

# Edge rings with $q$ -linear resolutions

関西学院大学大学院理工学研究科数理科学専攻

毛利健太 (Kenta MORI)

このレポートは、共著論文 [9] の概要を記したものである。

## 1 導入と主結果

$E \subseteq [V]^2$  を満たす集合の組  $G = (V, E)$  をグラフという。  $V$  の要素をグラフの頂点と呼び、  $E$  の要素をグラフの辺と呼ぶ。 グラフを絵で表すとき各頂点に対し点を描き、 2つの頂点が辺を作っているならばそれに対応する点を線で結ぶ。 頂点  $i$  と頂点  $j$  を結ぶ辺は  $\{i, j\}$  で表す。 グラフ  $G$  がループ (同一頂点で辺を生成している辺) や多重辺 (同じ 2 頂点の組で生成される複数の辺) を持つとき  $G$  を多重グラフと呼び、 持たないとき  $G$  を単純グラフと呼ぶ。

体  $K$  上の  $n$  変数多項式環を  $K[\mathbf{x}] := K[x_1, \dots, x_n]$  とする。 頂点集合  $[n] := \{1, \dots, n\}$  の有限単純グラフ  $G$  について、  $G$  の edge ring  $K[G]$  は  $G$  の辺  $\{i, j\}$  に対応した二次単項式  $x_i x_j$  で生成される  $K[\mathbf{x}]$  の  $K$ -部分代数である。 近年では、 edge ring は可換環論、 代数幾何、 組合せ論などの様々な視点より研究されている。 特に、 幾つかのグラフの  $K[G]$  の極小 free resolution について興味深い事実が解明されている [2, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14]。 本研究では  $q \geq 2$  の  $q$ -linear resolution を持つ edge ring に着目した。

体  $K$  上  $n$  変数多項式環  $K[x] = K[x_1, \dots, x_n]$  は  $\deg x_i = 1$  を満たすとし、  $I \subset S$  を 0 でない斉次イデアルとする。 このとき

$$0 \rightarrow \bigoplus_{j \geq 1} S(-j)^{\beta_{h,j}} \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{j \geq 1} S(-j)^{\beta_{1,j}} \rightarrow S \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

を  $S/I$  の次数付き極小 free  $S$ -resolution とすると  $S/I$  の Castelnuovo-Mumford regularity は以下で定義される。

$$\text{reg}(S/I) = \max\{j - i : \beta_{i,j} \neq 0\}$$

任意の  $1 \leq i \leq h$ , および任意の  $j \neq q + i - 1$  について  $\beta_{i,j} = 0$  となるとき、 つまり

$$0 \rightarrow S(-q - h + 1)^{\beta_{h,q}} \rightarrow \dots \rightarrow S(-q)^{\beta_{1,q}} \rightarrow S \rightarrow S/I \rightarrow 0$$

と表せるとき  $S/I$  が  $q$ -linear resolution を持つという。 日比・大杉は edge ring が 2-linear resolution を持つような有限連結単純グラフの代数的特徴づけを与えた [12]。

**命題 1.1** ([12, Theorem 4.6]). 頂点集合  $[n]$  の有限連結単純グラフ  $G$  に対して、  $K[G]$  が 2-linear resolution を持つことと、  $K[G]$  が完全二部グラフ  $K_{2,\delta}$  の edge ring  $K[K_{2,\delta}]$  上の  $n - 2\delta$  変数多項式環と同型であることは同値である。

さらに、 日比・松田・土谷は edge ring が 3-linear resolution を持つような有限連結単純グラフの代数的特徴づけを示した [7]。

**命題 1.2** ([7, Theorem 0.1]). 3-linear resolution を持つ有限連結単純グラフの edge ring は超曲面である。

また,  $q \geq 4$  について有限連結単純グラフの edge ring が  $q$ -linear resolution を持つとき, edge ring は超曲面となることが日比・松田・土谷によって予想され ([7, Conjecture 0.2]), 弦グラフ [10] や二部グラフ [14] については解決していた.

一般に,  $S/I$  が  $q$ -linear resolution を持つとき, 以下が成り立つ.

- $\text{reg}(S/I) = q - 1$
- $I$  は  $q$  次の斉次二項式で生成される.

**補題 1.3** ([3, Proposition 1.9 (d)]).  $S/I$  が  $q$ -linear resolution を持つとき,  $I$  の生成元の個数は少なくとも  $\binom{c+q-1}{c-1}$  個となる. ただし  $c$  は  $S/I$  の codimension である.

本研究ではこれらの性質や後述の可換環論やグラフ理論の結果を用いて, 日比・松田・土谷の予想が一般のグラフにおいて正しいことを示した.

**定理 1.4** ([9]).  $q \geq 4$  について有限連結単純グラフの edge ring が  $q$ -linear resolution をもつときそれは超曲面である.

さらに  $q \geq 2$  について edge ring が  $q$ -linear resolution を持つようなグラフに特徴づけを完成させた.

**定理 1.5** ([9, Theorem 1.4]). 有限連結単純グラフ  $G$  に対して,  $K[G]$  が 2-linear resolution を持つことと,  $G$  が以下のいずれかを満たすことは同値である:

- (i)  $G$  は完全二部グラフ  $K_{2,\delta}$  にいくつかの木を足して得られる.
- (ii)  $G$  は非二部グラフで (i) を満たすグラフに辺を 1 本足すことで得られる.

連結グラフ  $G$  から頂点  $v$  を取り除くことで得られるグラフが非連結となるとき  $v$  を切断点と呼ぶ. また,  $G$  のブロックとは  $G$  の切断点のない極大連結部分グラフである.

**定理 1.6** ([9, Theorem 1.5]).  $G$  を辺でないブロック  $B_1, \dots, B_s$  を持つ有限連結単純グラフとする.  $q \geq 3$  としたとき  $K[G]$  が  $q$ -linear resolution を持つことと,  $G$  が以下のいずれかを満たすことは同値である:

- (i)  $s = 1$  で  $B_1$  は長さ  $2q$  の偶サイクルである.
- (ii)  $s = 1$  で  $B_1$  は長さ  $2q$  の偶サイクルに path を足すことで得られる非二部グラフである.
- (iii)  $s = 2$  で  $B_1$  は長さ  $2q$  の偶サイクルで,  $B_2$  は奇サイクル, もしくはその逆である.
- (iv)  $s = 2$  で  $B_1$  と  $B_2$  は 1 頂点を共有する奇サイクルであり, 長さの和は  $2q$  である.
- (v)  $s = 2$  で  $B_1$  と  $B_2$  は頂点を共有しない奇サイクルであり,  $r_i$  を  $B_i$  の長さとしたとき,  $B_1$  の頂点と  $B_2$  の頂点を結ぶ最短の path の長さは  $q - (r_1 + r_2)/2$  となる.

## 2 Edge ring のトーリックイデアル

任意の頂点が格子点の多面体を *lattice polytope* という.  $G$  を頂点集合  $[n]$ , 辺集合  $E(G)$  の有限単純グラフとする.  $e = \{i, j\} \in E(G)$  について,  $\rho(e) = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \in \mathbb{Z}^n$  を対応させる. ただし  $\mathbf{e}_i$  は  $\mathbb{R}^n$  の  $i$  番目の標準基底である.  $G$  の *edge polytope*  $\mathcal{P}_G$  は

$$\{\rho(e) : e \in E(G)\}$$

で張られる凸閉包である.

体  $K$  上  $n+1$  変数ローラン多項式環  $K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s] = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}, s]$  について,  $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$  のとき,  $\mathcal{P}$  のトーリック環  $K[\mathcal{P}]$  は単項式  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1} s, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}_m} s \in K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s]$  で生成される  $K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s]$  の  $K$ -部分代数である. さらに,  $\mathcal{P}$  のトーリックイデアル  $I_{\mathcal{P}}$  は  $K[\mathcal{P}]$  の定義イデアルである, すなわち  $i = 1, 2, \dots, m$  について  $\pi(y_i) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} s$  で定義される環準同型写像  $\pi : K[y_1, \dots, y_m] \rightarrow K[\mathcal{P}]$  の核である.  $I_{\mathcal{P}}$  は斉次二項式によって生成されることが知られている.

$G$  を有限連結単純グラフとする.  $\mathcal{P}_G$  のトーリック環  $K[\mathcal{P}_G]$  は  $G$  の edge ring  $K[G]$  と同型である.  $G$  を辺数  $m$  のグラフとし,  $\mathcal{P}_G$  のトーリックイデアルを  $I_G \subset K[y_1, \dots, y_m]$  で表す.  $G$  の  $v_1 \in V(G)$  と  $v_{q+1} \in V(G)$  を結ぶ長さ  $q$  の路は  $\{v_k, v_{k+1}\} \in E(G)$  をみたす有限列

$$\Gamma = (\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_q, v_{q+1}\})$$

で表される. 偶路とは長さが偶数の路で閉路は  $v_1 = v_{q+1}$  の路である. 偶閉路

$$\Gamma = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{2q}})$$

に対して,  $I_G$  に含まれる二項式  $f_{\Gamma}$  を

$$f_{\Gamma} = \prod_{k=1}^q y_{i_{2k-1}} - \prod_{k=1}^q y_{i_{2k}}$$

とかく, ただし  $\pi(y_i) = \mathbf{x}^{\rho(e_i)} s$ . 以下の補題は Villarreal [16, Proposition 3.1] により与えられた.

**補題 2.1** ([6, Lemma 5.9]). 有限連結単純グラフ  $G$  のトーリックイデアル  $I_G$  は  $\{f_{\Gamma} : \Gamma \text{ は } G \text{ の偶閉路}\}$  で生成される.

$f_{\Gamma}$  が  $I_G$  の二項式からなる極小生成系に属す必要条件是以下である.

**命題 2.2** ([6, Lemmas 5.10 and 5.11] and [11]).  $\Gamma$  をグラフ  $G$  の偶閉路とする. 二項式  $f_{\Gamma}$  が  $I_G$  の極小生成元であるとき,  $f_{\Gamma}$  は既約で  $\Gamma$  は高々 2 回しか同じ頂点を通らず, 以下のいずれかを満たす:

- (i)  $\Gamma$  は偶サイクル;
- (ii)  $\Gamma$  はただ 1 つの頂点を共有する 2 つの奇サイクル;
- (iii)  $\Gamma$  は頂点を共有しない 2 つの奇サイクル  $C, C'$  と  $v \in V(C)$  と  $v' \in V(C')$  を結ぶ *walk* で構成される.

### 3 グラフについての結果

グラフ  $G$  の部分グラフ  $G'$  が頂点集合  $V$ , 辺集合

$$\{\{i, j\} \in E(G) : i, j \in V\}.$$

で構成されるような  $V \subset [n]$  が存在するとき  $G'$  は  $G$  の誘導部分グラフであるという.  $G'$  を  $G$  の誘導部分グラフとしたとき,  $\mathcal{P}_{G'}$  は  $\mathcal{P}_G$  の面である.

**補題 3.1.**  $G$  を有限単純グラフとし,  $G'$  を  $G$  の誘導部分グラフとする.  $K[G']$  が多項式環と同型であるとする.  $K[G]$  が  $q$ -linear resolution を持つとき,  $K[G']$  も  $q$ -linear resolution を持つ.

$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$  を次元  $d$  の lattice polytope とする. このとき  $\mathcal{P}$  の  $\delta$ -polynomial (or  $h^*$ -polynomial) は

$$\delta(\mathcal{P}, \lambda) = (1 - \lambda)^{d+1} \left( 1 + \sum_{t=1}^{\infty} |t\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n| \lambda^t \right)$$

で定義される. ただし,  $t\mathcal{P} = \{t\mathbf{a} : \mathbf{a} \in \mathcal{P}\}$ .  $\delta(\mathcal{P}, \lambda)$  の任意の係数は非負整数で  $\delta(\mathcal{P}, \lambda)$  の次数は高々  $d$  であることが知られている.  $\deg(\mathcal{P}) = \deg(\delta(\mathcal{P}, \lambda))$  としたとき  $\text{codeg}(\mathcal{P}) = d + 1 - \deg(\mathcal{P})$  と置く. このとき

$$\text{codeg}(\mathcal{P}) = \min\{r \in \mathbb{Z}_{>0} : \text{int}(r\mathcal{P}) \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset\},$$

ただし  $\text{int}(r\mathcal{P})$  は  $\mathbb{R}^n$  内の  $r\mathcal{P}$  の相対的内部である. いくつかの条件下では  $\mathcal{P}$  の次数は  $\text{reg}(K[\mathcal{P}])$  以下となる.

**補題 3.2** ([7, Corollaries 3.2 and 3.4]).  $G$  を有限連結単純グラフとし,  $G'$  を  $G$  の部分グラフとする. このとき  $\deg \mathcal{P}_{G'} \leq \deg \mathcal{P}_G \leq \text{reg}(K[G])$ .

$K[G]$  が  $q$ -linear resolution を持つとき  $\text{reg}(K[G]) = q - 1$  となることが知られていた. 補題 3.2 より,  $\deg(\mathcal{P}_G) < q$  となることは  $K[G]$  が  $q$ -linear resolution を持つことの必要条件である.

次に,  $K[G]$  の codimension と関係のある cyclotomic number について cyclotomic number が小さいグラフに関する結果を導入する.  $G$  を  $n$  頂点  $m$  辺の連結グラフとする. このとき  $c(G) = m - n + 1$  は  $G$  の *cyclotomic number* (もしくは *circuit rank*) とよばれる. また連結グラフ  $G$  が  $c(G) = 0$  を満たすことと  $G$  が木であることは同値である.  $c(G) = 1, 2, 3$  となるような連結グラフはそれぞれ *unicyclic*, *bicyclic*, *tricyclic* であるという. 連結グラフ  $G$  のサイクルの数は  $c(G)$  以上  $2^{c(G)} - 1$  以下であることが知られている [1]. 特に, 連結グラフが *unicyclic* であることとそのグラフにサイクルが一つしかないことは同値である. グラフ  $G$  の辺  $e = \{u, v\}$  の *edge subdivision operation* は  $G$  から  $e$  を削除して頂点  $w$  を伝う 2 辺  $\{u, w\}$  と  $\{w, v\}$  を加える操作のことをという. また,  $G$  に *edge subdivision operations* を行うことで得られるグラフを  $G$  の *subdivision* という. *Bicyclic* グラフと *tricyclic* グラフは以下のように特徴づけできる.

**命題 3.3** (e.g., [15]).  $G$  を連結単純グラフとする.

- (a)  $G$  が *bicyclic* であることと  $G$  が  $G_0$  にいくつかの木を足すことで得られることは同値である。  
ただし  $G_0$  は図1のうちの1つの多重グラフの *subdivision*
- (b)  $G$  が *tricyclic* であることと  $G$  が  $G_0$  にいくつかの木を足すことで得られることは同値である。  
ただし  $G_0$  は図2のうちの1つの多重グラフの *subdivision*.

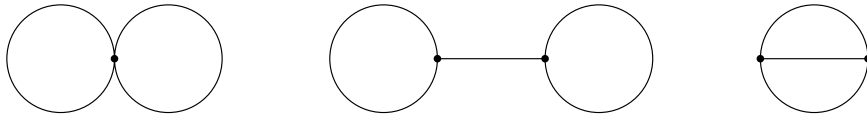


図1 Bicyclic グラフを生成できる多重グラフ [15]

以下の命題は [4, Theorem 2.5] で示された。

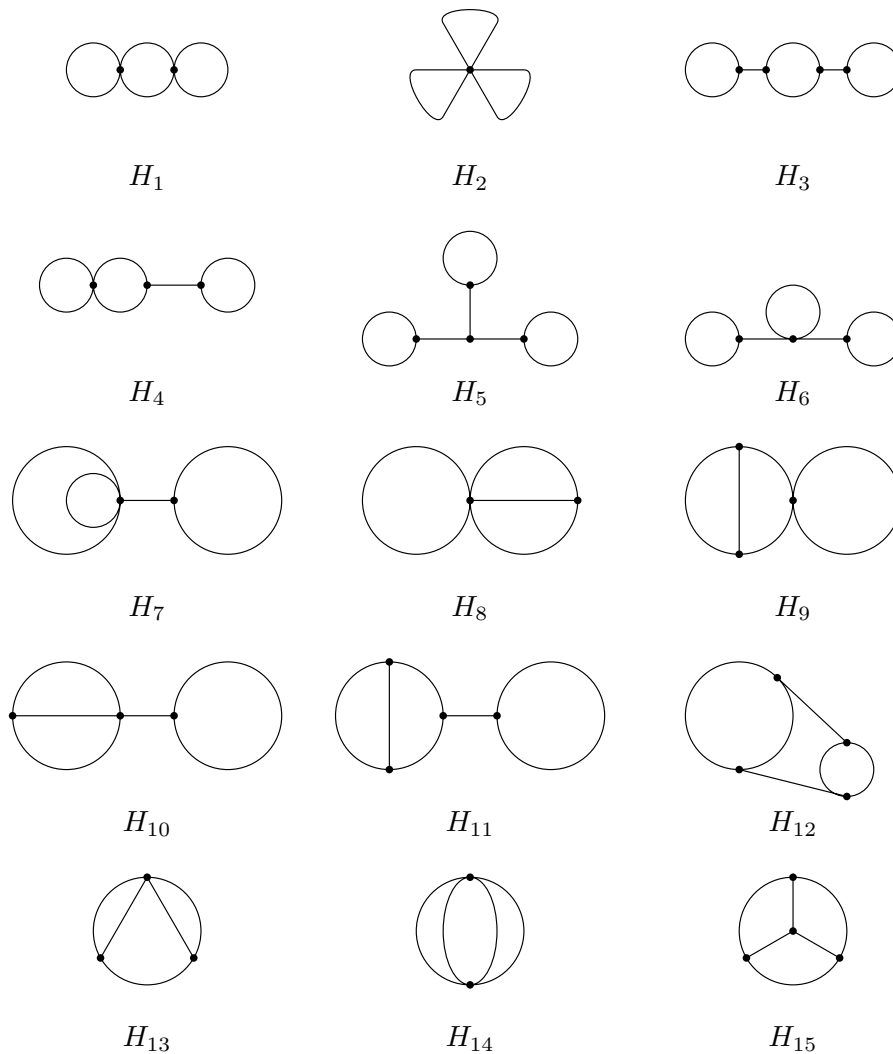


図2 Tricyclic グラフを生成する多重グラフ [15]

命題 3.4.  $G$  を頂点  $n$  の有限グラフとする. このとき

$$\dim \mathcal{P}_G = n - r(G) - 1,$$

ただし  $r(G)$  は  $G$  の二部な連結成分の個数.

特に,  $G$  を  $n$  頂点  $m$  辺の連結グラフとしたとき,

$$\begin{aligned} \dim(K[G]) &= \dim \mathcal{P}_G + 1 = n - r(G), \\ \text{codim}(K[G]) &= m - \dim(K[G]) = m - n + r(G) = \begin{cases} c(G) & G \text{ は二部グラフ,} \\ c(G) - 1 & \text{は非二部グラフ.} \end{cases} \end{aligned}$$

以下の条件は同値:

- (i)  $K[G]$  は多項式環と同型;
- (ii)  $\text{codim}(K[G]) = 0$ ;
- (iii)  $\mathcal{P}_G$  は単体.

これらの条件を満たすグラフは分類される.

命題 3.5 ([6, Lemmas 5.5 and 5.6]).  $G$  を頂点数  $n$  辺数  $m$  の有限連結単純グラフとする. このとき  $K[G]$  が多項式環と同型であることと  $G$  が以下のいずれかを満たすことは同値である:

- (a)  $m = n - 1$  で  $G$  は木;
- (b)  $m = n$  で  $G$  はただ 1 つのサイクル  $C$  を持ち,  $C$  は奇サイクル.

グラフ  $G$  について  $\deg(\mathcal{P}_G) \geq q$  を満たすような十分条件をいくつか与える. 以下の 2 つの補題は [14] で与えられた.

補題 3.6 ([14, Lemmas 2.1 and 2.2]). 整数  $q \geq 3$  について  $G$  の 2 つの長さ  $2q$  の偶サイクル  $C_1$  と  $C_2$  が高々 1 頂点を共有するとき,  $\deg \mathcal{P}_G \geq q$  である.

補題 3.7 ([14, Lemmas 2.3 and 2.4]). 整数  $q \geq 3$  について  $G$  が偶サイクルに *path* を足すことで得られる二部グラフを部分グラフに持ち,  $G$  の任意のサイクルの長さが  $2q$  のとき,  $\deg \mathcal{P}_G \geq q$  である.

ここで  $G$  が  $\deg(\mathcal{P}_G) \geq q$  を満たす十分条件に関する重要な補題を 2 つ与える.

補題 3.8.  $q \geq 3$  とする.  $K[G]$  が  $q$ -linear resolution を持つとする. すると任意の  $G$  の偶サイクルの長さは  $2q$  である.

*Proof.*  $C$  を  $G$  の長さ  $2r$  の偶サイクルとする.  $2r < 2q$  とすると, 二項式  $f_C \in I_G$  の次数は  $r < q$  となり,  $K[G]$  は  $q$ -linear resolution を持つことができない.  $2r > 2q$  とする.  $G$  の長さ  $2r$  の偶サイクルを  $C = (i_1, i_2, \dots, i_{2r})$  で与える. このとき  $\mathcal{P}_C$  の次元は  $2r - 2$  である.

$$\frac{1}{2} \sum_{e \in E(C)} \rho(e) = \mathbf{e}_{i_1} + \dots + \mathbf{e}_{i_{2r}} \in \text{int}(r\mathcal{P}_C) \cap \mathbb{Z}^{2r},$$

より  $\text{codeg}(\mathcal{P}_C) \leq r$ . 補題 3.2 より,  $\text{deg}(\mathcal{P}_G) \geq 2r - 2 + 1 - r = r - 1 \geq q$  である. したがって  $K[G]$  は  $q$ -linear resolution を持つことができない.  $\square$

**補題 3.9.**  $G$  を偶サイクルを少なくとも一つ持つような連結 *tricyclic* グラフとする.  $q \geq 3$  について,  $G$  の任意の偶サイクルの長さが  $2q$  のとき  $\text{deg}(\mathcal{P}_G) \geq q$  である.

**補題 3.10.**  $q \geq 3$  とする. 連結グラフ  $G$  が偶サイクルを持たないとする.  $K[G]$  が  $q$ -linear resolution を持つとき,  $K[G]$  は超曲面である.

グラフ  $G$  の edge ring  $K[G]$  が超曲面であることの必要十分条件を確認する.

**命題 3.11.**  $G$  を頂点数  $n$  辺数  $m$  の有限連結グラフとし,  $B_1, \dots, B_s$  を辺でないブロックとする. 以下は同値である:

- (i)  $K[G]$  は超曲面;
- (ii)  $m = \begin{cases} n & G \text{ は二部グラフ} \\ n + 1 & G \text{ は非二部グラフ;} \end{cases}$
- (iii)  $G$  は以下のいずれかを満たす:
  - (a)  $s = 1$  で  $B_1$  は偶サイクルである;
  - (b)  $s = 1$  で  $B_1$  は偶サイクルに *path* を足すことで得られる非二部グラフである;
  - (c)  $s = 2$  で  $B_1$  と  $B_2$  はサイクルで  $B_1$  の  $B_2$  少なくとも片方は奇サイクルである.

定理 1.4 の証明.  $K[G]$  が  $q$ -linear resolution を持つが超曲面ではないとする. 補題 3.8 と 3.10 より,  $G$  は少なくとも 1 つ偶サイクルを持ち,  $G$  の任意の偶サイクルの長さは  $2q$  である. さらに, 補題 3.6 より,  $G$  に偶サイクルを含むただ 1 つのブロック  $B$  が存在する.

$B$  を偶サイクルとする.  $K[G]$  は超曲面ではないので,  $G$  は少なくとも 2 つの奇サイクル  $C_1$  と  $C_2$  を持つ. よって  $G$  に  $B \cup C_1 \cup C_2$  を含む *tricyclic* な部分グラフが存在する. しかしこれは補題 3.9 に矛盾する.

$B$  を偶サイクルの相異なる頂点を *path* で結ぶことで得られる非二部グラフとする.  $G$  がただ 1 つの奇サイクルからなるブロックを持たないとき,  $K[G]$  は超曲面となる.  $G$  がただ 1 つの奇サイクルからなるブロック  $B'$  を持つとする. すると  $G$  には  $B \cup B'$  を含む *tricyclic* な部分グラフが存在する. しかしこれは補題 3.9 に矛盾する.

すると  $B$  の cyclotomic number は  $c(B) \geq 3$  を満たす. すると偶サイクルを持つような *tricyclic* な  $B$  の部分グラフ  $H$  が存在する. しかしこれは補題 3.9 に矛盾する.  $\square$

## 参考文献

- [1] W. Ahrens, Über das Gleichungssystem einer Kirchhoffschen galvanischen Stromverzweigung, *Math. Ann.* **49** (1897), 311–324.
- [2] J. Biermann, A. O’Keefe and A. Van Tuyl, Bounds on the regularity of toric ideals of graphs, *Adv. Appl. Math.* **85** (2017), 84–102.

- [3] D. Eisenbud and S. Goto, Linear free resolutions and minimal multiplicity, *J. Algebra* **88** (1984), 89–133
- [4] J. W. Grossman, D. M. Kulkarni and I.E. Schochetman, On the minors of an incidence matrix and its Smith normal form, *Linear Algebra Appl.* **218** (1995), 213–224.
- [5] H. T. Há, S. Kara and A. O’Keefe, Algebraic properties of toric rings of graphs, *Comm. Alg.* **47** (2019), 1–16.
- [6] J. Herzog, T. Hibi and H. Ohsugi, “Binomial ideals”, Graduate Texts in Math. **279**, Springer, Cham, 2018.
- [7] T. Hibi, K. Matsuda and A. Tsuchiya, Edge rings with 3-linear resolutions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **147** (2019), 3225–3232.
- [8] Z. Greif and J. McCullough, Green–Lazarsfeld condition for the toric edge ideals of bipartite graphs, *J. Alg.* **562** (2020), 1–27.
- [9] K. Mori, H. Ohsugi, A. Tsuchiya, Edge rings with  $q$ -linear resolutions, 2020, preprint. [arXiv:2010.02854](https://arxiv.org/abs/2010.02854).
- [10] R. Nandi and R. Nanduri, On regularity bounds and linear resolutions of toric algebras of graphs, *J. Commut. Alg.*, (2020), published online.
- [11] M. Ogawa, H. Hara and A. Takemura, Graver basis for an undirected graph and its application to testing the beta model of random graphs, *Ann. Inst. Stat. Math.* **65** (2013), 191–212.
- [12] H. Ohsugi and T. Hibi, Toric Ideals Generated by Quadratic Binomials, *J. Alg.* **218** (1999), 509–527.
- [13] H. Ohsugi and T. Hibi, Koszul bipartite graphs, *Adv. in Appl. Math.* **22** (1999), 25–28.
- [14] A. Tsuchiya, Edge rings of bipartite graphs with linear resolutions, *J. Algebra Appl.*, (2020), published online.
- [15] V.A. Voblyi, A.K. Meleshko, Enumeration of labeled outerplanar bicyclic and tricyclic graphs, *J. Appl. Ind. Math.* **11** (2017), 296–303.
- [16] R.H. Villarreal, Rees algebras of edge ideals, *Comm. Algebra*, **23** (1995), 3513–3524.