定磁場シュレーディンガー方程式の解の
モジュレーションノルム評価

村松 亮 (Ryo MURAMATSU)*
東京理科大学 大学院理学研究科数学専攻 博士後期課程 1 年

1 導入

本研究では, 以下のベクトルポテンシャル付きシュレーディンガー方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\left(\nabla - i\boldsymbol{a}(t,x)\right)^2 u(t,x) = V(t,x)u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $u(t,x)$, $u_0(x)$ はそれぞれ $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ についての複素数値関数であり, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$, $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ で, $\boldsymbol{a}(t,x) = (a_1(t,x), \cdots, a_n(t,x))$ とし, $(\nabla - i\boldsymbol{a}(t,x))^2 = \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} - ia_k(t,x))^2$ である. さらに, $V(t,x)$, $\boldsymbol{a}(t,x)$ には以下の仮定を課す.

仮定 A1. 任意の $k = 1, \cdots, n$ に対し,

$$a_k(t,x) = \sum_{l=1}^n a_{l,k}(t)x_l, \quad a_{k,l} \in C^\infty(\mathbb{R}) \ (l = 1, \cdots, n) \tag{2}$$

であると仮定する.

仮定 V. $V \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ は, $|\alpha| \geq 2$ をみたす任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し条件

$$^\exists C_\alpha > 0 \text{ s.t. } ^\forall(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;\ |\partial_x^\alpha V(t,x)| \leq C_\alpha$$

をみたすとする.

仮定 A2. 各 $j = 1, \cdots, n$ に対し $a_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級であり, $\rho < 1$ が存在して任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し,

$$^\exists C_\alpha > 0 \text{ s.t. } ^\forall(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n;\ \max_{1 \leq j \leq n} |\partial_x^\alpha a_j(t,x)| \leq C_\alpha (1 + |x|)^{\rho - |\alpha|}.$$

2 シュレーディンガー方程式とモジュレーション空間

量子力学において, n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に存在する古典粒子の状態は, 対応する波動関数とよばれる L^2 関数 $u(x)$ によって記述される. 粒子の状態が時間によって変化するとき, その粒子の波動関数も時間変

---

* 本研究は加藤圭一先生 (東京理科大学) との共同研究に基づく.

化すると考え, 時刻 t における波動関数 $u(t)=u(t,x)$ は, 次のシュレーディンガー方程式とよばれる方程式に従う:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) = H(t,x)u(t,x), & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3}$$

ただし $H(t,x)$ は量子力学的な粒子のハミルトニアン

$$H(t,x) = -\frac{\Delta}{2} + V(t,x)$$

であり, ニュートンの運動方程式に現れる, 古典粒子のハミルトニアンに量子化とよばれる手続きを経ることによって得られる. ここで, $\Delta = \sum_{j=1}^n (-i\partial_{x_j})^2$ で, 粒子の質量およびプランク定数は 1 としている.

シュレーディンガー方程式の解を波動関数と呼ぶように, 実際に特異性伝播など波動方程式に見られる現象が (3) にもみられる一方で, (3) には熱方程式が持つ, 平滑化効果とよばれる現象が (熱方程式よりも弱い形ではあるが) 成立することも知られている. 具体的には $V(t,x)\equiv 0$ としたとき, 次の**分散型評価**とよばれる不等式が成り立つ:

命題 (分散型評価)**.** $2\le p\le\infty$ とし, $p'\ge 1$ を $1/p+1/p'=1$ をみたすものとする. このとき, $C>0$ が存在して, (3) の解 $u(t,x)$ と初期値 $u_0(x)$ について,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p} \le C|t|^{-n(1/2-1/p)}\|u_0\|_{L^{p'}}, \quad t\neq 0$$

が成り立つ.

分散型評価は解のノルムを初期値のノルムと時間減衰項によって制御できるという点では確かに熱方程式と通ずる解の性質の良さを示唆しているといえる. しかし L^p 空間を, 指数 p が小さいほど空間遠方における減衰度が大きい, "振る舞いの良い" 関数空間であると思うと, 分散型評価では解の属する空間は一般に初期値よりも "悪く" なっているとも考えられる. $L^p(\mathbb{R}^n)$ と似た空間あるいはその一般化で, 初期値と同じ空間に解が属するようなものはあるであろうか.

また, 今の議論は空間遠方での減衰度という大域的性質についてのみの議論であったが, 解の可微分性といった局所的性質も同時に詳しく見たいとなった際には, L^p 空間のみの評価では不十分である (実際, 初期値が遠方で十分早く減衰するとき, シュレーディンガー方程式の解が滑らかになるという現象が存在するが, L^p ノルムのみでの評価ではその現象を感知できない; その際にはソボレフ空間 $H^s(\mathbb{R}^n)$ などが導入されるべきであろう).

このような視点から導入されるのが, モジュレーション空間におけるノルム評価である.

定義 1 (波束変換)**.** $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$, $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, 窓関数 φ による f の波束変換 $W_\varphi f$ を, 以下で定める:

$$W_\varphi f(x,\xi) \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} e^{-iy\cdot\xi} f(y)dy, \quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n.$$

定義 2 (モジュレーション空間)**.** $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ とする. このとき, $1\le p,q\le\infty$ に対し, モジュレーション空間 $M^{p,q}_\varphi(\mathbb{R}^n)$ を以下のように定義する:

$$M^{p,q}_\varphi(\mathbb{R}^n) = \left\{ f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ \middle| \ \|f\|_{M^{p,q}_\varphi} \equiv \left\| \|W_\varphi f(x,\xi)\|_{L^p_x} \right\|_{L^q_\xi} < \infty \right\}.$$

モジュレーション空間は Feichtinger によって 1983 年に導入された空間であり, 擬微分作用素との関連性や, $M^{p,1}$ ノルムによる双線形評価から非線形方程式との相性が指摘され, 研究がすすめられてきた. 非線形シュレーディンガー方程式のモジュレーション空間における局所および大域的適切性は Wang-Zhao-Guo[5] や Wang-Hudzik[4] があるが, これらの結果を得る際に以下の自由シュレーディンガー発展作用素のモジュレーション空間における分散型評価を用いている:

定理 (Wang-Hudzik[4])**.** $2 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $V(t,x) \equiv 0$ とする. また, $p' \ge 1$ を $1/p + 1/p' = 1$ をみたすものとして定める.

このとき, $C > 0$ が存在して, (3) の (L^2) 解 $u(t,x)$ に対し, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,q}_{\varphi_0}} \le C(1+|t|)^{-n(1/2-1/p)}\|u_0\|_{M^{p',q}_{\varphi_0}}, \quad u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ.

他方, Bényi-Gröchenig-Okoudjou-Rogers[1] ではシュレーディンガー方程式の解の $M^{p,q}$ ノルムを初期値の $M^{p,q}$ ノルムで制御するという, ルベーグ空間 $L^p(\mathbb{R}^n)$ には見られない評価が得られた. Kato-Kobayashi-Ito[2] においては, 窓関数を時間に依存させてとるという手法を用いることで, 自由および調和振動子付きシュレーディンガー方程式に対し, それぞれ解のモジュレーション空間におけるノルム評価を等式の形で与えている. さらに, [3] では劣 2 次の空間増大度を持つ一般のスカラーポテンシャルを付与したシュレーディンガー方程式の解 (3) に対し, 以下のモジュレーションノルム評価を与えている:

定理 (Kato-Kobayashi-Ito[3])**.** $1 \le p \le \infty$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とし, $\varphi(t,x) = e^{it\Delta/2}\varphi_0(x)$ と定める. $V(t,x)$ は仮定 V をみたすとし, $u(t,x)$ は $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (3) の解であるとする.

このとき, $T > 0$ に対してある $C_T > 0$ が存在して, 任意の $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,p}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T\|u_0\|_{M^{p,p}_{\varphi_0}}, \quad t \in [-T,T]$$

が成り立つ.

3 主結果

仮定 A1 をみたすベクトルポテンシャル $\boldsymbol{a}(t,x)$ を付与したシュレーディンガー方程式 (1) の解のモジュレーション空間におけるノルム評価を考察した.

主定理. $1 \le p \le \infty$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とし, $\varphi(t,x) = e^{it\Delta/2}\varphi_0(x)$ と定める. また $\boldsymbol{a}(t,x)$ は仮定 A1 を, $V(t,x)$ は仮定 V をみたすとし, $u(t,x)$ は $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (1) の解であるとする.

このとき, $T > 0$ に対してある $C_T > 0$ が存在して, 任意の $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,p}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T\|u_0\|_{M^{p,p}_{\varphi_0}}, \quad t \in [-T,T] \tag{4}$$

が成り立つ.

注. 本研究の主定理は, Kato-Kobayashi-Ito[3] の結果を (2) の形で表せるような $\boldsymbol{a}(t,x)$ に対して拡張したものである. また, $\boldsymbol{a}(t,x)$ が仮定 A2 を満たす場合についても, 同様の評価を考察することが可能である.

4　証明の概略

Kato-Kobayashi-Ito[3] を参考にし, 方程式 (1) に波束変換を施して非斉次な $\mathbb{R}^{2n}$ 上の時空間 1 階偏微分方程式に書き換えたものを, 特性曲線法を用いて積分方程式に帰着させる. その剰余項を評価することで主定理の評価 (4) を得る.

また, 仮定 A2 をみたすベクトルポテンシャル $\boldsymbol{a}(t,x)$ についてこの評価を行うときは, Kato-Kobayashi-Ito[3] の手法をそのまま応用することができない. もとの方程式に現れる空間 1 階偏微分の項 $-i\boldsymbol{a}(t,x)\cdot\nabla u(t,x)$ をどのように処理するかがポイントとなる.

参考文献

[1] Bényi, A., Gröchenig, K., Okoudjou, K.A., Rogers, L.G.: Unimodular Fourier multipliers for modulation spaces, Journal of Functional Anal., **246**, 366–384 (2007).

[2] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S.: Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier transform and its applications, Tohoku Math.J., **64**, 223–231 (2012).

[3] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S.: Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials, Journal of Functional Anal., **266**, 733–753 (2014).

[4] Wang, B., Hudzik, H.: The global Cauchy problem for the NLS and NLKG with small rough data, J. Differential Equations, **232**, 36–73 (2007).

[5] Wang, B., Zhao, L., Guo, B.: Isometric decomposition operators, fuction spaces $E^{\lambda}_{p,q}$and applications to nonlinear evolution equations, J. Functional Anal., **233**, 1–39 (2006).