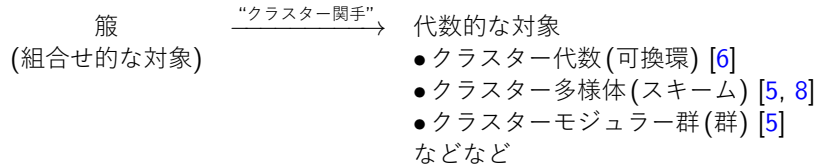


クラスター多様体上の q -パンルヴェ系

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系
水野勇磨 (Yuma Mizuno)

1 はじめに

クラスター理論は、籐という組合せ的な対象をインプットとして、籐の組合せ的な構造を反映した代数的な対象をアウトプットとして与える理論である。



インプットである籐を色々と変えることにより、アウトプットとして様々な重要な数学的对象が現れることが、多くの研究者の仕事によって明らかになっていった。現れる数学的对象は多岐にわたりそれらすべてをリストアップすることは到底かなわないが、筆者の独断と偏見でいくつかをリストアップすると、

- Lie理論に現れる座標環 (二重 Bruhat 胞体 [1]、冪単部分群 [7])
- Teichmüller空間および写像類群 [4]
- log Calabi-Yau 多様体のトーリックモデル [8]
- モノイダル圏の Grothendieck 環 (量子アフィン代数の加群圏 [9]、籐 Hecke 代数の加群圏 [10]、アフィン・グラスマン多様体上の偏屈接続層の圏 [3])

といった感じである。Lie理論、低次元トポロジー、代数幾何学、表現論といった幅広い分野の重要な対象が現れていることが見て取れるだろう。

この記事で紹介するのは、 q -Painlevé系と呼ばれる離散力学系も上記のリストに入れることができるという比較的最近発見された結果である。このことは Bershtein と Gavrylenko と Marshakov [2] によって、ダイマー模型との関係を用いて発見された。この記事では彼らの結果について、ダイマー模型の代わりにトーリック曲面のブローアップを用いた筆者による定式化 [12] に基づいて紹介する。

2 クラスター多様体

この記事では、スキームは常に複素数体 \mathbb{C} 上で考えることとする。

2.1 籐とクラスター変換

反対称整数行列のことを**籐**という。行列を有向グラフの隣接行列と思うことによって、籐とは多重辺は許すがループと2サイクルは許さない有向グラフだといっても同じことである。

整数 a について $[a]_+ := \max(0, a)$ とする。

Definition 2.1. 組 (k, Q, Q') は、 $Q = (\epsilon_{ij})$ と $Q' = (\epsilon'_{ij})$ が同じ大きさ n の箴で、 k が $1 \leq k \leq n$ なる整数で、さらに

$$\epsilon'_{ij} = \begin{cases} -\epsilon_{ij} & \text{if } i = k \text{ or } j = k, \\ \epsilon_{ij} + [\epsilon_{ik}]_+ + [\epsilon_{kj}]_+ - [-\epsilon_{ik}]_+ - [-\epsilon_{kj}]_+ & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.1)$$

を満たすとき、**箴の変異**であるという。箴の変異 (k, Q, Q') を $\mu_k: Q \rightarrow Q'$ と表す。

Definition 2.2. $\epsilon = 1$ or -1 とする。組 (σ, Q, Q') は、 $Q = (\epsilon_{ij})$ と $Q' = (\epsilon'_{ij})$ が同じ大きさ n の箴で、 σ が集合 $\{1, \dots, n\}$ の置換で、さらに

$$\epsilon'_{\sigma(i)\sigma(j)} = \epsilon \epsilon_{ij} \quad (2.2)$$

を満たすとき、**箴の ϵ -同型**であるという。箴の $(+1)$ -同型を単に**箴の同型**といい、箴の (-1) -同型を**箴の反同型**ということにする。箴の同型 (resp. 反同型) (σ, Q, Q') を $\sigma: Q \rightarrow Q'$ (resp. $-\sigma: Q \rightarrow Q'$) と表す。

箴の変異 (resp. ϵ -同型) において、 k (resp. σ) と Q が与えられれば Q' は (2.1) (resp. (2.2)) によって一意に定まる。

Example 2.3.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array}, \quad Q' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array}$$

はどちらも箴であり、 $\mu_3: Q \rightarrow Q'$ は箴の変異である。また、置換 $\sigma = (1, 2, 4, 3)$, $\sigma' = (1, 2)(3, 4)$ に対して、 $\sigma: Q \rightarrow Q'$ は箴の同型で、 $-\sigma': Q \rightarrow Q'$ は箴の反同型である。

箴たちが変異(と同型と反同型)によって繋がりが合っている様子が、クラスター理論で重要になる組合せ的な構造である。この構造を**亜群**という代数的な構造で表しておくくと便利である。**亜群**とは、射がすべて同型射であるような(小)圏のことをいう。群とは対象が一つの亜群に他ならないという意味で、亜群は群の一般化になっている。集合から自由群を構成するのと同じような方法で、有向グラフから自由亜群を定めることができる。いま、頂点集合がすべての箴からなる集合であり、辺集合がすべての箴の変異および箴の同型および箴の反同型からなる集合であるような有向グラフを考え、その有向グラフから定まる自由亜群を Q と書く。すなわち、 Q の対象は箴で、射は箴の変異と同型と反同型の形式的な合成である。 Q の射は**クラスター変換**と呼ばれる。ふたつの箴 Q と Q' が**変異同値**であるとは、 $Q = \text{dom}(\mathbf{c})$ かつ $Q' = \text{cod}(\mathbf{c})$ を満たすクラスター変換 $\mathbf{c}: Q \rightarrow Q'$ が存在するときをいう。

2.2 クラスター関手

有理関数体 $\mathbb{C}(X_1, \dots, X_n)$ の部分集合

$$\mathbb{Q}_{\text{sf}}(X_1, \dots, X_n) := \left\{ \frac{f(X_1, \dots, X_n)}{g(X_1, \dots, X_n)} \mid f \text{ と } g \text{ は係数がすべて非負整数の非零多項式} \right\}$$

は半体の構造を持つ。ここで、**半体**とは、乗法的なアーベル群に可換かつ結合的な演算であって乗法に関して分配的なものが備わったものをいう。平たく言えば、半体とは引き算を許さない体のようなものである。

ある自然数 n について $\text{Spec } \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ と同型であるようなスキームを**代数的トーラス**という。代数的トーラスの間の支配的な有理写像

$$f : \text{Spec } \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_m^{\pm 1}] \dashrightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$$

は、誘導される有理関数体の間の射

$$f^* : \mathbb{C}(X_1, \dots, X_n) \rightarrow \mathbb{C}(X_1, \dots, X_m)$$

が半体の間の射

$$\mathbb{Q}_{\text{sf}}(X_1, \dots, X_n) \rightarrow \mathbb{Q}_{\text{sf}}(X_1, \dots, X_m)$$

に制限するとき、**正有理写像**であるという。圏 \mathbf{Pos} を、対象が代数的トーラスで、射が正有理写像であるような圏として定める。 \mathbf{Pos} の同型射は**正双有理写像**と呼ばれる。

クラスター理論は、組合せ的な世界と代数的な世界を結びつける関手 $\mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{Pos}$ によって記述される。クラスター理論においてはそのような関手として、 \mathcal{A} 関手および \mathcal{X} 関手と呼ばれる二つの関手が存在する。これら二つの関手はどちらも重要であり、また密接に関係しているのだが^{*1}、この記事では q -Painlevé 系とより直接関係する \mathcal{X} 関手についてのみ定義を行う。

Definition 2.4. 関手 $\mathcal{X} : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{Pos}$ を以下で定める。まず、籠 Q に対しては

$$\mathcal{X}(Q) := \text{Spec } \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$$

とする。ここで、 n は Q の大きさである。次に、クラスター変換 $\mathbf{c} : Q \rightarrow Q'$ の行き先の正双有理写像 $\mathcal{X}(\mathbf{c}) : \mathcal{X}(Q) \dashrightarrow \mathcal{X}(Q')$ を定義する。そのためには生成元、すなわち籠の変異と同型と反同型の行き先を決めればよい。以下では、 $\mathcal{X}(\mathbf{c})$ から誘導される有理関数体上の同型 $\mathcal{X}(\mathbf{c})^*$ を単に \mathbf{c}^* と書くことにする。この記法のもと、籠の変異 $\mu_k : Q \rightarrow Q'$ については、 $Q = (\epsilon_{ij})$ として、

$$\mu_k^*(X_i) := \begin{cases} X_k^{-1} & \text{if } i = k, \\ X_i(1 + X_k^{-\text{sgn}(\epsilon_{ik})})^{-\epsilon_{ik}} & \text{if } i \neq k, \end{cases}$$

と定め、籠の (± 1) -同型 $\pm\sigma : Q \rightarrow Q'$ については

$$\pm\sigma^*(X_{\sigma(i)}) := X_i^{\pm 1}$$

と定める。

2.3 クラスター多様体

籠 Q に対して、 Q に付随するクラスター多様体 \mathcal{X}_Q とは、代数的トーラスのコピーを Q をドメインとするクラスター変換たちによって張り合わせて得られるスキームである。以下、より詳しい定義について説明する。

まず、張り合わせでスキームを得る方法について復習する。以下を満たす四つ組 $(I, \{U_i\}, \{U_{ij}\}, \{f_{ij}\})$ をスキームの**張り合わせデータ**という。

- I は集合である。

^{*1} これら二つの関手が導入された論文 [5] では、この関係性を尊重して組 $(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ のことを **cluster ensemble** と呼んでいる。

- $\{U_i\}_{i \in I}$ はスキームの族である。
- $\{U_{ij}\}_{i,j \in I}$ は $U_{ij} \subseteq X_i$ なる開部分スキームの族で、 $U_{ii} = U_i$ を満たす。
- $\{f_{ij}\}_{i,j \in I}$ は $f_{ij} : U_{ij} \rightarrow U_{ji}$ なる同型の族であって、 $f_{ij}^{-1}(U_{ji} \cap U_{jk}) = U_{ij} \cap U_{ik}$ を満たし、 $U_{ij} \cap U_{ik}$ 上で $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ を満たす。

次の命題は、スキームの張り合わせデータが与えられると、 $\{U_i\}$ を $\{U_{ij}\}$ をのりしろにして $\{f_{ij}\}$ によって張り合わせて得られるスキームが構成できるということを述べている。

Proposition 2.5. 以下を満たすスキーム X および射の族 $\{\phi_i : U_i \rightarrow X\}$ が存在する。

- ϕ_i は U_i から X の開部分スキームへの同型を与える。
- $\phi_j \circ f_{ij} = \phi_i|_{U_{ij}}$.
- $X = \bigcup_i \phi_i(U_i)$.
- $\phi_i(U_i) \cap \phi_j(U_i) = \phi_i(U_{ij}) = \phi_j(U_{ji})$.

さらに、このような X と $\{\phi_i\}$ の組は一意的な同型の違いを除いて一意に定まる。

命題 2.5 を用いてクラスター多様体を定義しよう。集合 I を、 Q をドメインとするクラスター変換全体の集合とする。スキームの族 $\{U_c\}_{c \in I}$ を $U_c = \mathcal{X}(\text{cod}(c))$ で定める。開部分スキーム $U_{c,d} \subseteq U_c$ を、 $f_{c,d} : U_{c,d} \rightarrow f_{c,d}(U_{c,d})$ が同型となる最大の開集合 $U_{c,d} \subseteq U_c$ とする。ここで、 $f_{c,d} = \mathcal{X}(d \circ c^{-1})$ である。これらはスキームの張り合わせデータを与える*2。

Definition 2.6. この張り合わせデータから定まるスキームを簇 Q に付随する**クラスター多様体**といい、 \mathcal{X}_Q と書く。

クラスター多様体 \mathcal{X}_Q は H_Q という代数的トーラスの点でパラメタライズされるスキームの族と思えるということを説明する。大きさ n の簇 $Q = (\epsilon_{ij})$ に対して、

$$K_Q := \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i \epsilon_{ij} = 0 \text{ for all } j = 1, \dots, n \right\}. \quad (2.3)$$

を Q の零空間として、 $H_Q := \text{Spec } \mathbb{C}[K_Q]$ とする。ここで、 $\mathbb{C}[K_Q]$ は群環を表す。積を乗法的に書くために、不定元 z を用いて $\alpha \in K_Q$ に対応する $\mathbb{C}[K_Q]$ の元を z^α と書くことにする。 $\mathcal{X}(Q) = \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ なので、包含 $K_Q \subseteq \mathbb{Z}^n$ は射 $\mathcal{X}(Q) \rightarrow H_Q$ を誘導する。このとき、任意のクラスター変換 $c : Q \rightarrow Q'$ について、canonical な同型 $H_Q \rightarrow H_{Q'}$ が存在し、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(Q) & \longrightarrow & H_Q \\ \mathcal{X}(c) \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathcal{X}(Q') & \longrightarrow & H_{Q'} \end{array}$$

が可換になる。この可換図式より、自然な射 $\lambda_Q : \mathcal{X}_Q \rightarrow H_Q$ が存在することがわかる。この射により、クラスター多様体は代数的トーラス H_Q を底空間とするスキームの族と思える。このことを強調したい場合に、射 λ_Q のことをクラスター多様体ということもある。

*2 証明は [8, Proposition 2.4] を見よ。

2.4 クラスターモジュラー群/亜群

$\mathbf{c}: Q \rightarrow Q'$ をクラスター変換とすると、 \mathbf{c} は Q をドメインとするクラスター変換の集合と Q' をドメインとするクラスター変換の集合との間の全単射を誘導する。これはクラスター多様体 \mathcal{X}_Q と $\mathcal{X}_{Q'}$ の張り合わせデータのラベルの入れ替えになっていて、したがってスキームの同型 $\mathcal{X}_Q \rightarrow \mathcal{X}_{Q'}$ を誘導する。よって、変異同値な簇は同型なクラスター多様体を与える。しかし、変異同値な簇 Q と Q' に対して、異なる二つのクラスター変換 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2: Q \rightarrow Q'$ が、 \mathcal{X}_Q から $\mathcal{X}_{Q'}$ への異なる二つの同型を与える場合がある。この曖昧性は、次の亜群および群によって記述される。

Definition 2.7. 亜群 $\mathcal{G} := Q/\ker \mathcal{X}$ を **クラスターモジュラー亜群** といい、簇 Q に対して群 $\Gamma_Q := \text{Aut}_{\mathcal{G}}(Q)$ を Q に付随する **クラスターモジュラー群** という。

すなわち、 \mathcal{G} の対象は簇であり、射はクラスター変換を \mathcal{X} で送って同じになるものを同一視して得られる同値類である。定義より、関手 \mathcal{X} は忠実な関手 $\mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Pos}$ を誘導する。クラスターモジュラー亜群およびクラスターモジュラー群はクラスター理論における対称性を記述しており重要である。

クラスターモジュラー群がクラスター多様体に忠実に作用することを説明する。クラスター変換 $\mathbf{c}: Q \rightarrow Q'$ はクラスター多様体間の同型 $\mathcal{X}_Q \rightarrow \mathcal{X}_{Q'}$ を誘導するのだったが、特に $Q = Q'$ の場合は、 \mathcal{X}_Q 上の自己同型を誘導する。したがって、クラスターモジュラー群の定義より、単射な群準同型 $\Gamma_Q \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{X}_Q)$ を得る。同様に、 $\Gamma_Q \rightarrow \text{Aut}(H_Q)$ も得られる。これらふたつの作用は、 $\lambda_Q: \mathcal{X}_Q \rightarrow H_Q$ と可換である。

3 トーリック多様体

扇という組合せ論的なデータから、トーリック多様体と呼ばれる代数多様体が構成できる。トーリック多様体の最大の特徴は、トーリック多様体の様々な幾何的な性質を扇の組み合わせ的な言葉を用いて記述できるという点である。トーリック多様体について手短に紹介する。

n を自然数として、

$$\begin{aligned} M &= \mathbb{Z}^n, & N &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}), \\ M_{\mathbb{R}} &= M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, & N_{\mathbb{R}} &= N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \end{aligned}$$

とする。 $\sigma \subseteq M_{\mathbb{R}}$ が **有理強凸多面錐** とは、 $\sigma = \sum_{v \in S} \mathbb{R}_{\geq 0} v$ となる有限集合 $S \subseteq N$ が存在して、 σ が $N_{\mathbb{R}}$ の 0 以外のいかなる線形部分空間を含まないときをいう。このとき、 S は σ を生成するという。有理強凸多面錐 σ に対して、**双対錐** $\sigma^{\vee} \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を

$$\sigma^{\vee} := \{n \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle n, m \rangle \geq 0 \quad \forall m \in \sigma\}$$

で定める。有理強凸多面錐からなる空でない有限集合 Σ は

- (1) $\sigma \in \Sigma$ かつ $\tau \subseteq \sigma$ のとき、 $\tau \in \Sigma$ である。
- (2) $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ のとき、 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ は σ_1 および σ_2 の面である。

を満たすとき **扇** と呼ばれる。扇 Σ に対して、命題 2.5 をスキームの張り合わせデータ

- 集合 Σ ,
- $U_{\sigma} = \text{Spec } \mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap N]$ で与えられるスキームの族 $\{U_{\sigma}\}$,
- $U_{\sigma_1, \sigma_2} = X_{\sigma_1 \cap \sigma_2} \subseteq X_{\sigma_1}$ で与えられる開部分スキームの族 $\{U_{\sigma_1, \sigma_2}\}$,

- $f_{\sigma_1, \sigma_2} = \text{id}_{\sigma_1 \cap \sigma_2} : X_{\sigma_1 \cap \sigma_2} \rightarrow X_{\sigma_2 \cap \sigma_1}$ で与えられる同型の族 $\{f_{\sigma_1, \sigma_2}\}$,

に対して適用して得られるスキームを Σ に付随する **トーリック多様体** といい、 $\text{TV}(\Sigma)$ と書く。これは \mathbb{C} 上の代数多様体になる。**トーリック曲面** とは、 M が二次元のときのトーリック多様体のことをいう。扇 Σ は、 $\bigcup \Sigma = M_{\mathbb{R}}$ のとき **完備** であるといい、任意の $\sigma \in \Sigma$ について σ が $\{e_1, \dots, e_p\}$ で生成されるような M の基底 e_1, \dots, e_n および整数 $1 \leq p \leq n$ が存在するとき **非特異** であるという。これらはそれぞれ $\text{TV}(\Sigma)$ が \mathbb{C} 上固有であることおよび非特異であることと同値である。

トーリック多様体 $\text{TV}(\Sigma)$ には代数的トーラス $\text{Spec } \mathbb{C}[N]$ が作用していて、その作用の軌道と扇 Σ に属する錐の間には一対一の対応がある。錐 σ に対応する軌道を D_σ と書くことにする。1次元の面に対応する軌道は $\text{TV}(\Sigma)$ 上の Weil 因子である。完備で非特異なトーリック曲面 $\text{TV}(\Sigma)$ 上の交差理論は、以下のように扇 Σ によって組合せ的に記述される。

Proposition 3.1. Σ を二次元の完備で非特異な扇とする。 $i = 1, 2$ について、 σ_i を原始ベクトル u と u_i で生成される二次元の錐とする。 ρ を $\rho = \sigma_1 \cap \sigma_2 = \mathbb{R}_{\geq 0}u$ で与えられる1次元の面とする。このとき、ある整数 b が存在して $u_1 + u_2 = bu$ を満たす。さらに、

$$D_\rho \cdot D_{\rho'} = \begin{cases} -b & \text{if } \rho = \rho', \\ 1 & \text{if } \rho' = \mathbb{R}_{\geq 0}u_i, i = 1, 2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ。

4 q -Painlevé系

坂井 [14] は代数曲面の理論を用いて **離散 Painlevé系** と呼ばれる離散力学系を系統的に構成した。坂井理論では、離散 Painlevé系は、ある種の有理曲面の族への Cremona 等長群の忠実な作用として定義される。坂井は幾何的な考察により、離散 Painlevé系は全部で22種類あることを示した。これらはさらに大きく三つに分けられ、楕円型 (1種類)、乗法型 (10種類)、加法型 (11種類) と類別される。このうち乗法型の離散 Painlevé系は別名 **q -Painlevé系** と呼ばれ、この場合の有理曲面はトーリック曲面のブローアップで与えることができる。以下では、 q -Painlevé系はクラスターモジュラー群のクラスター多様体への作用として実現できるということを説明する。

$\bar{N} = \mathbb{Z}^2$ として、同型 $\bigwedge^2 \bar{N} \cong \mathbb{Z}$ を $(1, 0) \wedge (0, 1) = 1$ で固定する。成分の最大公約数が1である整数ベクトルを原始ベクトルと呼ぶ。

Definition 4.1. \bar{N} の原始ベクトルの組 (w_1, \dots, w_n) は、以下の条件を満たすとき (トーリック曲面の) **ブローアップ・データ** であるという。

- (1) $\sum_{i=1}^n \mathbb{Q}w_i = \bar{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ である。
- (2) $N^\circ = \mathbb{Z}^n$ および e_1, \dots, e_n を N° を標準基底としたとき、 $e_i \otimes c \mapsto w_i \otimes c$ ($c \in \mathbb{Q}$) によって定まる線形写像 $N \rightarrow \bar{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ の像が \bar{N} であるような格子 $N \subseteq N^\circ \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ が存在する。

(w_1, \dots, w_n) をブローアップ・データとして、定義中の格子 N を固定する。このとき、 N° は N の有限指数の部分群である。定義より全射 $\psi: N \rightarrow \bar{N}$ を得る。 $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ として、 $T_N = \text{Spec } \mathbb{C}[M]$ とする。線形写像 $\varphi: \bar{N} \rightarrow M$ を $\bar{n} \mapsto (n \mapsto \psi(n) \wedge \bar{n})$ で定める。 φ は単射であり、原始ベクトルを原始ベクトルに送る。

ブローアップ・データに対して、籠 $Q = (\epsilon_{ij})$ を $\epsilon_{ij} = w_i \wedge w_j$ によって定義する。定義より $\text{rank } Q = 2$ に注意する。2節より、クラスター多様体 $\lambda_Q: \mathcal{X}_Q \rightarrow H_Q$ を得る。ただし、 $N^\circ \subsetneq N$ のときは、定義2.4 で $\mathcal{X}(Q) := \text{Spec } \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n] (= \text{Spec}[N^\circ])$ としていたのを $\mathcal{X}(Q) := \text{Spec } \mathbb{C}[N]$ に取り換えて、(2.3) の直後に $H_Q := \text{Spec}[K_Q]$ としていたのを $H_Q := \text{Spec}[K_Q^\circ]$ (ここで、 $K_Q^\circ := K_Q \cap N^\circ$) に取り換えておく。

Gross と Hacking と Keel [8] は、変異による代数的トーラスの張り合わせがトーリック多様体のブローアップによって余次元2を除いて実現できるということを発見し、そのことを用いてクラスター多様体 $\lambda_Q: \mathcal{X}_Q \rightarrow H_Q$ の一般のファイバーは本質的には次のようにして得られるトーリック曲面のブローアップ Y およびその上の反標準因子 D を用いて $Y \setminus D$ として与えられることを示した。

ブローアップ・データに属する任意のベクトル w_i が $\bar{\Sigma}$ の1次元の面を生成しているような完備で非特異な \bar{N} の扇 $\bar{\Sigma}$ をひとつ固定して、 $\bar{Y} = \text{TV}(\bar{\Sigma})$ とする。このような扇はいつでも取ることができる。 $\Sigma := \varphi(\bar{\Sigma})$ は M の扇であり、射影 $M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_Q, \mathbb{Z}) \cong M/(K_Q)^\perp$ は射 $\bar{\lambda}: \text{TV}(\Sigma) \rightarrow H_Q$ を誘導する。 $\bar{\lambda}$ の各ファイバーはトーリック曲面 \bar{Y} と同型である。原始ベクトル $\varphi(w_i)$ に対応する $\text{TV}(\Sigma)$ の因子を D_i と書くことにする。 $\bar{V}(1+z^{e_i})$ を零点集合 $V(1+z^{e_i}) \subseteq \text{Spec } \mathbb{C}[N]$ の $\text{TV}(\Sigma)$ における閉包として、 $Z_i = D_i \cap \bar{V}(1+z^{e_i})$ とする。 $\alpha \in H_Q$ とする。このとき、 $Z_i \cap \bar{\lambda}^{-1}(\alpha)$ は1点からなる [8, Lemma 5.1]。この点を p_i とする。 $\bar{\Sigma}$ の1次元の面は w'_1, \dots, w'_s であるとする。 $j = 1, \dots, s$ (resp. $i = 1, \dots, n$) について、 w'_j (resp. w_i) に対応する因子を \bar{D}'_j (resp. \bar{D}_i) と書くことにする。そして、 $\pi: Y \rightarrow \bar{Y}$ を点の列 p_1, \dots, p_n に沿ったブローアップの合成とする。 $j = 1, \dots, s$ (resp. $i = 1, \dots, n$) について、 \bar{D}'_j (resp. \bar{D}_i) の強変換を D'_j (resp. D_i) と書き、 $D = D'_1 + \dots + D'_s$ とする。以上が Y と D の与え方である。

ブローアップ・データから得られる籠に付随するクラスター多様体はこのようにトーリック曲面のブローアップで記述される。この記述の下で、格子 K_Q° は以下のような幾何的な意味を持つ。

Theorem 4.2 ([8, Theorem 5.5 and 5.6]). $D^\perp \subseteq \text{Pic}(Y)$ を、すべての D'_1, \dots, D'_s と直交する因子類からなる Picard 群の部分空間とする。このとき、

$$K_Q^\circ \rightarrow D^\perp, \quad \sum_i a_i e_i \mapsto \pi^* C - \sum_i a_i E_i,$$

として定まる同型が存在する。ここで、 C は

$$C \cdot \bar{D}'_j = \sum_{i: D_i = D'_j} a_i \quad \text{for } j = 1, \dots, s$$

を満たす唯一の因子類である。さらに、この同型はクラスター変換と整合的である。

定理4.2より、 $D^\perp \subseteq \text{Pic}(Y)$ の交差形式から誘導される自然な対称双線形形式 $K_Q^\circ \times K_Q^\circ \rightarrow \mathbb{Z}$ が存在する。この形式による $\alpha, \beta \in K_Q^\circ$ の行き先を $\alpha \cdot \beta$ と書くことにする。

ブローアップ・データは、双線形形式 $K_Q^\circ \times K_Q^\circ \rightarrow \mathbb{Z}$ が半正定値だが正定値でないとき、**q-Painlevé型** であるということにする。このときの籠 Q も **q-Painlevé型** であるということにする。定理4.2の同型のクラスター変換との整合性より、**q-Painlevé型** という性質は変異同値と整合的である。**q-Painlevé型** の籠に対して、 $\delta \cdot \delta = 0$ を満たし成分が正である原始的なベクトル $\delta \in K_Q^\circ$ が一意に定まる。 δ は**零ルート**と呼ばれる。零ルートに対応する H_Q 上の関数 $z^\delta \in \mathbb{C}[K_Q^\circ]$ は q と書かれる。射 $\mathcal{X}_Q \rightarrow H_Q$ より、 q はクラスター多様体 \mathcal{X}_Q 上で大域的に定義される関数とも思える。この関数 q は「**q-Painlevé系**」の名前にある q の正体に他ならない。

Theorem 4.3. **q-Painlevé型** の籠の変異同値類は10個あり、それらの代表元は図1のブローアップ・データで与えられる。

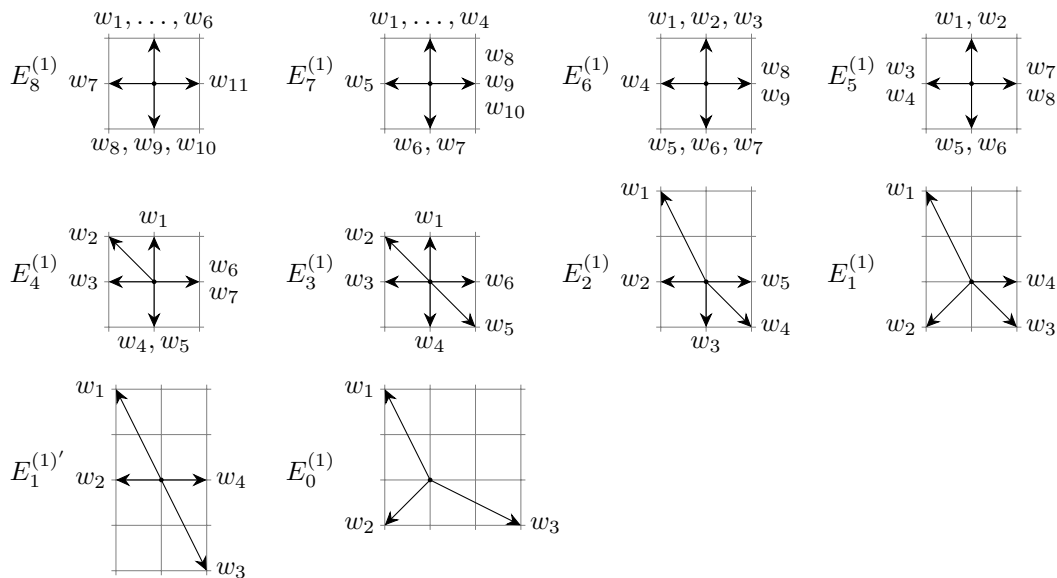


図1 q -Painlevé型のプロローアップ・データの変異同値類による分類。

定理4.3は、 q -Painlevé型のプロローアップ・データに多角形を対応させ、KasprzykとNillとPrince [11]による多角形に関する分類に帰着させることで証明される。

以下で見ると、10個の q -Painlevé型の箴の変異同値類はそれぞれ10種類の q -Painlevé系に対応する。図1でプロローアップ・データの左にある記号は、対応する q -Painlevé系の**対称型**と坂井理論において呼ばれるものである*3。坂井理論では q -Painlevé系の対称型はアフィンルート系やアフィンWeyl群の型と密接に関係している。このことは例4.5において触れる。

BershteinとGavrylenkoとMarshakov [2]は、ダイマー模型に関連して現れる8個の箴について、それらに付随するクラスターモジュラー群のクラスター多様体への作用が、それぞれ8種類の q -Painlevé系を与えることをケースバイケースの明示的な計算により示した*4。また、残りの2種類の q -Painlevéについても、それを実現するような2個の箴を類推によって与えた*5。彼らの与えた10個の箴は、図1のプロローアップ・データによって与えられる10個の箴とそれぞれ変異同値になっていることが簡単に確かめられる。したがって、彼らの明示的な計算と定理4.3を合わせることで、以下を得る。

Theorem 4.4. クラスターモジュラー群 Γ_Q のクラスター多様体 $\lambda_Q: \mathcal{X}_Q \rightarrow H_Q$ への作用は、坂井理論[14]の意味での q -Painlevé系を与える。

この記事ではこの定理のより正確な主張について述べる代わりに、 $E_7^{(1)}$ 型のプロローアップ・データの場合に限定して定理の内容について詳しく見ることにする。

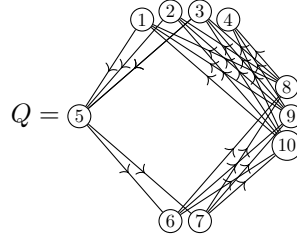
Example 4.5. $N = N^\circ = \mathbb{Z}^{10}$ として、 $w_1 = \dots = w_4 = (0, 1)$, $w_5 = (-1, 0)$, $w_6 = w_7 = (0, -1)$, $w_8 = w_9 = w_{10} = (1, 0)$ で与えられるプロローアップ・データを考える。これは図1で $E_7^{(1)}$ 型とされているもの

*3 ただし、この記事では[14]における対称型の記号より簡略化したものを用いている。

*4 q -Painlevé系とクラスター理論との関係自体は特別な場合には大久保[13]によって以前から発見されていた。

*5 この2個の箴とダイマー模型との関連はいまのところ不明だと[2]では述べられている。

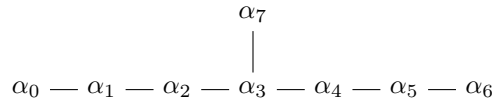
である。このブローアップ・データから得られる籠 Q は以下ようになる。



まず、これが実際に q -Painlevé 型であることを確認する。 K_Q の基底として

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= e_4 - e_3, & \alpha_1 &= e_3 - e_2, & \alpha_2 &= e_2 - e_1, & \alpha_3 &= e_1 + e_6, \\ \alpha_4 &= e_5 + e_8, & \alpha_5 &= e_9 - e_8, & \alpha_6 &= e_{10} - e_9, & \alpha_7 &= e_7 - e_6 \end{aligned}$$

というものが取れる。定理 4.2 および トーリック曲面のブローアップの交差形式の計算 (命題 3.1 および 例外曲線の自己交差数が -1 であるという事実を用いる) から、 $\alpha_i = -2$ がすべての i で成り立ち、 $\alpha_i \cdot \alpha_j$ は、グラフ



で α_i と α_j が繋がっている (resp. いない) ときに 1 (resp. 0) であることがわかる。このグラフは $E_7^{(1)}$ 型の Dynkin 図形に他ならない。よって、 K_Q 上の双線形対称形式は半正定値だが正定値でなく、 Q は q -Painlevé 型である。零ルートは

$$\begin{aligned} \delta &= \alpha_0 + 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + 2\alpha_7 \\ &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + 3e_5 + 2e_6 + 2e_7 + e_8 + e_9 + e_{10} \end{aligned}$$

で与えられる。

$E_7^{(1)}$ 型の (拡大) Weyl 群 W を、生成元 s_0, \dots, s_7, ι および関係式

$$\begin{aligned} s_i^2 &= e, & s_i s_j &= s_j s_i \quad (\text{if } \alpha_i \cdot \alpha_j = 0), & s_i s_j s_i &= s_j s_i s_j \quad (\text{if } \alpha_i \cdot \alpha_j = 1), \\ \iota^2 &= e, & \iota s_{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}} &= s_{\{6,5,4,3,2,1,0,7\}} \iota \end{aligned}$$

によって定義する。群 W は格子 K_Q に

$$s_i(\alpha_j) = \alpha_j + (\alpha_i \cdot \alpha_j)\alpha_i, \quad \iota(\alpha_{\{0,1,2,3,4,5,6,7\}}) = \alpha_{\{6,5,4,3,2,1,0,7\}} \quad (4.1)$$

によって忠実に作用する。 $W^{\text{op}} = \{w^* \mid w \in W\}$ を W の反対群とする。群準同型 $f: W^{\text{op}} \rightarrow \Gamma_Q$ が

$$\begin{aligned} s_0^* &\mapsto (3, 4), & s_1^* &\mapsto (2, 3), & s_2^* &\mapsto (1, 2), & s_3^* &\mapsto \mu_1 \circ (1, 6) \circ \mu_1, \\ s_4^* &\mapsto \mu_5 \circ (5, 8) \circ \mu_5, & s_5^* &\mapsto (8, 9), & s_6^* &\mapsto (9, 10), & s_7^* &\mapsto (6, 7), \\ \iota^* &\mapsto \mu_5 \circ -(1, 5)(2, 8)(3, 9)(4, 10) \circ \mu_5 \end{aligned}$$

によって定まる。したがって、 W^{op} はクラスター多様体 $\mathcal{X}_Q \rightarrow H_Q$ に作用する。 W^{op} の H_Q への作用は

$$f(s_i)(z^{\alpha_j}) = z^{s_i(\alpha_j)}, \quad f(\iota)(z^{\alpha_i}) = z^{-\iota(\alpha_i)}$$

で与えられ、これは W の K_Q への作用 (4.1) から誘導されるものと符号の違いを除いて一致する。より詳しく述べると、 $f(w)(z^\alpha) = z^{\text{sgn}(w)w(\alpha)}$ が任意の $w \in W$ と $\alpha \in K_Q$ で成り立つ。ここで、符号 $\text{sgn}(w)$ は $f(w)(q) = q^{\text{sgn}(w)}$ によって定まる。このことから特に f が単射であることが従う。したがって、群 W^{op} はクラスター多様体に忠実に作用する。この作用は $E_7^{(1)}$ 型の q -Painlevé 系と呼ばれる。

参考文献

- [1] Arkady Berenstein, Sergey Fomin, and Andrei Zelevinsky, **Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells**, *Duke Math. J.* **126** (2005), no. 1, 1–52.
- [2] M. Bershtein, P. Gavrylenko, and A. Marshakov, **Cluster integrable systems, q -Painlevé equations and their quantization**, *J. High Energy Phys.* (2018), no. 2, 077, front matter+33.
- [3] Sabin Cautis and Harold Williams, **Cluster theory of the coherent Satake category**, *J. Amer. Math. Soc.* **32** (2019), no. 3, 709–778.
- [4] Vladimir Fock and Alexander Goncharov, **Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory**, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (2006), no. 103, 1–211.
- [5] Vladimir V. Fock and Alexander B. Goncharov, **Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm**, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **42** (2009), no. 6, 865–930.
- [6] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky, **Cluster algebras. I. Foundations**, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), no. 2, 497–529.
- [7] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer, **Kac-Moody groups and cluster algebras**, *Adv. Math.* **228** (2011), no. 1, 329–433.
- [8] Mark Gross, Paul Hacking, and Sean Keel, **Birational geometry of cluster algebras**, *Algebr. Geom.* **2** (2015), no. 2, 137–175.
- [9] David Hernandez and Bernard Leclerc, **Cluster algebras and quantum affine algebras**, *Duke Math. J.* **154** (2010), no. 2, 265–341.
- [10] Seok-Jin Kang, Masaki Kashiwara, Myungho Kim, and Se-jin Oh, **Monoidal categorification of cluster algebras**, *J. Amer. Math. Soc.* **31** (2018), no. 2, 349–426.
- [11] Alexander Kasprzyk, Benjamin Nill, and Thomas Prince, **Minimality and mutation-equivalence of polygons**, *Forum Math. Sigma* **5** (2017), Paper No. e18, 48.
- [12] Yuma Mizuno, **q -Painlevé equations on cluster \mathcal{X} -varieties via toric geometry**, arXiv preprint arXiv:2008.11219 (2020).
- [13] Naoto Okubo, **Discrete integrable systems and cluster algebras**, *The breadth and depth of nonlinear discrete integrable systems*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B41, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2013, pp. 25–41.
- [14] Hidetaka Sakai, **Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations**, *Comm. Math. Phys.* **220** (2001), no. 1, 165–229.