perfect であるとは、(本来は M が長さ有限の semi-free 加群のレトラクトであるということだが)、M が dg A 加群の導来圏のコンパクト対象に導来圏の中で同型であるということである。(cf. [3, Theorem 4.2]) 。もしも A が k 上の Noetherian connective dg 代数かつ 0 次への微分が消えており、dg A-module M が複体として bounded below (e.g. [1] では finite とよばれている) であらば、perfect は全てのホモロジー群の直和が k 上有限次元ベクトル空間であることと同値になる [3, Theorem 4.8].
- Shipley [14] により、HR 加群スペクトラムの圏に安定モデル圏の構造を入れたものと、dg$R$ 加群の圏に射影モデル構造 [10, Theorem 3.1] を入れた圏とは Quillen 同値 (モデル構造を保つような同値のこと) である事が証明された。(dg 代数 R に対応する Eilenberg-Maclane スペクトラム HR の構成も説明されている)。よく"cofibrant" dg 加群といっているのはこの射影モデル構造における cofibrant 対象のことで、それはいわゆる"semi-projective"と同じである。

これらを踏まえて、A を k 上 Noetherian connective かつ 0 次への微分が消えている dg 代数としよう。そして $\mathcal{C}_A$ を bounded below であるような dg A 加群のなす圏としよう。

すると上で述べた射影モデル構造が $\mathcal{C}_A$ に入る。そのモデル構造に関する cofibration をとり、有限生成な cofibrant 対象を考えると、代数的 K 理論が定義できたのであった。

また、dg A 加群のなす導来圏には三角圏の構造が入るので、三角を用いて Grothendieck 群　(K_0) が定義できたのであった。

これら K 理論はは Keller や他の dg 圏の研究者により考察された。

3. Hopfological algebra における状況

3.1. **先行研究など.** "Hopfological algebra"は近年 Khovanov [11] や Qi [13] により進展してきた。kを可換体とする。H を k 上有限次元な Hopf 代数とする。A を k 上の H 加群代数とする、即ち、A は k 上の (可換とは限らない) 代数であり、H 加群の構造を持つ。B を A と H のスマッシュ積 $A\#H$ とする。冒頭で述べた通り、B には $(a\otimes h)(b\otimes \ell) = \Sigma_{(h)} a(h_{(1)}b)\otimes h_{(2)}\ell$ で (可換とは限らない) 環構造が入る。

さて、もしも $H = k[x]/(x^2)$ ととれば、x はあたかも dg 代数の微分のように作用する。このとき、A の H 作用は自明としておくと、$B = A\#H = A\otimes_k H$ は dg 加群とみなせる。この意味で、$A\#H$ 加群は dg 加群を含んでいるといえるのである。

しかしながら、dg 加群の場合とだいぶ勝手が異なる。先程の dg 加群の場合の connective や bounded below などに相当するものが見えにくい。適当な仮定をすればうまくいくかもしれない。

さて、dg 加群の圏には"null-homotopic"で割った商圏と、その商圏をさらに、"Quasi-isomorphism"で局所化した導来圏が定義されていた。dg 加群の場合、それらは両方とも三角圏の構造を持った。

Qi [13] で始めにおこなっていることは、この類似である。そのために Shift 関手や null-homotopic などを定義している。

3.2. **Hopfological algebra の場合における安定圏 (ホモトピー圏) と導来圏.** 以下、k を体とする。A を k 代数、H を k 上有限次元の Hopf 代数とする。さらに A は H 加群の構造を持つとし、A と H とのスマッシュ積 $A\#H$ を B とおく。また、H は (左) 整元 $\Lambda \in H$ を持つと仮定する。Hopf 代数の整元とは、H の counit 写像を ε とおくと、任意の (左)H 作用に対し $h\Lambda = \varepsilon(h)\Lambda$ を満たす元である。

Khovanov や Qi は次の記号を導入した。Shift 関手やホモロジー群らは、本研究でも要となる道具である。

3.3. **H 加群のホモトピー圏.** まず、Hopf algebra H は可換体 k 上有限次元なので Frobenius 代数である。よって H は自己移入環である。$H-\underline{\mathrm{mod}}$ を、付随する H 加群の安定圏 (ホモトピー圏) とする。すなわち、対象は $H-\mathrm{mod}$ の対象と同じであるが、H 加群 X から Y への写像集合がイデアル $I(X,Y)$ による剰余加群 $\mathrm{Hom}_{H-\underline{\mathrm{mod}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{H-\mathrm{mod}}(X,Y)/I(X,Y)$ となる。ここで $I(X,Y)$ とは X から Y への H 加群の写像で、何か入射 (Frobenius なので同値だが、何か射影) H 加群を経由するもの全体である。

3.4. **H 加群のホモトピー圏上の Shift 関手.** 圏 $H-\underline{\mathrm{mod}}$ 上の Shift 関手 T は以下のようにして与えられる。

任意の H 加群 M に対して、$M \subset I$ を M を適当な入射 H 加群への埋め込みとする。実は $M \otimes_k H$ が入射的なのでまぁ、$I = M \otimes_k H$ とおくと、埋め込みは $id_M \otimes_k \Lambda : M \to M \otimes_k H$ ととれる。そうしたら、$T(M)$ をその余核 $M \otimes_k (H/k\Lambda)$ と定める。同様に逆の Shift を $T^{-1}(M) = M \otimes_k Ker\varepsilon$ と定める。ここで $\varepsilon : H \to k$ は H の counit 写像である。この Shift T により、H 加群の安定圏 (ホモトピー圏) $H-\underline{\mathrm{mod}}$ はモノイダル三角圏になる。

3.5. **B 加群上の"null-homotopic"と安定圏 (ホモトピー圏).** $\mathcal{C}(A,H)$ を、対象は $B-\mathrm{mod}$ の対象と同じで、B 加群の写像集合を、「ある B 加群 N が存在して $N \otimes_k H$ (これも B 加群の構造が自然に入る) を経由する写像からなるイデアル」で割ったものを写像空間とすることにより定義する。$\mathcal{C}(A,H)$ の写像集合には k ベクトル空間の構造が入る。写像への (加群へのではない)、H 作用はもうつぶれてしまっていることに注意する。

3.6. **B 加群上の、Qi による Quasi-isomorphisms.** いま $H \cong k \otimes_k H$ が B の部分代数とみなせるので、係数制限による関手 $Res : B-\mathrm{mod} \to H-\mathrm{mod}$ を得る。Res は商圏上に完全関手

$$\underline{Res} : \mathcal{C}(A,H) \to H-\underline{\mathrm{mod}}$$

を誘導する。

Qi は B 加群の間の写像 $f : M \to N$ が quasi-isomorphism とは、制限関手での像 $\underline{Res}(f)$ が同型であることとした。また B 加群 M が acyclic とは $0 \to M$ が quasi-isomorphism であることとした。このとき、quasi-isomorphism 全体は $\mathcal{C}(A,H)$ において localizing class

をなす [13, Theorem 4.2.1]. Qi の quasi-isomorphism 全体で圏 $\mathcal{C}(A,H)$ を局所化したものを $\mathcal{D}(A,H)$ とおき、Qi はこれを B 加群の導来圏と定義した。圏 $\mathcal{D}(A,H)$ は再び三角圏になる。

Remark 3.1. Qi は $\underline{Res}$ を total cohomology functor とよんでいる。また Qi の M が acyclic とは M の恒等写像を H 加群の写像としてみた時に null-homotopic であるという定義に等しい。

3.7. **Cofibrant な B 加群.**

Definition 3.2 ([13], Definition 6.1, 6.3)**.** さて B 加群 M をとる。

(1) M が cofibrant とは、B 加群間の任意の全射 quasi-isomorphism な B 加群の写像 $L \to N$ が誘導する k ベクトル空間の間の写像

$$\mathrm{Hom}_B(M,L) \to \mathrm{Hom}_B(M,N)$$

が全射になることである。

(2) 次の条件を 条件 *(P)* とよぶ :

(i) ある B 加群のフィルトレーション $\{F_n\}_{n\geq 0}$ が存在して $0 \subset F_0 \subset \cdots \subset F_r \subset F_{r+1} \subset \cdots \subset P$, $P = \cup_n F_r$

(ii) 埋め込み $F_r \subset F_{r+1}$ は左 A 加群の写像として各 $r \in \mathbb{N}$ において分裂している;

(iii) F_0 及び F_{r+1}/F_r は各 $r \in \mathbb{N}$ において $A \otimes_k V$ (V は直既約 H 加群) という形の B 加群の直和に同型

(3) M が条件 (P) を満たすとは、M が条件 (P) を持つ B 加群 P に $\mathcal{C}(A,H)$ において同型となることである。

条件 (P) を持つ B 加群と cofibrant な B 加群の間には以下の関係がある。

Proposition 3.3 ([13], Corollary 6.8)**.** *B 加群 M が cofibrant とは、ある条件 (P) を持つ B 加群のレトラクトに同型になることに等しい。*

□

Remark 3.4. 条件 (P) とは dg 加群において Keller [9, p.69] により導入された。そして Qi はその類似を構成したことになる。

[13] では、cofibrant な B 加群達が導来圏を生成したり、導来圏のコンパクト対象を考えて Grothendieck 群 K_0 を計算したりしている。一方で、以下に述べるように Qi は B 加群に対してそのホモロジー群も定義している。Qi の quasi-isomorphism が制限関手で定義されているので、ホモロジー群はあまり使いどころが無かった。

Definition 3.5 (cf. [13], Proposition 5.9)**.** M と N を B 加群とする。このとき

$$\mathcal{H}(M) = M^H/\Lambda M$$

および

$$\mathcal{H}(\mathrm{Hom}_A(M,N)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A,H)}(M,N)$$

と定義する。$\mathcal{H}$ をホモロジーと呼ぶ。

4. 本研究の主結果

Hopfological algebra における dg 加群の cofibrant や null-homotopic の類似をみてきた。しかしよくみてみると quasi-isomorphic の定義がホモロジー群を使っていなかったり、cofibrant とよんでいるけれど射影モデル圏の構造は入っていなかったり、ホモロジー群は Shift を使って動かした方が長い完全列が得られる気がした。なので、本研究ではそれらが同じなのか違うのか、また射影モデル構造は B 加群の圏に入るのかを考えた。

本研究では、安定圏 (ホモトピー圏) までは Qi と同じであるが、Σ quasi-isomorphism という概念を用いる。それは、B 加群間の A 加群としての写像であって、任意の Shift に対してそのホモロジー群に同型が誘導されるような写像と定める。すなわち、任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathcal{H}_n(-) = \mathcal{H}(T^n(-))$ をとった後に同型を導く写像である。 また、M が Σ-acyclic とは全ての $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{H}_n(M)$ が 0 と同型であることとする。

するとまず、ホモロジー群の長い完全列が得られた。

Lemma 4.1 (ホモロジー群の長完全列)**.** $X \to Y \to Z \to TX$ が安定圏における三角ならば k 加群の長完全列

$$\cdots \to \mathcal{H}_{n+1}(Z) \to \mathcal{H}_n(X) \to \mathcal{H}_n(Y) \to \mathcal{H}_n(Z) \to \cdots$$

が得られる。

Proof. Shift と 5-lemma より従う. □

4.1. B 加群の圏における射影モデル構造.

本研究では B 加群の圏が充分な射影的対象のある Grothendieck Abel 圏になっていることに着目し、cotorsion 対を用いて証明を行った。Cotorsion 対とは大まかに言えば、部分圏からなる 3 つ組と”直交する”という概念を定めることである。これを適切に定める事により、モデル圏の cofibration や fibration の持ち上げ条件が cotorsion 対の直交条件で書ける。

Definition 4.2 ([12], モデル圏のための Cotorsion 対)**.** B 加群間の写像 $f : M \to N$ が quism とは、誘導された写像 $\mathcal{H}(M) \to \mathcal{H}(N)$ が k 加群として同型の時にいう。$f : M \to N$ が Σ-quasi-isomorphism とは、誘導された写像 $\mathcal{H}(T^n(M)) \to \mathcal{H}(T^n(N))$ が任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し k 加群として同型の時にいう。

また、P が Σ-semiprojective とは任意の全射かつ Σ-quasi-isomorphism である写像 $f : M \to N$ が誘導した写像

$$\mathrm{Hom}_A(P, T^n(M)) \to \mathrm{Hom}_A(P, T^n(N))$$

が任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し全射かつ quism である時にいう。

Definition 4.3 (直交条件)**.** M, N を B 加群とすると

$$Ext^1(M,N) = \mathcal{H}(\mathrm{Hom}_A(M, T(N)))$$

とおき、この Ext^1 を用いて直交条件を定める。すなわち、M と N が直交することを $Ext^1(M,N) = 0$ で定める。

さて、$SemiProj^{\Sigma}$, $Triv^{\Sigma}$, $\mathcal{C}_{A\#H}$ をそれぞれ Σ-semiprojective のなす部分圏、0 と Σ-quasi-isomorphism であるものたちのなす部分圏、B 加群のなす圏とする。

Theorem 4.4. *$SemiProj^{\Sigma}$, $Triv^{\Sigma}$, $\mathcal{C}_{A\#H}$ は $\mathcal{C}_{A\#H}$ の Hovey triple をなす。*

Theorem 4.5 ([12], Corollary 3.14)**.** 以下のように定める事によって $A\#H$ 加群の圏にモデル構造が入る。

- *(1) $f : M \to N$ が cofibration とは単射かつ f の余核が Σ-semiprojective である時にいう。*
- *(2) $f : M \to N$ が fibration とは全射のことである。*
- *(3) $f : M \to N$ が weak equivalence とは Σ-quasi-isomorphism のことである。*

特に、全ての B 加群は *fibrant* であり、*cofibrant* 対象は Σ-*semiprojective* のことである。

4.2. **本研究から得られる導来圏.** 本研究において、cofibrant 対象からなる部分圏を weak equivalence で局所化する事により導来圏が得られる。

先に述べたように Khovanov や Qi は本研究と異なる quasi-isomorphisms を用いている。彼らの quasi-isomorphism は H 加群の圏の homotopy equivalence を用いて定めている。従って、一般には 2 つの導来圏は異なる。

References

[1] Mohammad Mahdi Abbasirad, *Homotopy Theory of Differential Graded Modules and Adjoints of Restriction of Scalars*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2014. Thesis (Ph.D.)–University of Sheffield (United Kingdom).

[2] Luchezar L. Avramov and Hans-Bjørn Foxby, *Homological dimensions of unbounded complexes*, J. Pure Appl. Algebra **71** (1991), no. 2-3, 129–155.

[3] Luchezar L. Avramov, Ragnar-Olaf Buchweitz, Srikanth B. Iyengar, and Claudia Miller, *Homology of perfect complexes*, Adv. Math. **223** (2010), no. 5, 1731–1781.

[4] Tobias Barthel, J. P. May, and Emily Riehl, *Six model structures for DG-modules over DGAs: model category theory in homological action*, New York J. Math. **20** (2014), 1077–1159.

[5] Samuel Eilenberg, Masatoshi Ikeda, and Tadasi Nakayama, *On the dimension of modules and algebras. I*, Nagoya Math. J. **8** (1955), 49–57. MR69157

[6] Samuel Eilenberg and Tadasi Nakayama, *On the dimension of modules and algebras. II. Frobenius algebras and quasi-Frobenius rings*, Nagoya Math. J. **9** (1955), 1–16. MR73577

[7] Samuel Eilenberg, Hirosi Nagao, and Tadasi Nakayama, *On the dimension of modules and algebras. IV. Dimension of residue rings of hereditary rings*, Nagoya Math. J. **10** (1956), 87–95. MR78981

[8] Samuel Eilenberg and Tadasi Nakayama, *On the dimension of modules and algebras. V. Dimension of residue rings*, Nagoya Math. J. **11** (1957), 9–12. MR86070

[9] Bernhard Keller, *Deriving DG categories*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27** (1994), no. 1, 63–102.

[10] ______, *On differential graded categories*, International Congress of Mathematicians. Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 151–190.

[11] Mikhail Khovanov, *Hopfological algebra and categorification at a root of unity: the first steps*, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), no. 3, 1640006, 26.

[12] M. Ohara and D. Tamaki, *Cotorsion pairs in Hopfological algebra*, Preprint available at http://arxiv.org/abs/2012.07159.

[13] You Qi, *Hopfological algebra*, Compos. Math. **150** (2014), no. 1, 1–45.

[14] Brooke Shipley, *$H\mathbb{Z}$-algebra spectra are differential graded algebras*, Amer. J. Math. **129** (2007), no. 2, 351–379.

[15] Marco Schlichting, *Higher algebraic K-theory*, Topics in algebraic and topological K-theory, Lecture Notes in Math., vol. 2008, Springer, Berlin, 2011, pp. 167–241.

[16] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of spaces*, Lecture Notes in Math. **1126** (1985), 318–419.

Email address: `ohara12m@shinshu-u.ac.jp`