フラクタル n 角形の connectedness locus について

京都大学大学院　人間・環境学研究科
中島由人 (Yuto Nakajima)

概要

2 以上の自然数 n に対して定義されるフラクタル n 角形は, 単位円盤の点でパラメトライズされる, 平面上のある n 個の縮小的な「線形」写像からなる反復関数系の極限集合であり, 著しい性質として回転対称性を有する. 自然数 n を固定したときにフラクタル n 角形が連結になるパラメータ集合 $\mathcal{M}_n$ についてこれまで様々な研究が行われてきた. 特に $\mathcal{M}_2$ は連結であることが Bousch により知られている. 本稿では, Bousch の方法を拡張して, ある条件をみたす複素平面内のコンパクト集合の元を係数にもつ冪級数の族の零根たちの単位円盤上の集合が連結になることを示し, その応用例として, 全ての n で $\mathcal{M}_n$ は連結であることを示す.

1　導入

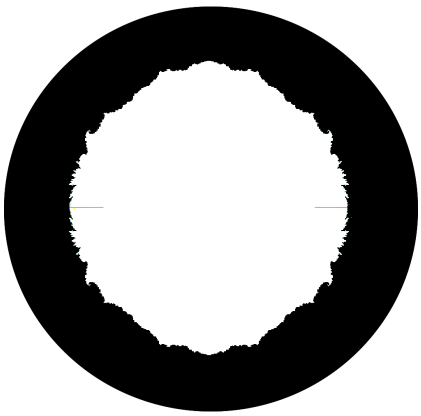

図 1. $\mathcal{M}_2$

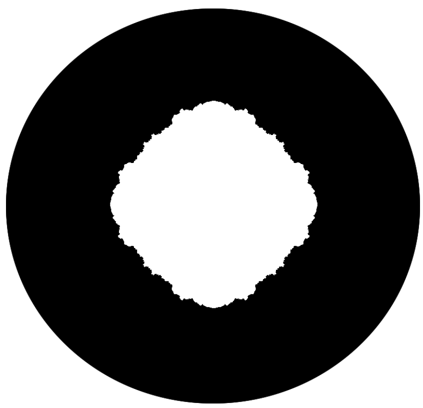

図 2. $\mathcal{M}_4$

1985 年 Barnsley と Harrington([3]) は, よく知られた複素二次多項式の力学系に関するマンデルブロ集合の類推物として, 平面上の反復関数系 $\{\lambda z+1, \lambda z-1\}$($\lambda$ は $0<|\lambda|<1$ を満たす複素数) のマンデルブロ集合 $\mathcal{M}_2$ (図 1 を参照) を導入した. すなわち $\mathcal{M}_2$ とは,

$$\mathcal{M}_2 := \{\lambda \in \mathbb{D}^\times \mid A_2(\lambda) \text{ は連結 }\}$$

である. ただし, $\mathbb{D}^\times := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0<|\lambda|<1\}$ で, 集合 $A_2(\lambda)$ は反復関数系 $\{\lambda z+1, \lambda z-1\}$ の極限集合である (反復関数系とその極限集合については, 定義 2.1 を参照). 図 1 をみれば, $\mathcal{M}_2$ は “輪っか” のようで, 二本の “髭” のようなものが伸びているように見える. 実際原点からある範囲のところまでは大きな穴が空いていることは比較的容易に証明され, “髭” の存在も Barnsley と Harrington

([3]) によって厳密に証明されているし, “髭” がどれくらい伸びているかも色々知られている ([17], [16], [7]).

さて, 他には $\mathcal{M}_2$ にどのような性質があるだろうか. まず図を見れば明らかに連結そうだが, それを明確に示したのが Bousch ([4], [5]) である. 1988 年に Bousch は $\mathcal{M}_2$ は連結であり ([4]), さらに 1992 年に局所連結であることも示している ([5]). これはオリジナルのマンデルブロ集合の局所連結性が未だ解かれずにいるのと比べ, 重大な違いである. 2002 年に Bandt([1]) は $\mathcal{M}_2$ に非自明な穴 (真ん中の大きな穴ではない) の存在を示し, 同時に $\mathrm{cl}\big(\mathrm{int}(\mathcal{M}_2)\big) \cup (\mathcal{M}_2 \cap \mathbb{R}) = \mathcal{M}_2$ が成り立つという予想をした. ここで, 集合 $A \subset \mathbb{C}$ に対して, $\mathrm{cl}(A)$ と $\mathrm{int}(A)$ は各々 A の閉包と A の内核を表す. これは “髭” が伸びている実軸を除けば内点が稠密に存在していることを主張する. この予想に対して部分的なアプローチを Solomyak と Xu ([18]) が行っている. Bandt と Hung ([2]) はこの予想を背景に, 2 以上の自然数 n に対して, $\mathcal{M}_2$ を一般化させた $\mathcal{M}_n$ を以下で導入した (図 2 を参照).

$$\mathcal{M}_n := \{\lambda \in \mathbb{D}^\times \mid A_n(\lambda) \text{ は連結 }\}.$$

ただし $A_n(\lambda)$ はパラメータ λ に対応した “**フラクタル n 角形**” である (定義 2.2 参照). 彼らは n が 2 と 4 以外であれば, $\mathrm{cl}\big(\mathrm{int}(\mathcal{M}_n)\big) = \mathcal{M}_n$ を示している. Bandt 予想は 2016 年に Calegari, Koch と Walker ([7]) によって解決され, 2018 年には Himeki と Ishii ([11]) が彼らの手法を部分的に適用して $n \geq 4$ のときに $\mathrm{cl}\big(\mathrm{int}(\mathcal{M}_n)\big) = \mathcal{M}_n$ を示している (特に $n = 4$ では新しい結果). したがって $\mathcal{M}_n$ の内点の稠密性に関する問題は解決した.

しかしながら, 一般の n に対する $\mathcal{M}_n$ の連結性に関しては厳密に証明されていない (これは Bandt と Hung も論文内で言及している). ただし, Himeki ([10]) は $n = 3$ のときに限り, $\mathcal{M}_n$ の連結性の証明に成功している. 今回我々が示すのは $\mathcal{M}_n$ は全ての n で連結だということである.

2 準備

2.1 反復関数系

以下では n を 2 以上の自然数, $\mathbb{C}$ を複素数全体からなる集合とし, 常に通常のユークリッドノルム $|\cdot|$ をいれる. また, 部分集合 $A \subset \mathbb{C}$ が連結, コンパクトというとき, 常に通常のユークリッド位相に関するものとする.

ここではフラクタル n 角形並びに $\mathcal{M}_n$ を定義するために反復関数系並びにその極限集合の連結性に関する一般論について論じよう.

定義 2.1 (反復関数系, 極限集合)**.** m を自然数とし, (X, ρ) を完備距離空間とする. $\{f_0, ..., f_m\}$ を (X, ρ) 上の縮小写像の組とする. ここで, (X, ρ) 上の写像 f が縮小的であるとは, ある $0 < c < 1$ が存在して, 全ての $x, y \in X$ に対して, $\rho(f(x), f(y)) \leq c\rho(x, y)$ をいう. この時 X のある空でないコンパクト (これは (X, ρ) の距離位相に関して) 部分集合 A が一意に存在し,

$$A = \bigcup_{i=0}^{m} f_i(A) \tag{1}$$

を満たす. このとき, 縮小写像らの組 $\{f_0, ..., f_m\}$ を X 上の反復関数系 (Iterated Function System, 以

下略して IFS と書く) といい, A を $\{f_0, ..., f_m\}$ の極限集合という.

式 (1) は反復関数系 $\{f_0, ..., f_m\}$ の極限集合 A の自己相似性を表していると言えるので, しばしば極限集合 A のことを自己相似集合と呼ぶこともあるが, 関数たち $f_0, ..., f_m$ が相似写像に限ってそう呼ぶ場合がほとんどである. IFS の詳細は例えば, [8] を参照せよ. IFS およびその一般化概念の研究の歴史は古く, 1946 年の Moran ([14]) に始まり, 1981 年に Hutchinson ([12]) により上記のような現代的な枠組みが構成された. それではフラクタル n 角形を定義しよう.

定義 2.2 (フラクタル n 角形, [2])**.** $\xi_n = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ とおく. $\mathbb{D}^\times := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 < |\lambda| < 1\}$ で定め, $\lambda \in \mathbb{D}^\times$ とする. 全ての $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ に対して, 関数 $\phi_i^{n,\lambda} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を

$$\phi_i^{n,\lambda}(z) = \lambda z + {\xi_n}^i$$

で定める. このとき, n と λ を固定した時に, 全ての i について, $|\phi_i^{n,\lambda}(z_1) - \phi_i^{n,\lambda}(z_2)| = |\lambda||z_1 - z_2|$ が全ての $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ について成り立ち, $0 < |\lambda| < 1$ より関数 $\phi_i^{n,\lambda}$ は縮小的. したがって関数の組 $\{\phi_0^{n,\lambda}, \phi_1^{n,\lambda}, ..., \phi_{n-1}^{n,\lambda}\}$ は完備距離空間 $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ 上の反復関数系なので, 定義 2.1 より, ある空でないコンパクト集合 $A_n(\lambda) \subset \mathbb{C}$ が一意に存在して

$$A_n(\lambda) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \phi_i^{n,\lambda}(A_n(\lambda))$$

が成り立つ. $A_n(\lambda)$ をパラメータ λ に対応したフラクタル n 角形と呼ぶ (例は図 3, 4, 5 参照).

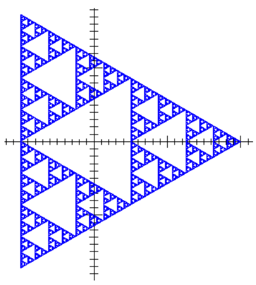

図 3. $n = 3, \lambda = 0.5$

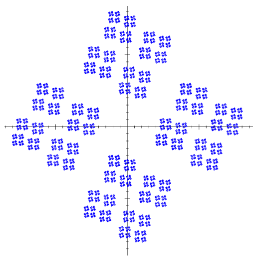

図 4. $n = 4, \lambda = 0.386 + 0.103\sqrt{-1}$

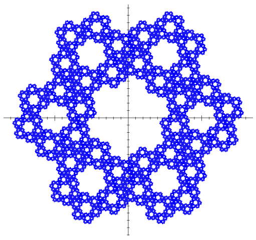

図 5. $n = 6, \lambda = 0.357 + 0.124\sqrt{-1}$

フラクタル n 角形の名前の由来は, 反復関数系をなす関数に出てくる $\{\xi_n^0, \xi_n^1, ..., \xi_n^{n-1}\}$ が正 n 角形の頂点になっているからだろう. 定義としては上で十分だが, いくぶん抽象的でわかりにくい. 反復関数系が具体的なため, フラクタル n 角形を具体的に表示したい. そのために, 全ての n に対して, $I_n := \{0, 1, ..., n-1\}$ とおき, I_n の無限直積 I_n^∞ の元 ω を $\omega = \omega_0\omega_1 \cdots \omega_j \cdots$ $(\omega_j \in I_n)$ と表すことにすると,

$$A_n(\lambda) = \{\sum_{j=0}^{\infty} {\xi_n}^{\omega_j} \lambda^j \in \mathbb{C} \mid \omega = \omega_0\omega_1 \cdots \in I_n^\infty\} \tag{2}$$

となる. これを確かめてみよう. (2) の右辺の集合を $P_n(\lambda)$ とおく. もし集合 $P_n(\lambda)$ が $\mathbb{C}$ の空でないコンパクト部分集合で自己相似性の式 (1) を満たすことが示されれば, (1) を満たす空でないコンパクト部分集合の存在の一意性から, $A_n(\lambda) = P_n(\lambda)$ が言える.

写像 $\pi^{n,\lambda}: I_n^\infty \to \mathbb{C}$ を

$$\pi^{n,\lambda}(\omega) := \sum_{j=0}^{\infty} {\xi_n}^{\omega_j} \lambda^j$$

で定めよう．この写像 $\pi^{n,\lambda}$ を反復関数系 $\{\phi_0^{n,\lambda}, \phi_1^{n,\lambda}, ..., \phi_{n-1}^{n,\lambda}\}$ のアドレスマップという．アドレス (住所) $\omega = \omega_0\omega_1\cdots$ を入れれば, 住むところ $\pi^{n,\lambda}(\omega) \in \mathbb{C}$ が対応するわけである．すると $P_n(\lambda) = \pi^{n,\lambda}(I_n^\infty)$ となる．I_n^∞ 上に距離 η を $\eta(\omega,\tau) := (1/n)^{\inf\{j\in\{0,1,...\} \mid \omega_j \neq \tau_j\}}$ で入れれば, 距離空間 (I_n^∞, η) はコンパクト距離空間 (η が距離になっていることはさほど難しくなく, この場合は点列コンパクト性が直ちにいえる)．さらに, 写像 $\pi^{n,\lambda}: I_n^\infty \to \mathbb{C}$ はこの距離に関して連続 (ざっくりと言えば, ω と τ が近ければ, 十分大きな j まで $\omega_j = \tau_j$ なので, $\pi^{n,\lambda}(\omega)$ と $\pi^{n,\lambda}(\tau)$ は近い) なので, $\pi^{n,\lambda}$ の像である $P_n(\lambda)$ はコンパクトである．次に, 集合 $P_n(\lambda)$ が自己相似性を表す式 (1) を満たすことを示そう．全ての $i \in I_n$ に対して,

$$\begin{aligned}
\phi_i^{n,\lambda}(P_n(\lambda)) &= \{\phi_i^{n,\lambda}(\sum_{j=0}^{\infty} {\xi_n}^{\omega_j} \lambda^j) \mid \omega = \omega_0\omega_1\cdots \in I_n^\infty\} \\
&= \{\lambda(\sum_{j=0}^{\infty} {\xi_n}^{\omega_j} \lambda^j) + \xi_n^i \mid \omega = \omega_0\omega_1\cdots \in I_n^\infty\} \\
&= \{\xi_n^i \lambda^0 + \sum_{j=1}^{\infty} {\xi_n}^{\omega_j} \lambda^j \mid \omega = \omega_1\omega_2\cdots \in I_n^\infty\} \subset P_n(\lambda)
\end{aligned}$$

なので,

$$P_n(\lambda) \supset \bigcup_{i=0}^{n-1} \phi_i^{n,\lambda}(P_n(\lambda)).$$

$\subset$ については, 任意の $z \in P_n(\lambda)$ はある $\omega = \omega_0\omega_1\cdots \in I_n^\infty$ を用いて,

$$z = \sum_{j=0}^{\infty} {\xi_n}^{\omega_j} \lambda^j$$

と表せるが, これは,

$$z = \phi_{\omega_0}^{n,\lambda}(\sum_{j=0}^{\infty} {\xi_n}^{\omega_{j+1}} \lambda^j)$$

とも表せるので,

$$z \in \phi_{\omega_0}^{n,\lambda}(P_n(\lambda)) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} \phi_i^{n,\lambda}(P_n(\lambda))$$

となる．したがって (1) の成立がわかった．以上から, $A_n(\lambda) = P_n(\lambda)$ が言えた．

もちろん $P_n(\lambda)$ のコンパクト性をいうだけならばアドレスマップを介さず示せるが, このアドレスマップはこういった分野に度々顔を出す大事な写像であるため導入した．アドレスマップは一般の反復関数系に対しても定義されるが, ここでは詳細は割愛する．

2.2 極限集合の連結性

フラクタル n 角形を定義したので, その連結ローカス $\mathcal{M}_n$ を改めて定義する. 自然数 n とパラメータ λ に対して反復関数系 $\{\phi_0^{n,\lambda}, \phi_1^{n,\lambda}, ..., \phi_{n-1}^{n,\lambda}\}$ とその極限集合であるフラクタル n 角形 $A_n(\lambda)$ を固定する.

定義 2.3.

$$\mathcal{M}_n := \{\lambda \in \mathbb{D}^\times \mid A_n(\lambda) \text{ は連結 }\}.$$

ちなみに連結ローカスの「ローカス」は英語で「locus」と書き, 「場所」や「位置」を意味する. すなわちフラクタル n 角形 $A_n(\lambda)$ の連結ローカスとは, $A_n(\lambda)$ が連結である場所 λ の集まりというわけである. それはともかく「$A_n(\lambda)$ は連結」というのはやはり抽象的で調べにくい. ここでも $\mathcal{M}_n$ を具体的に表すことを考える.

そのために一般的な話をしておこう. $\{f_0, ..., f_m\}$ を完備距離空間 (X, ρ) 上の反復関数系とし, $A \subset X$ を $\{f_0, ..., f_m\}$ の極限集合とする. $\{f_0, ..., f_m\}$ の極限集合 A に対して, $A_i := f_i(A) (i \in \{0, 1, ..., m\})$ と省略してかく. この A_i を A のピースと呼ぶ. すでに以下のことが知られている.

定理 2.4 (Hata ([9]))**.** 以下は同値である.

(1) A は連結である.

(2) A は弧状連結である.

(3) 任意の $i, j \in \{0, ..., m\}$ に対して, ある $n_1, n_2, ..., n_k \in \{0, ..., m\}$ が存在して, $n_1 = i, n_k = j$ で, 任意の $l \in \{1, ..., k-1\}$ に対して, $A_{n_l} \cap A_{n_{l+1}} \neq \emptyset$.

主張 (3) がいっているのは, 全ての二つのピースに対して, それらを鎖状につないでいくピースがあるということである. 証明は [13, 定理 1.6.2] を参照.

それでは, これを具体的にフラクタル n 角形の場合に適応してみよう. フラクタル n 角形のピース $\phi_i^{n,\lambda}(A_n(\lambda))$ も同様に省略して,$A_n(\lambda)_i$ とかくことにする.

もし,

$$A_n(\lambda)_0 \cap A_n(\lambda)_1 \neq \emptyset$$

が成り立つならば, 具体的な表示 (2) から, ある $\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \in I_n^\infty$ と $\tau = \tau_1\tau_2 \cdots \in I_n^\infty$ が存在して,

$$\xi_n^0 + \sum_{j=1}^{\infty} {\xi_n}^{\omega_j} \lambda^j = \xi_n^1 + \sum_{j=1}^{\infty} {\xi_n}^{\tau_j} \lambda^j$$

となるが, 両辺に ξ_n をかけてやれば,

$$\xi_n^1 + \sum_{j=1}^{\infty} {\xi_n}^{\omega_j+1} \lambda^j = \xi_n^2 + \sum_{j=1}^{\infty} {\xi_n}^{\tau_j+1} \lambda^j$$

となり,

$$A_n(\lambda)_1 \cap A_n(\lambda)_2 \neq \emptyset$$

をえる. 同様に全ての $i \in \{0, ..., n-1\}$ に対して,

$$A_n(\lambda)_i \cap A_n(\lambda)_{i+1} \neq \emptyset$$

をえる ($i = n-1$ のときは, $i+1$ は 0). したがって, 任意の $i < j \in \{0, ..., n-1\}$ に対して, $n_1 := i, n_2 := i+1, ..., n_{j-i+1} := j$ とおけば (足し算は mod n で), 任意の $l \in \{1, ..., j-i\}$ に対して,

$$A_n(\lambda)_{n_l} \cap A_n(\lambda)_{n_{l+1}} \neq \emptyset$$

がいえる. したがって定理 2.4 より, $A_n(\lambda)$ は連結である. したがって次がいえる.

$$\text{「}A_n(\lambda)_0 \cap A_n(\lambda)_1 \neq \emptyset\text{」} \Longrightarrow \text{「}A_n(\lambda) \text{ は連結」}.$$

それでは逆は真なのかということになるが, 結論から言えば正しいのだが, 示すのは結構大変 (難しいのではなく面倒臭い. 詳細は [2, 定理 2] を参照). 結局次の定理をえる.

定理 2.5.

$$\text{「}A_n(\lambda)_0 \cap A_n(\lambda)_1 \neq \emptyset\text{」} \Longleftrightarrow \text{「}A_n(\lambda) \text{ は連結」}.$$

したがってフラクタル n 角形の連結性をみるには, 隣り合ったピースの交わり具合を見ればよい. また, 定理 2.5 の $\Longrightarrow$ の証明から, フラクタル n 角形は $2\pi/n$ 回転で変わらないという回転対称性を有しているのもわかる.

さて, それでは式「$A_n(\lambda)_0 \cap A_n(\lambda)_1 \neq \emptyset$」を改めて以下のように書き換えていく.

$$\begin{aligned}
A_n(\lambda)_0 \cap A_n(\lambda)_1 \neq \emptyset &\Longleftrightarrow \xi_n^0 + \sum_{j=1}^{\infty} {\xi_n}^{\omega_j} \lambda^j = \xi_n^1 + \sum_{j=1}^{\infty} {\xi_n}^{\tau_j} \lambda^j \\
&\qquad (\exists \omega = \omega_1 \omega_2 \cdots, \tau = \tau_1 \tau_2 \cdots \in I_n^{\infty}) \\
&\Longleftrightarrow 1 - \xi_n + \sum_{j=1}^{\infty} ({\xi_n}^{\omega_j} - {\xi_n}^{\tau_j}) \lambda^j \\
&\Longleftrightarrow 1 + \sum_{j=1}^{\infty} ({\xi_n}^{\omega_j} - {\xi_n}^{\tau_j}) / (1 - \xi_n) \lambda^j.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\Omega_n := \{ \frac{{\xi_n}^j - {\xi_n}^k}{1 - \xi_n} \mid j, k \in I_n \}. \tag{3}$$

とおけば, 以下の命題をえる.

命題 2.6.

$$\mathcal{M}_n = \{ \lambda \in \mathbb{D}^{\times} \mid \exists d_j \in \Omega_n \text{ s.t. } 1 + \sum_{j=1}^{\infty} d_j \lambda^j = 0 \}.$$

3　$\mathcal{M}_n$ の連結性

3.1　Bousch の方法の拡張

ここでは Bousch による $\mathcal{M}_2$ の連結性の証明を拡張することを考える．詳細は省くが, Bousch の方法をそのまま適用できるのは, $n=3$ のときである．実は, Bousch は同一論文内で $\mathcal{M}_2$ の部分集合 $\{\lambda \in \mathbb{D}^\times \mid \exists d_j \in \{-1,1\} \text{ s.t. } 1+\sum_{j=1}^{\infty} d_j\lambda^j = 0\}$ の連結性も示している (ちなみにこの集合は $\{\lambda \in \mathbb{D}^\times \mid 0 \in A_2(\lambda)\}$ に等しい)．この集合の連結性もほぼ同様の方法で行われるが, 少しだけある工夫をする．それについて簡単に説明する．

まず $\mathcal{M}_2$ の場合対応する係数集合は $\{-1,0,1\}$ となるが, この集合の任意の元は「繋がる」．ここで「繋がる」とは, 例えば 0 と 1 の場合, その差である $1-0=1$ が再び係数集合の元になることを指す．また, -1 と 1 の場合は, $1-(-1)=2$ で係数集合から飛び出るが, 0 を挟めば, $0-(-1)=1$ と $1-0=1$ が係数集合に入るから, -1 と 1 は「繋がる」．一方係数集合が $\{-1,1\}$ の場合は, 挟む元である 0 がないので「繋げない」ように思えるが, $1-(-1)$ に -1 という係数集合の元を足すことにより, 再び係数集合に戻すことができ, 「繋がる」．この「繋がる」を拡張した我々の設定が以下である．

定義 3.1. G を $\mathbb{C}$ の部分集合とする．G が条件 $(*)$ を満たすとは G が以下の条件 (i), (ii), (iii) の全てを満たすときにいう．

(i) $1 \in G$.

(ii) 任意の $a \neq b$ なる $a, b \in G$ に対して, ある $b_1, b_2, ..., b_m \in G$ で $b_1 = a$ と $b_m = b$ を満たすものが存在して, 全ての $c \in G$ に対して, ある $d_1, d_2, ..., d_{m-1} \in G$ が存在して,

$$(b_2-b_1)c+d_1 \in G, (b_3-b_2)c+d_2 \in G, ..., (b_m-b_{m-1})c+d_{m-1} \in G$$

が成り立つ．

(iii) G はコンパクト部分集合.

G を条件 $(*)$ を満たす集合とする．$\mathbb{D}$ を単位円盤とする．このとき,

$$P^G = \{1+\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i \mid a_i \in G\},$$
$$X^G = \{z \in \mathbb{D} \mid \text{ある } f \in P^G \text{ が存在して } f(z)=0\}.$$

とおく．以下の結果をえる．

定理 3.2 ([15])**.** G を条件 $(*)$ を満たす集合とする．ある実数 R で $0<R<1$ を満たすものが存在して, $\{z \in \mathbb{C} \mid R<|z|<1\} \subset X^G$ を満たすとする．このとき, X^G は連結である．

証明の詳細は, [15] の 4 から 9 ページを参照.

3.2　$\mathcal{M}_n$ は連結である

ここでは次の定理を示すことが目的である．

定理 3.3 ([15]). $\mathcal{M}_n$ は連結である.

まず, 命題 2.6 より,

補題 3.4.
$$\mathcal{M}_n = X^{\Omega_n}.$$

さらに次がいえる.

補題 3.5.
$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{\sqrt{n}} < |\lambda| < 1\} \subset \mathcal{M}_n.$$

これをざっくりと説明する. まず任意に $\lambda \in \mathbb{D}^\times \backslash \mathcal{M}_n$ をとる. するとフラクタル n 角形 $A_n(\lambda)$ はカントール集合になる. ここでいうカントール集合は前出のアドレスマップ $\pi^{n,\lambda}$ を通して $I_n^\infty = \{0, ..., n-1\}^\infty$ と同相であることを指す.

次に $A_n(\lambda)$ と I_n^∞ の「ハウスドルフ次元」について考えよう. ある距離空間の部分集合の「ハウスドルフ次元」とは距離によって定まるある t 次元ものさし (t は非負実数) で測ったときにその値が正かつ有限になるような一意に存在する t で定義される (厳密には少し違うが). そこで $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ の部分集合 $A_n(\lambda)$ のハウスドルフ次元を $\dim_H(A_n(\lambda))$ とおいて, (I_n^∞, η) のハウスドルフ次元を $\dim_H^\eta(I_n^\infty)$ とおく (η は, $\eta(\omega, \tau) := (1/n)^{\inf\{j \in \{0,1,\dots\} \mid \omega_j \neq \tau_j\}}$). $\pi^{n,\lambda}(I_n^\infty) = A_n(\lambda)$ と $\dim_H^\eta(I_n^\infty) = 1$ になることと, 全ての ω, τ について, ある $C_{n,\omega,\tau,\lambda} > 0$ が存在して,

$$|\pi^{n,\lambda}(\omega) - \pi^{n,\lambda}(\tau)| = C_{n,\omega,\tau,\lambda}\eta(\omega, \tau)^{-\log|\lambda|/\log n}$$

となることから (この辺りは非自明な議論だが省略. 詳しくは [8] など参照),

$$\dim_H(A_n(\lambda)) = \frac{-\log n}{\log|\lambda|}$$

が従う. さらに 2 次元空間内の集合のハウスドルフ次元は常に 2 以下なので, $1/\sqrt{n} \geq |\lambda|$. ゆえに,

$$\lambda \in \mathbb{D}^\times \backslash \mathcal{M}_n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \geq |\lambda|.$$

これの対偶をとれば補題 3.5 が従う.

さて, あと我々は係数集合 Ω_n が条件 $(*)$ を満たすことを確かめれば, 補題 3.4 と補題 3.5 と合わせて, 定理 3.2 の仮定を満たすことから, $X^{\Omega_n}(= \mathcal{M}_n)$ の連結性がいえる. その詳細は [15] の 9 から 16 ページを参照.

参考文献

[1] C. Bandt, *On the Mandelbrot set for pairs of linear maps*, Nonlinearity 15 (2002), 1127-47.

[2] C. Bandt and N. V. Hung, *Fractal n-gons and their Mandelbrot sets*, Nonlinearity 21 (2008), 2653-2670.

[3] M.F. Barnsley and A.N. Harrington, *A Mandelbrot set for pairs of linear maps*, Physica 150 (1985) 421-432.

[4] T. Bousch, *Paires de similitudes* $z \to sz+1, z \to sz-1$, Preprint (1988).

[5] T. Bousch, *Connexité locale et par chemins hőlderiens pour les systémes itérés de fonctions*, Preprint (1992).

[6] D. Calegari and A. Walker, *Extreme points in limit sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), 3829-3837.

[7] D. Calegari, S. Koch and A. Walker, *Roots, Schottky semigroups, and a proof of Bandt's conjecture*, Ergod. Th & Dynam. Sys.37, no.8 (2017), 2487-2555.

[8] K. Falconer, *Fractal geometry-Mathematical foundations and applications (Third edition)*, WILEY, 2014.

[9] M. Hata, *On the structure of self-similar sets*, Japan J. Appl. Math.2 (1985), 381-414.

[10] Y. Himeki, *On the Mandelbrot set for some families of IFSes with rich symmetry (in Japanese)*, Master thesis, under supervision of Y. Ishii, Kyushu University, (2018).

[11] Y. Himeki and Y. Ishii, $\mathcal{M}_4$ *is regular closed*, Ergod. Th & Dynam. Sys.40, no.1 (2020), 213-220.

[12] J. Hutchinson, *Fractals and Self-Similarity*, Indiana Univ. Math. J. 30, no. 5 (1981), 713-747.

[13] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Univ. Press 2001.

[14] P. A. P. Moran, *Additive functions of intervals and Hausdorff measure*, Proc. Camb. Philos. Soc., Volume 42, Issue 1 (1946) 15-23.

[15] Y. Nakajima, $\mathcal{M}_n$ *is connected*, preprint, arXiv:2008.12915.

[16] P. Shmerkin and B. Solomyak, *Zeros of* $\{-1,0,1\}$ *power series and connectedness loci for self-affine sets*, Exp. Math. 15 (2006), 499-511.

[17] B. Solomyak, *Measure and dimension of some fractal families*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 124, (1998) 531-46.

[18] B. Solomyak and H. Xu, *On the 'Mandelbrot set' for a pair of linear maps and complex Bernoulli convolutions*, Nonlinearity 16 (2003), 1733-1749.