Feigin-Semikhatov duality

東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
中塚成徳 (Shigenori NAKATSUKA)

概 要

Feigin-Semikhatov duality とは $\mathcal{W}$ 代数の間の双対性の一種で幾何学的ラングランズ対応で重要な役割を果たす Feigin-Frenkel duality の一種である。この双対性は近年 Gaiotto-Rapčák によって提唱された 4 次元ゲージ理論と 2 次元共形場理論の間の対応という物理の文脈で再解釈・一般化された。本講演では、この双対性の証明とスーパー頂点代数の表現論への応用について述べたい。

1 はじめに

頂点代数とは，物理的には 2 次元共形場理論と呼ばれる量子場の理論の正則な部分の対称性を記述する代数系である．数学的には Moonshine 予想が動機になっている．この予想は J 関数と呼ばれるモジュラー関数

$$J(q) = q^{-1} + 196884q + 21493760q^2 + \cdots$$

の係数がモンスター群と呼ばれる最も大きな散在型有限単純群の表現の次元で書けるが (例えば，196884 は 1 次元自明表現とその次に小さい 196883 次元の既約表現の直和の次元) これを q 指標とする，モンスター群を自己同型群にもつ無限次元の代数構造が存在するであろうというものである．この解決のために Borcherds [4] が導入した代数系が頂点代数である．

上では（ある）頂点代数の q 指標がモジュラー関数でかけていることになる．一般に,「良い性質をもつ」頂点代数の既約表現の q 指標のなす集合は全体でベクトル値モジュラー関数をなすことが知られている [13].（上は既約表現が自分自身しかない場合の例である.）この q 指標は頂点代数のいくつかの表現と点付きリーマン面から定義される（N 点）共形ブロックと呼ばれる物理量の特別な場合である．N 点共形ブロックの解析は一般に難しく，アフィン頂点代数と呼ばれる頂点代数のクラスでは数学的に厳密に展開されており，点付きリーマン面のモジュライ空間上の可積分接続を定める.（日本語では [14] の解説が分かりやすい.）特に，N 点付き射影直線 $\mathbb{CP}^1$ 上で N 点共形ブロックを考えた場合，$\mathbb{CP}^1$ 上の N 点の配位空間の基本群が組みひも群になることから結び目の不変量（例えば Jone 多項式）を構成することができる．詳しくは [15] を見られたい．結び目の不変量は頂点代数の表現の他，量子群の表現を用いても構成することができ，この二つの構成法は圏論的には，表現圏に braided テンソル圏の構造が入ることから説明される [5].

本稿ではアフィン頂点代数及びそのある種の簡約としてえられる $\mathcal{W}$ 代数と呼ばれる頂点代数の表現論を扱う．$\mathcal{W}$ 代数は，局所幾何学的 Langlands 対応で重要な役割を果たす他，特別な場合には形式円盤上の Sturm-Liuville 作用素 $\partial_z^2 - u(z)$ 全体のなす空間の関数環（の 1-parameter 非可換変形）の意味を持ち，ソリトン方程式の背後にある代数として知られている．古くから $\mathcal{W}$ 代数のうち principal $\mathcal{W}$ 代数と呼ばれる特別なものの間には Feigin-Frenkel 双対性と呼ばれる双対性が知られてきたが，その他の $\mathcal{W}$ 代数の間の双対性についてはよくわかっていなかった．近年，理論物理の文脈で高次元の場の理論と 2 次元共形場理論の関連が急速に明らかになってきており，高次元の場の理論の間の対称性の帰結として Feigin-Frenkel 双対性を含む $\mathcal{W}$ 代数の間の双対性が系統だって発見された．それと同時に数学的にも $\mathcal{W}$ 代数の間の双対性の理解が急速に進んだ．本稿の目標はその 1 つ，もともと Feigin-Semikhatov により予想されていた双対性とその表現論的な応用を述べることである．

2 頂点代数について

2.1 頂点代数

この節の詳しい内容は [11] をみられたい．

定義 2.1. 頂点代数とは,（複素）ベクトル空間 V，$|0\rangle \in V\backslash\{0\}$，$\partial \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$，および双線形写像

$$Y(?,z)\colon V\times V \to V((z)), \quad (a,b)\mapsto Y(a,z)b=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)}bz^{-n-1}$$

からなるデータ $(V,|0\rangle,\partial,Y(?,z))$ であって次の公理をみたすものである.

1. $Y(|0\rangle,z)=\mathrm{id}_V$，$Y(a,z)|0\rangle = a+O(z)$
2. $Y(\partial a,z)=\frac{d}{dz}Y(a,z)$，$\partial|0\rangle=0$.
3. $a,b\in V$ について N を十分大きくとれば，$(z-w)^N[Y(a,z),Y(b,w)]=0$.

通常，V を状態空間，$|0\rangle$ を真空ベクトル，$Y(?,z)$ を状態-場対応（状態 a が与える状態空間への影響を表す場 $Y(a,z)$ を対応させる写像）と呼び，∂ を（無限小）併進作用素と呼ぶ．とくに (1) の $Y(|0\rangle,z)=\mathrm{id}_V$ は真空状態は「状態を変化させない」，$Y(a,z)|0\rangle = a+O(z)$ は状態 a が真空に与えるもっとも大きい影響は a を生じさせることそのもの，(2) の $\partial|0\rangle=0$ は真空は併進対称性をもつことを意味する．また，あとにでてくるスーパー頂点代数は上の公理を自然にスーパーベクトル空間つまり $\mathbb{Z}_2$-graded にしたものであり上の公理に $\mathbb{Z}_2$-grading との整合性条件

$$V=V_{\bar 0}\oplus V_{\bar 1},\ |0\rangle\in V_{\bar 0},\ \partial\in\mathrm{End}_{\bar 0}(V),\ a_{(n)}\in\mathrm{End}_{\bar a}(V)$$

を付け加え，$[Y(a,z),Y(b,w)]$ を Lie superbracket

$$[Y(a,z),Y(b,w)]=Y(a,z)Y(b,w)-(-1)^{\bar a\bar b}Y(b,w)Y(a,z)$$

とみなすことで定義される.（ここで $\bar a\in\mathbb{Z}_2$ は a の $\mathbb{Z}_2$-grading を表すとする.）

実は上の公理系から次のことが従う：

事実 2.2.

1. $Y(a_{(-1)}b,z) =: Y(a,z)Y(b.z) :\overset{def}{=} \left(\sum_{n<0} a_{(n)}z^{-n-1}\right)Y(b,z)+(-1)^{\bar a\bar b}Y(b,z)\left(\sum_{n\geq 0}a_{(n)}z^{-n-1}\right)$,
2. $[Y(a,z),Y(b,w)]=\sum_{n\geq 0}Y(a_{(n)}b,w)\frac{1}{n!}\partial_w^n\delta(z-w)$.

ここで $\delta(z-w)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^nw^{-n-1}$ である．(1) は $Y(a,z)$ と $Y(b,z)$ の正規積と呼ばれ（2）は通常 OPE（作用素積展開 Operator Product Expansion の略）という以下の形で書かれることが多い：

$$Y(a,z)Y(b,w)\sim\sum_{n\geq 0}\frac{Y(a_{(n)}b,w)}{(z-w)^{n+1}}.$$

また頂点代数 V はその中のいくつかの元 $\{a^i\}_{i\in I}$ に対応する場の係数 $\{a^i_{(n)}\}_{i\in L,n\in\mathbb{Z}}$ のみを用いて $|0\rangle$ から任意の元を表示することができる (例えば $a^1_{(-2)}a^2_{(-1)}|0\rangle$) とき場 $\{a^i(z)\}_{i\in I}$ で生成されるという．もっとも単純な頂点代数は（単位的結合的）可換 $\mathbb{C}$ 代数 A と微分 $D\in\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(A,A)$ のペア (A,D) から作ることができる．実際に $|0\rangle=1$，$\partial=D$，$Y(a,z)b=e^{zD}ab$ により頂点代数が得られる．ここで $[Y(a,z),Y(b,w)]=[e^{zD}a,e^{zD}b]=0$ であることに注意すると公理（3）をみて「頂点代数は微分（可換）代数の meromorphic な拡張である」といった言い方ができる.

無限次元 Lie 環からいくつかの基本的な頂点代数を構成することができる.

例 2.3 (Virasoro 頂点代数)．*Virasoro* 代数 Vir とは以下で定義される無限次元 *Lie* 環である.

$$Vir\overset{def}{=}\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L_n\bigoplus\mathbb{C}C$$

$$[L_n,L_m]=(n-m)L_{n+m}+\frac{n^3-n}{12}\delta_{n+m,0}C,\quad [C,Vir]=0.$$

部分代数 $Vir_+ \overset{def}{=} \bigoplus_{n\geq -1}\mathbb{C}L_n \bigoplus \mathbb{C}$ の *1* 次元表現 $\mathbb{C}_c = \mathbb{C}v_c$ *(*$c \in \mathbb{C}$*)* を $\bigoplus_{n\geq -1}\mathbb{C}L_n$ の作用を *0*，C の作用を c 倍作用で定義する．これにより誘導される Vir の表現

$$Vir_c \overset{def}{=} \mathcal{U}(Vir) \otimes_{\mathcal{U}(Vir_+)} \mathbb{C}_c$$

には $|0\rangle = 1 \otimes v_c$，$\partial = L_{-1}$，

$$Y(L_{-2} \otimes v_c, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} (\overset{def}{=} L(z))$$

を満たす頂点代数の構造がただ一つ定まる．これを中心電荷 c の（*universal*） *Virasoro* 頂点代数という．この場合は Vir_c はただ一つの場 $L(z)$ から生成される頂点代数で，$L(z)$ は *OPE*

$$L(z)L(w) \sim \frac{\frac{c}{2}\mathrm{id}}{(z-w)^4} + \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w L(w)}{z-w}$$

を満たすという言い方ができる．

補足 2.4. *Virasoro* 頂点代数はあとで定義される $\mathcal{W}$ 代数の最も簡単な場合である．また頂点代数 V とその中の元 ω であって *Virasoro* 頂点代数を生成するものの組 (V, ω) を頂点作用素代数といい，表現論を展開する上では欠かせない概念だが，本稿では簡単のためそのような仔細には立ち入らないことにする．

例 2.5 (アフィン頂点代数)**.** 有限次元単純 *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ から対応するアフィン *Lie* 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ と呼ばれる無限次元 *Lie* 環が

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathfrak{g}} \overset{def}{=} \mathfrak{g}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}K \\
&[at^n, bt^m] = [a,b]t^{n+m} + (a|b)n\delta_{n+m,0}K, \quad [K, \widehat{\mathfrak{g}}] = 0
\end{aligned}$$

により定義される．ここで $(?|?)\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ は正規化された $\mathfrak{g}$ の不変内積である．つぎに部分 *Lie* 環 $\widehat{\mathfrak{g}}_+ := \mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K$ の *1* 次元表現 $\mathbb{C}_k = \mathbb{C}v_k$ *(*$k \in \mathbb{C}$*)* を $\mathfrak{g}[t]$ の作用を *0*，K の作用を k 倍作用で定義する．これにより誘導される $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現

$$V^k(\mathfrak{g}) \overset{def}{=} \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{g}}_+)} \mathbb{C}_k$$

には $|0\rangle = 1 \otimes v_k$，$\partial = -\frac{d}{dt}$，

$$Y((at^{-1}) \otimes v_k, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (at^n) z^{-n-1}, \quad (a \in \mathfrak{g}),$$

を満たす頂点代数の構造がただ一つ定まる．これをレベル k の（*universal*）アフィン頂点代数という．($V^k(\mathfrak{g})$ には k が非臨界レベル（例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ のとき $k \neq -n$）ならば *Segal-*菅原構成と呼ばれる方法で頂点作用素代数の構造が入る．) この頂点代数はただ *1* つの単純商をもち，これを $L_k(\mathfrak{g})$ と書く．

例 2.6 (格子頂点代数)**.** ここでは格子とは有限生成自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ とその上の $\mathbb{Z}$ 値非退化内積 $B(?,?)\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ の組 $L = (\mathbb{Z}^n, B)$ とする．可換 *Lie* 環 $L_{\mathbb{C}} \overset{def}{=} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^n$ から対応する無限次元 *Lie* 代数 $\widehat{\mathfrak{h}}_L$ が

$$\widehat{\mathfrak{h}}_L \overset{def}{=} L_{\mathbb{C}}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}K, \quad [at^n, bt^m] = B(a,b)n\delta_{n+m,0}K,\ [K, \widehat{\mathfrak{h}}_L] = 0$$

で定義され，これを *Heisenberg Lie* 環という．ここからアフィン頂点代数が同様の手続きで頂点代数を構成することができ，これを L に付随する *Heiseinberg* 頂点代数といい π_L と書く．$L_{\mathbb{C}}$ の元 λ に対して $\widehat{\mathfrak{h}}_{L,+}$ の *1* 次元表現 $\mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C}|\lambda\rangle$ を

$$at^n|\lambda\rangle = \delta_{n,0}B(a,\lambda)|\lambda\rangle, (a \in L_{\mathbb{C}}), \quad K|\lambda\rangle = |\lambda\rangle$$

で定めることができる．これにより誘導される $\widehat{\mathfrak{h}}_L$ 加群

$$\pi_{L,\lambda} \overset{def}{=} \mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}}_L) \otimes_{\mathcal{U}(\widehat{\mathfrak{h}}_{L,+})} \mathbb{C}_\lambda$$

には自然に π_L 加群の構造が入る．更に π_L 加群 $V_L \overset{def}{=} \bigoplus_{\lambda \in L} \pi_{L,\lambda}$ には π_L 加群の構造と整合的な（スーパー）頂点代数の構造が同型類を除いてただ *1* つの入る．これを格子 L に付随する格子頂点代数と呼ぶ.

補足 2.7.

1. 格子を $L = \mathbb{Z}$,（$B(n, m) = nm$）とした場合はスーパー頂点代数になるが実は全く異なる構成法がある．*Odd* な場 $b(z)$, $c(z)$ で *OPE*

$$b(z)c(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad b(z)b(w) \sim 0, \quad c(z)c(w) \sim 0,$$

を満たす *universal* なスーパー頂点代数を *bc-system* といい，$\bigwedge$ と書く．このとき次を満たすスーパー頂点代数の同型がただ一つ存在する（これはボソン-フェルミオン対応という）.

$$\bigwedge \xrightarrow{\simeq} V_{\mathbb{Z}}, \quad b(z) \mapsto Y(|1\rangle, z),\ c(z) \mapsto Y(|-1\rangle, z).$$

詳しくは述べないが両辺の適切な指標をとることで *Jacobi* 三重積公式と等価な等式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + uq^{n-1})(1 + u^{-1}q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

を得ることができる．このように頂点代数の理論は古典的に知られていた分割等式を表現論的に研究する土台を与える.（この他に *Rogers-Ramanujan* 恒等式などが得られることが知られている.）

2. 格子を $L = \sqrt{2}\mathbb{Z}$,（$B(\sqrt{2}n, \sqrt{2}m) = 2nm$）とした場合は頂点代数になるが実はこれは前述のアフィン頂点代数の特別な場合である．つまり，頂点代数の同型

$$L_1(\mathfrak{sl}_2) \simeq V_{\sqrt{2}\mathbb{Z}}$$

が存在する.（これは *Frenkel-Kac* 構成と呼ばれる $L_k(\mathfrak{g})$ の表示の特別な場合である.）

2.2 頂点代数の表現圏に入る構造について

頂点代数の最も簡単な例に微分（可換）代数があった．特に有限次元 $\mathbb{C}$ 代数 A は微分を 0 とみて頂点代数の構造が入る．その然るべき表現圏は有限生成 A 加群（つまり有限次元表現）のなす圏であろう．この表現圏には A 上テンソル $\otimes_A$ によりテンソル圏の構造が入る．これは良い頂点代数の然るべき表現圏には braided テンソル圏の構造が入るという一般論のもっとも自明な場合として理解される．詳しくは述べないが，テンソル圏とはアーベル圏 $\mathcal{C}$ であって，テンソル積 $\otimes$ というアーベル圏の性質と整合的な双関手 $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ とテンソル積に関する単位的対象 $\mathbf{1}$ を付け加えたものである．ここで，$\mathbf{1}$ が単位的対象であるとは $\mathcal{C}$ の全ての対象 M について関手的同型 $\mathbf{1} \otimes M \simeq M$, $M \otimes \mathbf{1} \simeq M$ が定まっていることを指し，この他に associator と呼ばれる $\mathcal{C}$ の全ての対象 M, N, L について関手的同型 $(M \otimes N) \otimes L \simeq M \otimes (N \otimes L)$ を付け加えたものがテンソル圏を定義するデータである．Braided テンソル圏とはテンソル圏に，テンソル積の成分を入れ替える関手的同型

$$\mathcal{R}_{M,N}\colon M \otimes N \simeq N \otimes M$$

を付け加えたものである．アーベル圏 $\mathcal{C}$ はその Grothendieck 群 $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ が可換群であることから，アーベル圏はアーベル群の圏化といえる.（テンソル積 $\otimes$ が両側に関して完全関手であれば,）その意味で

テンソル圏は（結合的）環の圏化，braided テンソル圏は可換環の圏化ということができる．以上の準備の下に頂点代数については次のことが知られている．

事実 2.8 (Huang, Huang-Lepowsky, Huang-Lepowsky-Zhang)**.** 組 (V,ω) を頂点作用素代数とし，ω が定める場 $Y(\omega,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_nz^{-n-2}$ について，L_0 は V に半単純に作用し更にその固有値は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ *i.e.*, 固有空間分解 $V=\oplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}V_n$ を与え，$V_0=\mathbb{C}|0\rangle$ とする．このとき，V が頂点代数として単純であり，C_2 余条件 $\dim V/V_{(-2)}V<\infty$ をみたすならば *generalized grading-restricted* V 加群と呼ばれる V 加群のなす表現圏 V-mod には自然に *braided* テンソル圏の構造が入る.（さらに，アーベル圏としては *finite* であり，テンソル積 $\otimes$ は右完全である.）

頂点作用素代数 (V,ω) は V-mod が半単純のとき有理的であると呼ばれる.[1] このもともとの設定については V をスーパー頂点作用素代数にしたり，L_0 固有値の分布を $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ にゆるめたりすることができる．ただし，多くのスーパー代数と同様に，スーパー頂点作用素代数の表現圏はアーベル圏になることはほとんどない．これは加群の間の射 $f\in\mathrm{Hom}(M,N)$ が parity-homogeneous でないとき，核や余核に自然な $\mathbb{Z}_2$-grading の構造が入らないことによる．逆に parity-homogeneous な射を考える限り，核や余核は存在し，通常のアーベル圏のようにふるまう．ただし，その時は $\mathrm{Hom}(M,N)=\mathrm{Hom}(M,N)_{\bar{0}}\sqcup\mathrm{Hom}(M,N)_{\bar{1}}$ のように Hom 集合が可換群の非交和とみるのが自然である．以下はこの了解のもとに，スーパー頂点作用素代数 V についても V-mod に braided テンソル圏の構造が入るという言い方をする．以下では ω が自然に存在している V を考えるため，ω に言及せず単に（スーパー）頂点代数ということにする．

有理的共形場理論の例をいくつか紹介する．テンソル積を複素ベクトル空間としてのテンソル積と区別するために $\boxtimes$ と書くことにする．また慣習にのっとって $\boxtimes$ を fusion 積といい，Grothendieck 環 $\mathcal{K}(V)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathcal{K}(V\text{-mod})$ を fusion 環という．

例 2.9 (Wess-Zumino-Witten 模型)**.** 頂点代数 $L_k(\mathfrak{sl}_n)$,（$k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$）は事実 *2.8* の仮定をみたし，有理的共形場理論を定める．単純対象の完全代表系 $\mathrm{Irr}(L_k(\mathfrak{sl}_n))$ は $\mathfrak{sl}_n$ の支配的整ウエイトの集合 $P_+(n)=\oplus_{i=1}^{n-1}\mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i$ の部分集合

$$P_+^k(n)\overset{def}{=}\left\{\lambda=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\varpi_i\in P_+(n)\mid\sum_{i=1}^{n-1}a_i\leq k\right\}$$

を用いて

$$\mathrm{Irr}(L_k(\mathfrak{sl}_n))=\{L_k(\lambda)\mid\lambda\in P_+^k(n)\}$$

でかける．ここで $L_k(\lambda)$ はアフィン *Lie* 環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ のレベル k の最高ウエイト λ で指定される（ただ *1* つの）既約最高ウエイト表現である．フュージョン積 $L_k(\lambda)\boxtimes L_k(\mu)\simeq\oplus_\nu N_{\lambda,\mu}^\nu(k)L_k(\nu)$ は単純 *Lie* 環 $\mathfrak{sl}_n$ の既約表現のテンソル積の分岐則 $L(\lambda)\otimes L(\mu)\simeq\bigoplus_\nu N_{\lambda,\mu}^\nu L(\nu)$（*Richardson-Littlewood* 則）をレベル k でカットした形をしている．とくに $\{L_k(k\varpi_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_n}$ は $L_k(k\varpi_i)\boxtimes L_k(k\varpi_j)\simeq L_k(k\varpi_{i+j})$ をみたし，これにより *fusion* 環 $\mathcal{K}(L_k(\mathfrak{sl}_n))$ は $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$ 上の環になる．詳細は *[10]* をみられたい

例 2.10 (格子頂点代数)**.** 格子 $L=(\mathbb{Z}^n,B)$ を正定値とする．このとき *(*スーパー*)* 格子頂点代数 V_L は $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$-*graded* になることを除いて事実 *2.8* の仮定をみたし，有理的（超）共形場理論を定める．単純対象の完全代表系 $\mathrm{Irr}(V_L)$ は双対格子 $L'\overset{def}{=}\{a\in\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}L\mid(a|L)\subset\mathbb{Z}\}$ を用いて

$$\mathrm{Irr}(V_L)=\{V_{a+L}=\oplus_{\lambda\in a+L}\pi_{L,\lambda}\mid a\in L'/L\}$$

で与えられる．フュージョン積は $V_{a+L}\boxtimes V_{b+L}\simeq V_{a+b+L}$ である．とくに *fusion* 環は群環と同型である：

$$\mathcal{K}(V_L)\simeq\mathbb{Z}[L'/L].$$

[1] 物理の文脈ではこのとき，有理的共形場理論を定めるといわれる.「有理的」という形容詞あてがわれた経緯を筆者は知らないが，有理的共形場理論の中心電荷は有理数であるという結果はこの形容詞を正当化している．

3 $\mathcal{W}$ 代数

3.1 $\mathcal{W}$ 代数の定義と例

$\mathcal{W}$ 代数は basic classical スーパー Lie 環 $\mathfrak{g}$ [2]に付随するアフィンスーパー頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ から，データ

- f : $\mathfrak{g}$ の中の parity が 0 の冪零元
- Γ: $\mathfrak{g} = \oplus_{j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$: f と整合的（good という）な $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-grading

により定まる量子 Drinfeld-Solokov 簡約によって得られるス-パー頂点代数で通常 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma)$ と表記される．ここで量子 Drinfeld-Solokov 簡約とは大体，Γ によって定まる冪零 Lie 環 $\mathfrak{g}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{j>0} \mathfrak{g}_j$ のループ代数 $L\mathfrak{g}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{g}_+[t^{\pm 1}]$ による $V^k(\mathfrak{g})$ のツイストされた semi-infinite cohomology（ループ代数における有限次元 Lie 環のコホモロジーの類似物）

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f; \Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} H^{\frac{\infty}{2}+0}(L\mathfrak{g}_+, V^k(\mathfrak{g}) \otimes F_{\mathfrak{g}_{1/2}})$$

である．$F_{\mathfrak{g}_{1/2}}$ は $L\mathfrak{g}_+$ が作用するあるスーパー頂点代数であり，これがツイストの意味である．

例 3.1 (Principal $\mathcal{W}$ 代数)．*有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の冪零元 f のうち，その随伴軌道 $G.f$ の次元が最大なものが共役を除きただ 1 つ定まり，これを正則冪零元といい，f_{prin} と書く．これと整合的な $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-grading はただ 1 つしかなく，これを Γ_{prin} とおく．これにより定まる，$\mathcal{W}$ 代数を principal $\mathcal{W}$ 代数といい，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}) \stackrel{def}{=} \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\text{prin}}; \Gamma_{\text{prin}})$ とかく．特に $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ の時は，任意の元が Jordan 細胞で分類されたことを思い出すと，*

$$f_{\text{prin}} = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1,i}$$

としてよく，Γ_{prin} は $E_{i,j} \mapsto j - i$ で与えられる．Principal $\mathcal{W}$ 代数の最も簡単な場合は

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2) \simeq Vir_{c(k)}, \quad c(k) \stackrel{def}{=} 1 - 6\frac{(k+1)^2}{k+2},$$

である．$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ のただ 1 つの単純商を $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g})$ と書く．この頂点代数は有理的共形場理論の例を多く与える．特に $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ の時はレベル $k \in \mathbb{C}$ が非退化許容レベル

$$k_{p,q} \stackrel{def}{=} -n + \frac{n+p}{n+q}, \quad p, q \geq 0, \ \gcd(n+p, n+q) = 1$$

のとき，事実 2.8 の仮定を満たし有理的共形場理論の例を与える．その既約表現の分類は

$$\text{Irr}(\mathcal{W}_{k_{p,q}}(\mathfrak{sl}_n)) = \left\{ \mathbb{L}_{\mathcal{W}}(\lambda, \mu) \mid (\lambda, \mu) \in (P_+^p(n) \times P_+^q(n))/\mathbb{Z}_n \right\}$$

で与えられ [1]，fusion 環は

$$\mathcal{K}(\mathcal{W}_{k_{p,q}}(\mathfrak{sl}_n)) \simeq \mathcal{K}(L_p(\mathfrak{sl}_n)) \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]} \mathcal{K}(L_q(\mathfrak{sl}_n))$$

と表示される [6].

例 3.2 ($\mathcal{N} = 2$ super Virasoro 代数)．*スーパー Lie 環 $\mathfrak{sl}_{1|2}$ は basic classical であり，その parity が 0 な正則冪零元は共役を除き*

$$f_{\text{prin}} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

[2] $\mathfrak{sl}_n$ などの有限次元単純 Lie 環をふくみ，以下用いる $\mathfrak{sl}_{1|n}$ といったそれらの自然なスーパー版といくつかの例外型からなるスーパー Lie 環のクラスである．

で与えられる．これと整合的な $\frac{1}{2}$-*grading* は *2* つあり，各行列要素に対応する *grading* の値を表示した行列は以下のとおりである：

$$\Gamma_{\mathrm{prin},1} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -1/2 & 1/2 \\ \hline 1/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad \Gamma_{\mathrm{prin},2} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

どちらの $\frac{1}{2}$-*grading* を選んでも同じスーパー頂点代数が定まり，これを *principal* $\mathcal{W}$ 代数同様 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{1|2})$ とかく．これは $\mathcal{N}=2$ *super Virasoro* 代数と呼ばれ，*even* な *2* つの場 $J(z)$，$L(z)$ と *odd* な *2* つの場 $G^{\pm}(z)$ であって次の *OPE* を満たすもので生成されている．

$$\begin{aligned}
&L(z)L(w) \sim \frac{c_k/2}{(z-w)^4} + \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial L(w)}{z-w}, \quad L(z)J(w) \sim \frac{J(w)}{z-w}, \quad L(z)G^{\pm}(w) \sim \frac{\frac{3}{2}G^{\pm}(w)}{z-w} \\
&J(z)J(w) \sim \frac{c_k/3}{(z-w)^2}, \quad J(z)G^{\pm}(w) \sim \frac{\pm G^{\pm}(w)}{z-w} \\
&G^{\pm}(z)G^{\mp}(w) \sim \frac{2c_k/3}{(z-w)^3} + \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{2L(w)+\partial J(w)}{z-w}, \quad G^{\pm}(z)G^{\pm}(w) \sim 0.
\end{aligned}$$

ここで $c_k = -3(2k+1)$ である．特に，$k = -1 + \frac{1}{r+2}$, $(r \geq 0)$，の場合の単純商 $\mathcal{W}_{-1+\frac{1}{r+2}}(\mathfrak{sl}_{1|2})$ は有理的（超）共形場理論の例を与え，最初の *2* つは

$$\mathcal{W}_{-1+\frac{1}{2}}(\mathfrak{sl}_{1|2}) = \mathbb{C}|0\rangle, \quad \mathcal{W}_{-1+\frac{1}{3}}(\mathfrak{sl}_{1|2}) \simeq V_{\sqrt{3}\mathbb{Z}}$$

である．$\mathcal{N}=2$ *super Virasoro* 代数はその名前の通り，無限次元スーパー *Lie* 環から誘導されたスーパー頂点代数で，既約表現の分類は最高ウエイト理論でとらえることができるが，本稿ではより一般に $\mathfrak{sl}_{1|n}$ に付随する *principal* スーパー $\mathcal{W}$ 代数の表現論の結果を後述するためここでは割愛する．

3.2 Feigin-Frenkel 双対性

$\mathbb{C}$ 上有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ はよく知られているように Cartan 行列で次のように分類されている：

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}(A_n) \simeq \mathfrak{sl}_{n-1}, \quad \mathfrak{g}(B_n) \simeq \mathfrak{so}_{2n+1}, \quad \mathfrak{g}(C_n) \simeq \mathfrak{sp}_{2n}, \quad \mathfrak{g}(D_n) \simeq \mathfrak{so}_{2n}, \\
&\mathfrak{g}(G_2), \quad \mathfrak{g}(F_4), \quad \mathfrak{g}(E_6), \quad \mathfrak{g}(E_7), \quad \mathfrak{g}(E_8).
\end{aligned}$$

そして，Cartan 行列を転置する（Lie 環の言葉では対応するルートとコルートというデータを入れ替える）ことで $\mathfrak{g}$ の Langlands 双対 ${}^L\mathfrak{g}$ が定まるのであった．上のリストでは $\mathfrak{g}(B_n) \leftrightarrow \mathfrak{g}(C_n)$ の入れ替える以外はそのままである．この Lie 環の入れ替えは principal $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g}$ はスーパーではない）の間の非自明な同型に持ち上がることが知られている：

事実 3.3 (Feigin-Frenkel). *Principal* $\mathcal{W}$ 代数の間にはレベルが $r(k+h^\vee)({}^Lk + {}^Lh^\vee) = 1$ の関係にあるとき頂点代数の同型

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{W}^{{}^Lk}({}^L\mathfrak{g})$$

が存在する．ここで，r は *lacing* 数と呼ばれる *Langlands* 双対で不変な数であり，$h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 *Coxeter* 数である．

とくに，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ の時は $(k+n)(\ell+n) = 1$ を満たす (k,ℓ) に関する同型 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n) \simeq \mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_n)$ を主張する．証明の概略は，$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ に付随する Heisenberg 頂点代数 $\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$ に埋め込み，generic なレベル k ではその像が遮蔽作用素と呼ばれる線形写像の共通核で記述されることを用いる：

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}) \simeq \bigcap_{i=1}^{\mathrm{rank}(\mathfrak{g})} \mathrm{Ker}\left(\int :e^{\frac{-1}{\sqrt{k+h^\vee}}\int \alpha_i(z)}: dz \ : \ \pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee} \to \pi^{k+h^\vee}_{\mathfrak{h},-\frac{1}{\sqrt{k+h^\vee}}\alpha_i}\right).$$

もう少し詳しくは，$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の時は実際にこの核が Virasoro 頂点代数を生成する 1 つの場で生成することを実際に確かめることができる．(もっとも $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の時の事実 3.3 の証明は中心電荷の一致のみを示せば十分である．）ここで，$\pi_{\mathfrak{h}}^{k+h^\vee}$ は大体 $\mathfrak{g}$ のコルートのデータに対応し，遮蔽作用素たちが $\mathfrak{g}$ のルートのデータに対応する．事実 3.3 の証明の筋は $i=1,c\dots\mathrm{rank}\mathfrak{g}$ ごとに遮蔽作用素を $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ の場合の遮蔽作用素の入れ替えを行うと，実は全体でルートとコルートのデータの入れ替えになっており，事実 3.3 の証明が generic な k の場合できたことになる．これを一般のレベルにするには $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g})$ が k の有理関数体 $\mathbb{C}(k)$ 上で定義できるなど，技術的な内容を多く必要とする．ここではただ「k に関する連続性の議論により」一般のレベルの証明は generic レベルの証明に帰着されるとのべるにとどめることとする．詳しくは [2] をみられたい．

3.3 Feigin-Semikhatov 双対性

物理学者の Gaiotto と Rapčák によって 4 次元スーパー Yang-Mills 理論の間の S 双対性が考察され，その影として二次元共形場理論の間の双対性が予想された．数学的に述べると，アフィンスーパー頂点代数，(スーパー）$\mathcal{W}$ 代数，およびそれらのアフィン頂点部分代数によるコセット頂点代数と呼ばれるスーパー頂点代数の間の数々の同型が予想された．それらの詳細は [12] を見ていただきたいが，もっとも簡単な場合が事実 3.3 の Lie 代数が古典（$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n,\mathfrak{so}_n,\mathfrak{sp}_{2n}$）の場合である．この次に簡単な場合がもともと Feigin-Semikhatov による，$\mathcal{W}$ 代数の遮蔽作用素による表示と OPE 計算のもとに予想された $\mathfrak{sl}_n$ と副正則冪零元 $f_{\mathrm{sub}}=\sum_{i=2}^{n-1}E_{i+1,i}$ に付随した subregular $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n,f_{\mathrm{sub}})$ と，$\mathfrak{sl}_{1|n}$ と正則冪零元 $f_{\mathrm{sub}}=\sum_{i=2}^{n}E_{i+1,i}$ に付随した principal スーパー $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{1|n})$ の間の双対性である．正確には次の主張が成立する．

Theorem 3.4 (Creutzig-元良-N [7], Creutzig-Linshaw [9])**.** *Subregular* $\mathcal{W}$ 代数の *Heisenberg* 部分代数 π_{sub} によるコセット頂点代数 $\mathrm{Com}(\pi_{\mathrm{sub}},\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n,f_{f_{\mathrm{sub}}}))$ と *principal* スーパー $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ の *Heisenberg* 部分代数 π_{sprin} によるコセット頂点代数 $\mathrm{Com}(\pi_{\mathrm{sprin}},\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{1|n}))$ の間には $(k,\ell)\neq(-n,-n+1),\left(-n+\frac{n}{n-1},\frac{(n-1)^2}{n}\right)$ が関係式 $(k+n)(\ell+n-1)=1$ を満たすとき，同型

$$\mathrm{Com}(\pi_{\mathrm{sub}},\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n,f_{f_{\mathrm{sub}}}))\simeq\mathrm{Com}(\pi_{\mathrm{sprin}},\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_{1|n}))$$

が存在する．

証明は事 3.3 の場合とまったく同様である．更にこの二つの $\mathcal{W}$ 代数は一方からもう一方を作り出すことができるという，より強い関係にある．

Theorem 3.5 (Creutzig-元良-N[7])**.** レベル $(k,\ell)\neq(-n,-n+1)$ が関係式 $(k+n)(\ell+n-1)=1$ を満たすとき以下の（スーパー）頂点代数の同型がある：

1. $\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})\simeq\mathrm{Com}\left(\pi_1,\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n,f_{\mathrm{sub}})\otimes V_{\mathbb{Z}}\right)$,

2. $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_n,f_{\mathrm{sub}})\simeq\mathrm{Com}\left(\pi_2,\mathcal{W}^\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})\otimes V_{\mathbb{Z}\sqrt{-1}}\right)$.

ここで π_i はあるランク *1* の *Heisenberg* 部分頂点代数である．

この定理の $n=2$ の場合は $\mathcal{N}=2$ super Virasoro 代数とアフィン頂点代数 $V^k(\mathfrak{sl}_2)(=\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2,f_{\mathrm{sub}}))$ の間の関係を主張しており，(1) は風間ー鈴木コセット構成，(2) は Feigin-Semikhatov-Tipunin による逆構成として知られている．これにより，この二つの代数の表現圏の間の対応が分かり $\mathcal{N}=2$ super Virasoro 代数が有理的超共形場理論を定めるときの表現論は，Adamović によりアフィン頂点代数 $L_k(\mathfrak{sl}_2)$ の表現論に帰着される方法で調べられた．

4　表現論への応用

単純な Subregular $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})$ は

$$k_r = -n + \frac{n+r}{n-1}, \quad r \geq 0,\ \gcd(n+r, n-1) = 1$$

の時に，有理的共形場理論を定め，その既約表現の完全代表系はレベル r の支配的整ウエイトの集合 $P_+^r(n)$ と一対一に対応することが知られている [3]．その fusion 環について以下が成立する：

Theorem 4.1.　*Fusion 環の間の同型*

$$\mathcal{K}(\mathcal{W}_{k_r}(\mathfrak{sl}_n, f_{\mathrm{sub}})) \simeq \mathcal{K}(L_r(\mathfrak{sl}_n))$$

が (1) n が偶数の時 [3] 或いは (2) $r \geq 3$ の時 [8] に成立する．

これと，定理 3.5 を組み合わせることで次をえる．

Theorem 4.2 (Creutzig-元良-N-佐藤 [8])**.** *単純な principal スーパー $\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}_\ell(\mathfrak{sl}_{1|n})$ は*

$$\ell_r = -(n-1) + \frac{n-1}{n+r}, \quad r \geq 3,\ \gcd(n+r, n-1) = 1$$

の時，有理的超共形場理論を定める．さらに，fusion 環は

$$\mathcal{K}(\mathcal{W}_{\ell_r}(\mathfrak{sl}_{1|n})) \simeq \left(\mathcal{K}(L_r(\mathfrak{sl}_n)) \bigotimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_{n(n+r)}] \right)^{\mathbb{Z}_n}$$

と書ける．

謝辞

本研究は Alberta 大学の Thomas Creutzig 氏，元良直輝氏，台湾中央研究院の佐藤僚氏との共同研究に基づきます．また，本研究は FMSP リーディング大学院，科研費（課題番号：20J10147）及び，World Premier International Research Center Initiative (WPI Initiative), MEXT, Japan の助成を受けております．

参考文献

[1] T. Arakawa, Representation theory of $\mathcal{W}$-algebras, Invent. Math., **169**, 2007, (2), 219–320.

[2] T. Arakawa, and T. Creutzig, and A. Linshaw, W-algebras as coset vertex algebras, Invent. Math., **218**, 2019, (1), 145–195.

[3] T. Arakawa, and J. van Ekeren, Rationality and Fusion Rules of Exceptional W-Algebras, arXiv:1905.11473 [math.RT].

[4] R. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **83**, 1986, (10), 3068–3071.

[5] B. Bakalov and A. Kirillov, Jr., Lectures on tensor categories and modular functors, University Lecture Series, **21**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, x+221.

[6] T. Creutzig, Fusion categories for affine vertex algebras at admissible levels, Selecta Math. (N.S.), **25**, 2019, (2), Paper No. 27, 21.

[7] T. Creutzig, and N. Genra, and S. Nakatsuka, Duality of subregular $\mathcal{W}$-algebras and principal $\mathcal{W}$-superalgebras,a arXiv:2005.10713 [math.QA].

[8] T. Creutzig, and N. Genra, and S. Nakatsuka, and R. Sato, to appear.

[9] T. Creutzig, and A. Linshaw, Trialities of W-algebras, arXiv:2005.10234 [math.RT].

[10] P. Di Francesco, and P. Mathieu, and D. Sénéchal, Conformal field theory, Graduate Texts in Contemporary Physics, Springer-Verlag, New York, 1997, xxii+890.

[11] E. Frenkel, and D. Ben-Zvi, Vertex algebras and algebraic curves, Mathematical Surveys and Monographs, **88**, American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2004.

[12] D. Gaiotto, and M. Rapčák, Vertex algebras at the corner, J. High Energy Phys., 2019, (1).

[13] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, J. Amer. Math. Soc., **9**, 1996, (1), 237–302.

[14] 上野健爾, 清水勇二，複素構造の変形と周期：共形場理論への応用，岩波書店，2008.

[15] 河野俊丈，場の理論とトポロジー，岩波書店，2008.