対角超曲面の Artin L 関数と有限体上の一般超幾何関数

千葉大学大学院融合理工学府
中川彬雄 (Akio Nakagawa)

概要

本稿では, 有限体上の代数多様体の合同ゼータ関数と Artin L 関数について簡単な復習をし, 有限体上の超幾何関数の定義及び背景を紹介した後, 有限体上の対角超曲面に作用するある群の指標に付随する Artin L 関数を有限体上の超幾何関数で表わす. また, 特別な場合である Dwork 超曲面に関しては, より精密な結果が得られるので, これも紹介する. 最後に, 応用として Hesse 曲線に対してこの結果を適用し, Weil 予想の楕円曲線に関する場合を用いることで, 異なる有限体上の超幾何関数の間の関係を与える.

1 合同ゼータ関数と Artin L 関数

ある代数多様体が与えられたとき, それが有理点を持つのか, また持つとしたらどれぐらいの有理点を持つか？という問題がある. q を素数 p の冪とし, $\mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とする. ここでは, $\mathbb{F}_q$ 上の代数多様体 V に対し, $\mathbb{F}_q$-有理点の個数に関係する, V の合同ゼータ関数と, より細かい Artin L 関数について復習する. これらについてより詳しい説明が知りたい方は, [14] などを参照していただきたい.

整数 $r \geq 1$ に対し, $N_r(V)$ を V の $\mathbb{F}_{q^r}$-有理点の個数 $\#V(\mathbb{F}_{q^r})$ とする. このとき, V の合同ゼータ関数とは次の冪級数で定義されるものである:

$$Z(V,t) := \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r(V)\frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{Q}[[t]].$$

この合同ゼータ関数に対し, Weil が 1949 年に述べた Weil 予想が有名であり, 数列 $\{N_r\}$ が大きな規則性を持つことがこの予想からわかる. Weil 予想は, Dwork, Grothendieck, Deligne によって 1974 年に解決されている (証明が完結した論文は [2] である).

定理 1.1 (Weil 予想, [17])**.** n 次元非特異射影代数多様体 V に対し, 次が成り立つ:

(i) $\mathbb{Z}$-係数多項式 $P_0(t), \dots, P_{2n}(t)$ が存在して,

$$Z(V,t) = \frac{P_1(t)P_3(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\cdots P_{2n}(t)}.$$

ただし, $P_i(t)$ は次の条件で特徴づけられる.

(ii) 各 $i = 0, 1, \dots, 2n$ に対し, $P_i(t)$ の次数は, V の i 次 Betti 数に等しい. さらに, $P_0(t) = 1-t, P_{2n}(t) = 1-q^n t$ であり, すべての i に対して, $P_i(t)$ の根の逆数は絶対値が $q^{i/2}$ である (Riemann 予想の類似).

(iii) 次の関数等式を満たす:

$$Z\Big(V, \frac{1}{q^n t}\Big) = \pm q^{ne/2} t^e Z(V,t).$$

ここで $e := b_0 - b_1 + b_2 - \cdots + b_{2n}$ は V の Euler-Poincaré 標数.

例 1.2. $V = \mathbb{P}^n$(n 次元射影空間) の場合. 容易に次がわかる:

$$N_r(V) = 1 + q^r + \cdots + q^{rn}.$$

したがって, $-\log(1-x) = x + x^2/2 + x^3/3 + \cdots$ より,

$$Z(V,t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)\cdots(1-q^n t)}.$$

例 1.3. V が楕円曲線の場合. $a_r = 1 + q^r - N_r(V)$ とおく. このとき, 次のことが知られている (cf. [15]).

(i)
$$Z(V,t) = \frac{1 - a_1 t + qt^2}{(1-t)(1-qt)}.$$

(ii) $1 - a_1 t + qt^2 = (1-\alpha t)(1-\beta t)(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ と因数分解したとき, $|\alpha| = |\beta| = \sqrt{q}$.

ここで, 実はすべての $r \geq 1$ に対して, $a_r = \alpha^r + \beta^r$ となる. 対称式が基本対称式で書けることと, $\alpha + \beta = a_1, \alpha\beta = q$ から, すべての a_r, つまりは $N_r(V)$ が $N_1(V)$ だけから求まることがわかる.

次に, V にある有限アーベル群 G が作用している場合を考える. このとき, G の指標群 $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ の元 χ に対して, V の指標付き有理点の個数を次で定義する:

$$N_r(V;\chi) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi(g) \#\{X \in V(\overline{\mathbb{F}_q}) | g^{-1} \circ F^r(X) = X\} \in \mathbb{C}.$$

ここで, $\overline{\mathbb{F}_q}$ は $\mathbb{F}_q$ の代数閉包で, $F : X \to X$ は q 乗フロベニウス射である. そして, V の χ に付随する Artin L 関数とは次で定義される冪級数である:

$$L(V,\chi;t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r(V;\chi) \frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{C}[[t]].$$

指標の直交性と, F^r での固定点は $\mathbb{F}_{q^r}$-有理点であることから, $N_r(V) = \sum_{\chi \in \widehat{G}} N_r(V;\chi)$ であり, このことから, V の合同ゼータ関数は Artin L 関数の積に分解する.

2 古典的な一般超幾何関数とその有限体類似

この節では, 古典的な一般超幾何関数を紹介した後, 有限体上の超幾何関数の定義と背景を紹介する.

$n, m \geq 0$ を整数とし, 複素パラメーター $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$(すべての j で $b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$) と, 複素変数 z に対し, 一般超幾何関数 ($n = 2, m = 1$ の場合を Gauss 超幾何関数という) は次の級数で定義される:

$${}_nF_m\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_m \end{matrix}; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(1)_k (b_1)_k \cdots (b_m)_k} z^k.$$

ここで, $(a)_k := \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ は Pochhammer 記号であり, 特に $(1)_k = k!$ である.

例 2.1.

(i) ${}_0F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{(1)_k} = \exp(z)$.

(ii) ${}_1F_0\left(\begin{smallmatrix} a \\ \end{smallmatrix}; z\right) = (1-z)^{-a}$ (幾何級数).

(iii) ${}_{n+1}F_n\left(\begin{smallmatrix} 1,1,\ldots,1 \\ 2,\ldots,2 \end{smallmatrix}; 1\right) = \zeta(n)$ (ζ は Riemann ζ 関数).

以降では, $n = m + 1$ の場合のみを考える. 超幾何関数は級数表示のほかに, 次のような積分表示 (cf. [16])

をもつ: 各 i に対し, $\mathrm{Re}(b_i)>\mathrm{Re}(a_i)>0$ のとき,

$$
{}_{n+1}F_n\left({a_0, a_1, \ldots, a_n \atop b_1, \ldots, b_n}; z\right) = \prod_{i=1}^n B(a_i, b_i - a_i)^{-1}
\times \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^n t_i^{a_i-1}(1-t_i)^{b_i-a_i-1}\right)(1-zt_1\cdots t_n)^{-a_0}dt_1\cdots dt_n. \tag{2.1}
$$

ただし, $B(\cdot,\cdot)$ はベータ関数. $\mathbb{C}$ 上の超幾何関数の間には様々な変換公式があり, また, 超幾何関数には微分方程式の解としての側面もある. これらについてより詳しく知りたい方は, [16] を参照していただきたい.

ここから, この $\mathbb{C}$ 上の超幾何関数の有限体類似を定義する. $\widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ を $\mathbb{F}_q^\times$ の指標群 $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q^\times, \mathbb{C}^\times)$ とし, 以降 ε を $\widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ の自明な指標とする. また, 任意の指標 $\eta \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ に対して, $\eta(0)=0$ とすることで, 定義域を $\mathbb{F}_q$ まで延ばして考える. $\mathbb{F}_q$ 上の加法指標 $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ を一つ固定する. ガンマ関数及びベータ関数の有限体類似である, Gauss 和及び Jacobi 和は次で定義される指標和である: $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ に対し,

$$
G(\eta) := -\sum_{u\in\mathbb{F}_q} \eta(u)\psi(u),
$$
$$
J(\eta_1, \ldots, \eta_n) := (-1)^{n-1} \sum_{\substack{u_1,\ldots,u_n\in\mathbb{F}_q \\ u_1+\cdots+u_n=1}} \eta_1(u_1)\cdots\eta_n(u_n).
$$

指標 $\eta \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ に対して, $\delta(\eta)$ を $\eta = \varepsilon$ のとき 1, それ以外では 0 と定義し, $G^\circ(\eta) := q^{\delta(\eta)}G(\eta)$ とする. そして, $\alpha, \nu \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ に対して, Pochhammer 記号の有限体類似を次で定義する:

$$
(\alpha)_\nu := \frac{G(\alpha\nu)}{G(\alpha)}.
$$

また, $(\alpha)^\circ_\nu := G^\circ(\alpha\nu)/G^\circ(\alpha) = q^{\delta(\alpha\nu)-\delta(\alpha)}(\alpha)_\nu$ とする.

定義 2.2 (有限体上の超幾何関数)**.** $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. 指標 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ と $\lambda \in \mathbb{F}_q$ に対し,

$$
{}_nF_m\left({\alpha_1, \ldots, \alpha_n \atop \beta_1, \ldots, \beta_m}; \lambda\right)_q := \frac{1}{1-q}\sum_{\nu\in\widehat{\mathbb{F}_q^\times}} \frac{(\alpha_1)_\nu\cdots(\alpha_n)_\nu}{(\varepsilon)^\circ_\nu(\beta_1)^\circ_\nu\cdots(\beta_m)^\circ_\nu}\nu(\lambda),
$$

(上下の Pochhammer 記号が少し違うことに注意せよ). $n=m+1$ であるとき, この関数の値は $\mathbb{Q}(\zeta_{q-1})$ 上にある ($\zeta_{q-1} := \exp(2\pi\sqrt{-1}/(q-1))$).

例 2.3. (i) $\lambda \neq 0$ のとき,

$$
{}_0F_0\left(\ ;\lambda\right)_q = \frac{1}{1-q}\sum_\nu \frac{1}{(\varepsilon)^\circ_\nu}\nu(\lambda) = \psi(-\lambda),
$$

($\psi(-\lambda)$ は $\mathbb{C}$ 上の指数関数の類似である).

(ii) $\lambda \neq 0$ に対し,

$$
{}_1F_0\left({\alpha \atop }; \lambda\right)_q = \alpha^{-1}(1-\lambda).
$$

注 2.4. Koblitz は [7] で, 有限体上の超幾何関数を (2.1) の類似として次のように定義している:

$$
{}_{n+1}F_n\left({\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \atop \beta_1, \ldots, \beta_n}; \lambda\right)_q^{\mathrm{Kob}} := (-1)^n \prod_{i=1}^n J(\alpha_i, \alpha_i^{-1}\beta_i)^{-1}
\times \sum_{u_1,\ldots,u_n\in\mathbb{F}_q}\Big(\prod_{i=1}^n \alpha_i(u_i)\alpha_i^{-1}\beta_i(1-u_i)\Big)\alpha_0^{-1}(1-\lambda u_1\cdots u_n).
$$

我々の定義での超幾何関数 ${}_{n+1}F_n\left({\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n \atop \beta_1,\ldots,\beta_n};\lambda\right)_q$ と Koblitz の超幾何関数は, $\alpha_0\neq\varepsilon,\alpha_i\neq\beta_i$ ($^\forall i=1,\ldots,n$) かつ $\lambda\neq 0$ のとき一致することが, 離散 Fourier 変換よりわかる.

他にも, Greene [3], Katz [6], McCarthy [9] がそれぞれ異なる定義をしている. 定義 2.2 の超幾何関数は McCarthy の超幾何関数と同じで, 記号を整理したものになっており, Greene の超幾何関数はその定数倍と等しい.

有限体上の超幾何関数は, 有限体上の代数多様体の有理点の個数と結びついている. 例えば, [7] で, Koblitz は方程式

$$y^N=x_1^{i_1}(1-x_1)^{j_1}\cdots x_n^{i_n}(1-x_n)^{j_n}(1-\lambda x_1\cdots x_n)^k$$

で定義されるアフィン代数多様体 C_λ に対し, ある条件の下で, 1 の N 乗根全体の成す群 μ_N の作用を考え, それにおける C_λ の指標付き有理点の個数を, ${}_{n+1}F_n$ と Jacobi 和の積で表した. [13] では, Salerno が有限体上の対角超曲面の有理点の個数を Katz の有限体上の超幾何関数の和で表した. また, [11] において, Miyatani は次の方程式で定義される, より一般的な代数多様体の合同ゼータ関数を計算し, 有限体上の超幾何関数で表した:

$$c_1T^{a_1}+\cdots+c_nT^{a_n}=\lambda T_1\cdots T_n,$$

ただし, $c_i\in\mathbb{F}_q^\times,\ a_i=(a_{i,1},\ldots,a_{i,n})\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ かつ $T^{a_i}=T_1^{a_{i,1}}\cdots T_n^{a_{i,n}}$.

次節で, 対角超曲面に作用する有限アーベル群の指標に付随する指標付き有理点の個数を計算し, 有限体上の超幾何関数で表すが, この結果は Salerno の結果を改良したものになっている.

3　対角超曲面の指標付き有理点の個数

本節と次節では, 対角超曲面とそこに作用する群について説明した後, その群の指標に付随する有理点の個数に関する Koblitz の結果を紹介し, その結果を用いて指標付き有理点の個数を有限体上の超幾何関数で表す. また, 対角超曲面の特別な場合である Dwork 超曲面に対して, より精密な結果が得られるのでそれも紹介する. これらの結果は, 筆者の修士論文 [12] の内容をより精密にしたものである.

整数 $d\in\mathbb{Z}_{>0}$ は $d\mid q-1$ と仮定する. 整数 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ と $\lambda\in\mathbb{F}_q$ を固定し, $h_1,\ldots,h_n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は $h_1+\cdots+h_n=d$ かつ $\gcd(d,h_1,\ldots,h_n)=1$ を満たすとする. このとき, $\mathbb{F}_q$ 上の射影空間内の対角超曲面 D_λ を次の方程式で定義される代数多様体とする:

$$X_1^d+\cdots+X_n^d=d\lambda X_1^{h_1}\cdots X_n^{h_n}.$$

また, D_λ^* を $X_1\cdots X_n\neq 0$ で定まる D_λ の部分多様体とする. μ_d を 1 の d 乗根全体のなす $\mathbb{F}_q^\times$ の部分群とし, 群 G_0 を剰余群 μ_d^n/Δ で定義する. ただし, $\Delta=\{(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mu_d^n\mid\xi_1=\cdots=\xi_n\}$ である. さらに, G_0 の部分群 G を

$$G=\{\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mu_d^n\mid\xi^h=1\}/\Delta$$

で定義する. ただし, $h:=(h_1,\ldots,h_n)$ で, $\xi^h:=\xi_1^{h_1}\cdots\xi_n^{h_n}$ ($\sum h_i=d$ より, Δ の元は $\xi^h=1$ を満たすことに注意). G_0 は D_0 に $\xi\cdot[X_1:\cdots:X_n]=[\xi_1X_1:\cdots:\xi_nX_n]$ で忠実に作用し, 同様にして G は D_λ ($\lambda\neq 0$) に忠実に作用する. また, G は自然な単射 $G\hookrightarrow G_0$ を経由して, D_0 にも作用する.

以降, $\widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ の生成元 φ を一つ固定する. 集合 $W:=\{w=(w_1,\ldots,w_n)\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n\mid w_1+\cdots+w_n=0\}$ に対して, 次の同型を得る:

$$W\xrightarrow{\cong}\widehat{G_0};\ w\longmapsto\varphi^w.$$

ただし, $\varphi^w(\xi):=\varphi(\xi^w)$. さらに, $\chi^w:=\varphi^w|_G\in\widehat{G}$ とする. このとき, $w,w'\in W$ に対して,

$$\chi^w=\chi^{w'}\iff w-w'\equiv mh\pmod d\ (^\exists m=0,1,\ldots,d-1)$$

である. $\chi^w = \chi^{w'}$ のとき, $w \sim w'$ と書くことにする ($\sim$ は W の同値関係であり, $\widehat{G} \cong W/\sim$ である). $\widehat{G}$ 内の自明な指標を $\mathbb{1}$ と書くことにする ($\chi^w = \mathbb{1} \Leftrightarrow w \sim 0$).

Koblitz により次が述べられている.

命題 3.1 ((3.2) [7])**.** $\lambda \neq 0$ と $w \in W$ に対し,

$$N_1(D_\lambda^*; \chi^w) = \frac{(-1)^n}{1-q} \sum_{\nu \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}} J\Big(\varphi_d^{w_1}\nu^{h_1}, \dots, \varphi_d^{w_n}\nu^{h_n}\Big)\nu^d(d\lambda).$$

ただし, $\varphi_d := \varphi^{(q-1)/d}$ は位数がちょうど d の指標.

一般に, Gauss 和と Jacobi 和に関して次のような公式があるのでまとめておく (cf. [1]):

(i) $\eta_1, \dots, \eta_n \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ で少なくとも一つは自明でないとするとき,

$$J(\eta_1, \dots, \eta_n) = \frac{G(\eta_1)\cdots G(\eta_n)}{G^\circ(\eta_1 \cdots \eta_n)}. \tag{3.1}$$

これはベータ関数がガンマ関数に分解することの類似である.

(ii) Euler の反転公式の類似として, 次が成り立つ:

$$G(\eta)G^\circ(\eta^{-1}) = \eta(-1)q. \tag{3.2}$$

(iii) $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ を $q-1$ を割る自然数とする. 任意の $\eta \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ に対して,

$$\frac{\prod_{i=0}^{m-1} G(\varphi_m^i \eta)}{\prod_{i=0}^{m-1} G(\varphi_m^i)} = G(\eta^m)\eta(m^{-m}), \ \text{(Davenport-Hasse 乗法公式)}.$$

ただし, $\varphi_m := \varphi^{(q-1)/m}$ は位数がちょうど m の指標.

Koblitz の結果より, 次の結果が得られる.

定理 3.2 (主結果 1)**.** 全ての $i = 1. \dots, n$ に対し, $dh_i \mid q-1$ とする. 各 $\lambda \neq 0$ と $w \in W$ に対し,

$$\begin{aligned} &N_1(D_\lambda^*; \chi^w) \\ &= \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{q^{\delta(w)}} J\left(\varphi_d^{w_1}, \dots, \varphi_d^{w_n}\right)^{1-\delta(w)} {}_dF_{d-1}^w(\lambda) + (-1)^{n-1}\dfrac{(1-q)^{n-1}}{q} & (\text{if } w \sim 0), \\ \\ (-1)^n J\left(\varphi_d^{w_1}, \dots, \varphi_d^{w_n}\right) {}_dF_{d-1}^w(\lambda) & (\text{if } w \not\sim 0). \end{cases} \end{aligned}$$

ただし

$${}_dF_{d-1}^w(\lambda) := {}_dF_{d-1}\left(\begin{matrix} \dots, \varphi_{dh_j}^{w_j}, \varphi_{dh_j}^{w_j+d}, \dots, \varphi_{dh_j}^{w_j+d(h_j-1)}, \dots \\ \varphi_d, \dots, \varphi_d^{d-1} \end{matrix} ; \left(\prod_{k=1}^n h_k^{h_k}\right)\lambda^d \right)_q$$

(j は $1, \dots, n$ までをはしる) であり, $\delta(w)$ は $w = 0$ のとき 1 でそれ以外では 0. ここで w_j は $\{0, \dots, d-1\}$ 内に代表元をとることにする.

証明の概略. (3.1) を使うことで, Koblitz の結果に出てきた Jacobi 和を次のように書き直せる:

$$J\Big(\varphi_d^{w_1}\nu^{h_1}, \dots, \varphi_d^{w_n}\nu^{h_n}\Big) = \frac{G(\varphi_d^{w_1}\nu^{h_1})\cdots G(\varphi_d^{w_n}\nu^{h_n})}{G^\circ\left(\nu^d\right)}.$$

(本当は $w \sim 0$ のときに Jacobi 和の中のすべての指標が自明になってしまう場合があり, それにより, 定理において $w \sim 0$ かどうかの場合分けが生じる.) まず, 分母に対して, Davenport-Hasse 乗法公式を用いると次が得られる.

$$G^{\circ}(\nu^d) = q(\varepsilon)^{\circ}_{\nu}(\varphi_d)^{\circ}_{\nu}\cdots(\varphi_d^{d-1})^{\circ}_{\nu}\nu(d^d).$$

分子に対しては, 各 $j = 1, \dots, n$ において Davenport-Hasse 乗法公式を 2 回用いることで次を得る:

$$G\left(\varphi_d^{w_j}\nu^{h_j}\right) = G\left(\varphi_d^{w_j}\right)\left(\varphi_{dh_j}^{w_j}\right)_{\nu}\left(\varphi_{dh_j}^{w_j+d}\right)_{\nu}\cdots\left(\varphi_{dh_j}^{w_j+d(h_j-1)}\right)_{\nu}\nu(h_j^{h_j}).$$

よって, まとめると次を得る:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu}\frac{G(\varphi_d^{w_1}\nu^{h_1})\cdots G(\varphi_d^{w_n}\nu^{h_n})}{G^{\circ}\left(\nu^d\right)}\nu^d(d\lambda)\\
&= q^{-1}\prod_{i=1}^{n}G\left(\varphi_d^{w_i}\right)\sum_{\nu}\frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\varphi_{dh_j}^{w_j}\right)_{\nu}\left(\varphi_{dh_j}^{w_j+d}\right)_{\nu}\cdots\left(\varphi_{dh_j}^{w_j+d(h_j-1)}\right)_{\nu}}{(\varepsilon)^{\circ}_{\nu}(\varphi_d)^{\circ}_{\nu}\cdots(\varphi_d^{d-1})^{\circ}_{\nu}}\nu\Big(\big(\prod_{k=1}^{n}h_k^{h_k}\big)\lambda^d\Big)\\
&= \frac{(1-q)}{q^{\delta(w)}}J\left(\varphi_d^{w_1},\dots,\varphi_d^{w_n}\right)^{1-\delta(w)}\,{}_dF_{d-1}^{w}(\lambda).
\end{aligned}$$

Koblitz の結果に代入することで, 定理を得る. □

次に, 主結果 1 を D_λ まで拡張する. そのために $\lambda = 0$(Fermat 超曲面) の場合を利用する. Weil[18] により次が示されている.

補題 3.3 (cf. [7, (2.12)]). For each $w \in W$,

$$N_1\left(D_0;\varphi^w\right) = \begin{cases} 0 & (\text{全てではないいくつかの } w_i = 0),\\ \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} & (\text{全ての } w_i = 0),\\ (-1)^n J\left(\varphi_d^{w_1},\dots,\varphi_d^{w_n}\right) & (\text{全ての } w_i \neq 0). \end{cases}$$

定理 3.4 (主結果 2)**.** 各 $i = 1, \dots, n$ に対し, $dh_i \mid q-1$ とする. $\lambda \neq 0$ と $w \in W$ に対し,

$$\begin{aligned}
N_1(D_\lambda;\chi^w) &= \frac{(-1)^n}{q^{\delta(w)}}J\left(\varphi_d^{w_1},\dots,\varphi_d^{w_n}\right)^{1-\delta(w)}\,{}_dF_{d-1}^{w}(\lambda)\\
&\quad + \begin{cases} \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{q} + J_{\chi^w} & (\text{if } w \sim 0),\\ J_{\chi^w} & (\text{if } w \not\sim 0). \end{cases}
\end{aligned}$$

ここで, ${}_dF_{d-1}^{w}(\lambda)$ は定理 3.2 と同じ記号で,

$$J_{\chi^w} := (-1)^{n-1}\sum_{\substack{w'\sim w\\ w_i'=0 \text{ for some } i \text{ but not all}}} J\left(\varphi_d^{w_1'},\dots,\varphi_d^{w_n'}\right).$$

証明の概略. 証明には次の等式を使う:

$$N_1(D_\lambda;\chi^w) - N_1(D_\lambda^*;\chi^w) = N_1(D_0;\chi^w) - N_1(D_0^*;\chi^w).$$

補題 3.3 と $N_1(D_0;\chi^w) = \sum_{w'\sim w}N_1(D_0;\varphi^{w'})$ (D_0^* でも同様) により, 計算から右辺が Jacobi 和の和 J_{χ^w} になることがわかる. そして左辺の $N_1(D_\lambda^*;\chi^w)$ は主結果 1 より超幾何関数であるため, 定理が得られる. □

4 Dwork 超曲面

Dwork 超曲面に対する結果を述べる前に, 超幾何関数の簡約について紹介する. 有限体上の超幾何関数と古典的な超幾何関数は非常に強い類似があるが, 上下に同じパラメーターがあるとき, 古典的な超幾何関数ではきれいに約分できるのに対し, 有限体上の超幾何関数はきれいには約分できないという違いがある. これは有限体上の超幾何関数の級数表示で, 上下の Pochhammer 記号が定数倍だけ異なるからである. そこで, 次のような簡約超幾何関数を定義する.

定義 4.1 (簡約超幾何関数)**.** 指標 $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ に対し, $F_{\mathrm{red}}\left(\begin{smallmatrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\\ \beta_1,\ldots,\beta_n\end{smallmatrix};\lambda\right)_q$ を, ${}_{n+1}F_n\left(\begin{smallmatrix}\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\\ \beta_1,\ldots,\beta_n\end{smallmatrix};\lambda\right)_q$ の上下にある同じパラメーターを約分式にキャンセルした超幾何関数とする.

例 4.2. $\alpha, \beta, \gamma \in \widehat{\mathbb{F}_q^\times}$ に対し,

$$F_{\mathrm{red}}\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,\gamma\\ \gamma,\gamma\end{matrix};\lambda\right)_q = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};\lambda\right)_q.$$

$\mathbb{C}$ 上では, この F_{red} と ${}_{n+1}F_n$ は一致するが, 有限体上では一般には一致しない.

Dwork 超曲面 $D_{\lambda,d}$ とは, 対角超曲面で, $n = d$ かつ $h_1 = \cdots = h_d = 1$ の場合である. Dwork 超曲面が非特異であることの必要十分条件は $\lambda^d \neq 1$ であることが簡単な計算からわかる.

一般に, 有限体上の超幾何関数を簡約すると, 剰余項が出てきてしまう. 主結果 2 を Dwork 超曲面に適用し, 出てくる超幾何関数を簡約するとその剰余項が主結果 2 で出てきた Jacobi 和の和 J_{χ^w} の -1 倍になることが計算で確かめられる. これにより, 主結果 2 の Dwork 超曲面の場合はさらに精密に述べられる. 主結果 2 において $\mathbb{F}_q$ を $\mathbb{F}_{q^r}$ に取り替えて, φ を $\widehat{\mathbb{F}_{q^r}^\times}$ の生成元で φ の延長になるものに取り替えることで, 次を得る.

定理 4.3 (主結果 3)**.** $r \geq 1$ とする. $\widetilde{\varphi}_d := \varphi_d \circ \mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}$ とする ($\mathrm{N}_{\mathbb{F}_{q^r}/\mathbb{F}_q}$ はノルム写像).

(i) $i = 1, \ldots, d-1$ とし, $w = (i, \ldots, i)$ (i.e. $\chi^w = \mathbb{1}$) に対し,

$$N_r(D_{\lambda,d};\chi^w) = \frac{1-q^{r(d-1)}}{1-q^r} + (-1)^d J\Bigl(\overbrace{\widetilde{\varphi}_d^i, \ldots, \widetilde{\varphi}_d^i}^{d\,\text{個}}\Bigr) F_{\mathrm{red}}\left(\begin{matrix}\widetilde{\varphi}_d^i, \widetilde{\varphi}_d^i, \ldots, \widetilde{\varphi}_d^i\\ \widetilde{\varphi}_d, \ldots, \widetilde{\varphi}_d^{d-1}\end{matrix};\lambda^d\right)_{q^r}.$$

(ii) $\chi^w \neq \mathbb{1}$ かつ $w_i \neq 0$ ($^\forall i = 1, \ldots, d-1$) なる $w \in W$ に対し,

$$N_r(D_{\lambda,d};\chi^w) = (-1)^d J(\widetilde{\varphi}_d^{w_1}, \ldots, \widetilde{\varphi}_d^{w_d}) F_{\mathrm{red}}\left(\begin{matrix}\widetilde{\varphi}_d^{w_1}, \widetilde{\varphi}_d^{w_2}, \ldots, \widetilde{\varphi}_d^{w_d}\\ \widetilde{\varphi}_d, \ldots, \widetilde{\varphi}_d^{d-1}\end{matrix};\lambda^d\right)_{q^r}.$$

(iii) $w \in W$ が $(0, 1, \ldots, d-1)$ の順序を入れ替えたものであるとき,

$$N_r(D_{\lambda,d};\chi^w) = \begin{cases}0 & (\lambda^d \neq 1),\\ (-1)^{d-1+r(q-1)/d} q^{er} & (\lambda^d = 1).\end{cases}$$

ここで, d が奇数 (resp. d が偶数) のとき, $e = (d-1)/2$ (resp. $d/2$).

注 4.4. (i) Dwork 超曲面の場合, $\widehat{G}$ の元は w をうまくとることで, すべて主結果 3 の (i)-(iii) のうちのどれかにあてはまることに注意.

(ii) McCarthy は [10] において, Dwork 超曲面の有理点の個数を McCarthy の超幾何関数の和で表している. また, Goodson[4][5] は Greene の超幾何関数を用いて同様の結果 (McCarthy の結果より少し弱い) を示している. 主結果 3 はこれらの結果の改良であり, 主結果 3 を指標ごとに足し合わせると McCarthy の結果が得られる.

(iii) 主結果 3 から, Dwork 超曲面の偶数次のコホモロジーに対応する部分 ($1+q^r+\cdots+q^{r(d-2)}$ の部分) はすべて自明な指標に付随する有理点の個数に現れることがわかる. また, 特異点をもつ Dwork 超曲面の有理点の個数が超幾何関数の 1 での値に対応していることもわかる.

例 4.5 ($d=3$ の場合). $d=3$ の Dwork 超曲面は $D_{\lambda,3}$:$X_1^3+X_2^3+X_3^3=3\lambda X_1X_2X_3$ である. $\lambda^3\neq 0,1$ を仮定すると, $D_{\lambda,3}$ は楕円曲線になる. このとき, $\widehat{G}$ は次の 3 つの元から成る:

$$\begin{aligned}\mathbb{1}=\chi^{(0,0,0)}&=\chi^{(1,1,1)}=\chi^{(2,2,2)},\\ \chi^{(0,1,2)}&=\chi^{(1,2,0)}=\chi^{(2,0,1)},\\ \chi^{(0,2,1)}&=\chi^{(1,0,2)}=\chi^{(2,1,0)}.\end{aligned}$$

よって, 主結果 3 より, 各 $r\geq 1$ と $i=1,2$ に対して次を得る:

$$N_r(D_{\lambda,3})=N_r(D_{\lambda,3};\mathbb{1})=(-1)^{ri(q-1)/3+1}J\left(\widetilde{\varphi}_3^i,\widetilde{\varphi}_3^i\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\widetilde{\varphi}_3^i,\widetilde{\varphi}_3^i\\ \widetilde{\varphi}_3^{2i}\end{matrix};\lambda^3\right)_{q^r}+1+q^r,$$

($\eta_1\eta_2\eta_3=\varepsilon$ かつすべてが自明でないならば, $J(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\eta_3(-1)J(\eta_1,\eta_2)$ が成り立つことに注意). これは, Matsumoto-Terasoma-Yamazaki の結果 [8] の有限体類似になっている.

この例を応用することにより, 次で超幾何関数の間の関係を与える.

5 超幾何関数の間の関係

第 1 節で紹介した Weil 予想の楕円曲線に対する場合を用いることで, 超幾何関数の間の関係を与える. 例 1.3 で, 対称式が基本対称式で表せることより, 任意の $r\geq 1$ に対する N_r が N_1 から求まることを見た. これを利用するため, 次のような多項式を定義する.

定義 5.1. $r\geq 0$ に対して, $P_r(x,y)\in\mathbb{Z}[x,y]$ を $P_r(\alpha+\beta,\alpha\beta)=\alpha^r+\beta^r$ となるものとする. これは次のように帰納的に定まる:

$$\begin{aligned}&P_0(x,y)=2,\\ &P_1(x,y)=x,\\ &P_r(x,y)=xP_{r-1}(x,y)-yP_{r-2}(x,y).\end{aligned}$$

簡単のため, $J_2F_1^i(\lambda):=(-1)^{i(q-1)/3}J(\varphi_3^i,\varphi_3^i){}_2F_1\left(\begin{smallmatrix}\varphi_3^i,\varphi_3^i\\ \varphi_3^{2i}\end{smallmatrix};\lambda^3\right)_q$ ($i=1,2$) と書く. このとき, 例 1.3 で見たことより, 次を得る.

定理 5.2 (主結果 4)**.** 各 $r\geq 1$ と $i=1,2$ に対して, $\lambda\in\mathbb{F}_q$ が $\lambda^3\neq 0,1$ のとき

$$(-1)^{ri(q-1)/3}J(\varphi_3^i,\varphi_3^i)^r{}_2F_1\left(\begin{matrix}\widetilde{\varphi}_3^i,\widetilde{\varphi}_3^i\\ \widetilde{\varphi}_3^{2i}\end{matrix};\lambda^3\right)_{q^r}=P_r\left(J_2F_1^i(\lambda),q\right).$$

ここでは詳しく述べないが, $d=4$ の場合に対しても, Dwork 超曲面の l-進エタールコホモロジーの G 不変部分の次元がわかっていることから, 同様の関係が得られる.

参考文献

[1] B. C. Berndt, R. J. Evans and K. S. Williams. *Gauss and Jacobi sums.* Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.

[2] P. Deligne. La conjecture de Weil. I. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., Volume 43, 1977, 273-307.

[3] J. Greene. Hypergeometric functions over finite fields. Trans. Amer. Math. Soc., Volume 301(1), 1987, 77-101.

[4] H. Goodson. Hypergeometric functions and relations to Dwork hypersurfaces. Int. J. Number Theory, Volume 3(2), 2017, 439-485.

[5] H. Goodson. A complete hypergeometric point count formula for Dwork hypersurfaces. J. Number Theory, Volume 179, 2017, 142-171.

[6] N. M. Katz. *Exponential sums and differential equations*, Annals of Mathematics Studies, Volume 124. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[7] N. Koblitz. The number of points on certain families of hypersurfaces over finite fields. Compositio Math., tome 48, 1983, 3-23.

[8] K. Matsumoto, T. Terasoma and S. Yamazaki. Jacobi's formula for Hesse cubic curves. Acta Math. Viet., Volume 35(1), 2010, 91-105.

[9] D. McCarthy. Transformations of well-poised hypergeometric functions over finite fields. Finite Fields Appl., Volume 18(6), 2012, 1133-1147.

[10] D. McCarthy. The number of $\mathbb{F}_q$-points on Dwork hypersurfaces and hypergeometric functions. Res. Math. Sci., Volume 4(4), 2017, 1-15.

[11] K. Miyatani. Monomial deformations of certain hypersurfaces and two hypergeometric functions. Int. J. Number Theory, Volume 11(8), 2015, 2405-2430.

[12] A. Nakagawa. Artin L-functions of diagonal hypersurfaces and generalized hypergeometric functions over finite fields. 千葉大学修士論文, 2020.

[13] A. Salerno. Counting points over finite fields and hypergeometric functions. Functiones et Approximatio, Volume 49(1), 2013, 137-157.

[14] J-P. Serre. Zeta and L functions. *Arithmetical Algebraic Geometry*, Harper and Row, New York, 1965, 82-92.

[15] J. H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves, 2nd edition.* Graduate texts in Mathematics 106. Springer Science+Business Media, LLC 2009.

[16] L. J. Slater. *Generalized hypergeometric functions.* Cambridge University Press 1966.

[17] A. Weil. Numbers of Solutions of Equations in Finite Fields. Bulletin of the Amer. Math. Soc., Volume 55, 1949, 497-508.

[18] A. Weil. Jacobi sums as "Grössencharaktere". Transactions of the Amer. Math. Soc., Volume 73(3), 1952, 487-495.