

結晶格子上最速浸透モデルにおける極限図形の被覆単調性

京都大学大学院 理学研究科数学・数理解析専攻
見上 達哉 (Tatsuya MIKAMI)

概要

最速浸透モデルとは、正方格子の原点を出発点として物質が確率的な速さで隣接頂点へと浸透するときの、浸透領域の時間発展等を調べるモデルである。浸透領域に関する「大数の法則」として、規格化された浸透領域がある極限図形へと収束することが知られている。本研究ではこの結果の拡張として、一般結晶格子上モデルにおける極限図形の存在を示した。また、格子間の被覆関係について極限図形の単調性が成り立つことを示した。

1 はじめに

正方格子状に樹木の並んだ果樹園を考える。今、原点の樹木が病気にかかったとする。この病気が隣接樹木へと確率的な時間で伝染する（図1）とき、伝染病はどのように広がるだろうか？

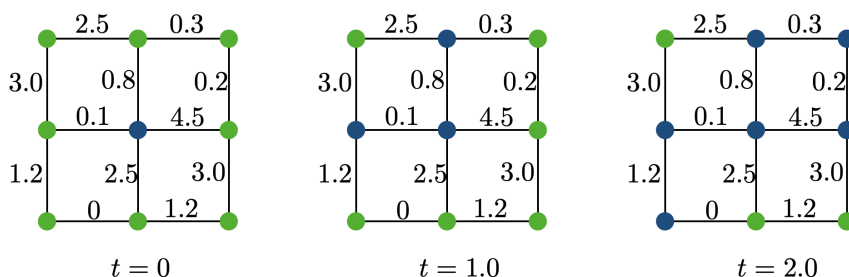


図1 時刻 t における感染樹木 (青). 各数値は隣接頂点への感染にかかる時間を表す.

このような現象をモデル化するものとして、Hammersley と Welsh [6] は**最速浸透モデル** (First Passage Percolation model / FPP モデル) を導入した。このモデルは次のように定式化される。

d 次元正方格子 $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ に対し、その辺集合 \mathbb{E}^d により添字づけられた独立同分布な非負値確率変数族 $(t_e : e \in \mathbb{E}^d)$ を与える。このとき図1のように各辺に時間が割り当てられた状態がひとつの根元事象となる。格子内の道 $\gamma = (e_1, \dots, e_n)$ に対しその上の浸透時間を $T(\gamma) = \sum t_{e_i}$ で定め、2点 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 間の最速浸透時間 $T(x, y)$ を

$$T(x, y) = \inf\{T(\gamma) : \gamma \text{ は } x' \text{ から } y' \text{ への道}\}$$

で与える。ここで $x', y' \in \mathbb{Z}^d$ はそれぞれ点 x, y に最も近い格子点であるとする。各時間 t_e の分布 ν がある条件を満たすとき、時刻 $t > 0$ における**浸透領域**

$$B(t) := \{x \in \mathbb{R}^d : T(0, x) \leq t\}$$

について「大数の法則」が成り立つことが知られている．すなわち，時間でスケール調整をした浸透領域 $B(t)/t$ がある形状 B へ収束することが示されている [3]．

ここで与えられる極限図形 B について， $d = 2$ の場合を例にとり少し観察してみよう．まず，時間分布 ν がディラック測度 δ_1 であるとき，すなわち辺の時間が常に値 1 をとる場合を考えてみる．このとき 2 頂点間の最速浸透時間 $T(x, y)$ はグラフ距離に等しく，したがって極限図形 B は L_1 ノルム $\|\cdot\|_1$ に関する単位円となる．ここで，原点から同じグラフ距離を持つ 2 点について，最短経路の個数は対角線上の点の方が多いことに着目する（例えば点 $(6, 0)$ への最短経路は 1 通りであるが，点 $(3, 3)$ への最短経路は $\binom{6}{3} = 20$ 通りある）．ここから時間分布 ν に分散を与えていくことを考える．このとき，グラフ距離の意味で最短経路を多く持つ頂点 x の方が，最速浸透時間 $T(0, x)$ がより速いものに更新されやすいことがイメージされる．これは対角線に近い方向の方が，軸付近方向と比べ，浸透速度が速くなりやすいことを意味する．したがって極限図形はディラック測度の場合に比べ，対角線方向に膨らんだ形になることが予想される（図 2）．

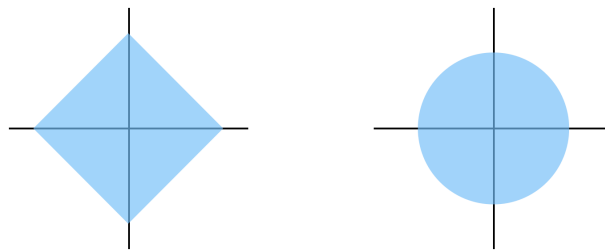


図 2 $\nu = \delta_1$ のときの極限図形（左）と， ν が分散をもつときの極限図形（右）．

論文 [1] では，次元 $d = 2$ のときの極限図形の形について数値計算を行なっている．時間分布 ν が大きな分散を持つほど，極限図形が球体，すなわちユークリッドノルム $\|\cdot\|_2$ に関する単位円に近づくという計算結果を得ている．一方，[7, Cor 8.4] では，次元 d を十分に大きくすれば極限図形が球にはなり得ないという結果も示されており，「極限図形が球体になりうるか？」という点については不明確である．

極限図形の形についてはその他不明確な点が多く，例えば以下のような問いさえ残っている．

- B はノルム $\|\cdot\|_\infty$ に関する単位円になりうるか？

直観，および数値計算 [1] の結果からはとてもこのようになるとは思えないが，証明はなされていない．最速浸透問題の詳細については文献 [2] を参照されたい．

本研究では，このような極限図形の「形」に関する問題に対しヒントを得るための一手段として，最速浸透モデルを一般の周期的グラフ上モデルとして定式化しなおす．とくに周期的グラフの「形」と極限図形との関係を調べることにより，従来の正方格子上モデルの極限図形の考察に示唆を与えることを目標とする．一般化に際しては，標準的実現の考察 [8] などに代表される「形」の知見が豊富な，離散幾何解析における結晶格子理論を援用する．詳細については教科書 [11] を参照されたい．

本発表は論文 [10] にもとづく．

2 結晶格子

教科書 [11] に則り，結晶格子に関する背景知識を述べる．

周期構造を持った格子を定式化する際，まずそのグラフ構造が周期的であることを定義する．ある連結有限グラフ X_0 上の正則被覆グラフ X で，その被覆変換群 L が階数 d の自由アーベル群になるものを d 次元結晶格子と呼ぶ．グラフの被覆射に関する一般論から，これは次のように言い換えることもできる：

- グラフ X が d 次元結晶格子であるとは，自由アーベル群 L による自由な作用 $L \curvearrowright X$ が存在し，商グラフ $X_0 := X/L$ が有限グラフとなることである．

ここで商グラフとは，群作用による辺，頂点の軌道をそれぞれ同一視して（かつ隣接関係を保つようにして）得られるグラフのことである．この商グラフ X_0 を結晶格子 X の基本有限グラフという．

例 2.1. 図 3 に示す格子はいずれも 2 次元の結晶格子である．実際，以下の矢印が表す平行移動によるグラフ作用により，下の基本有限グラフが得られる．

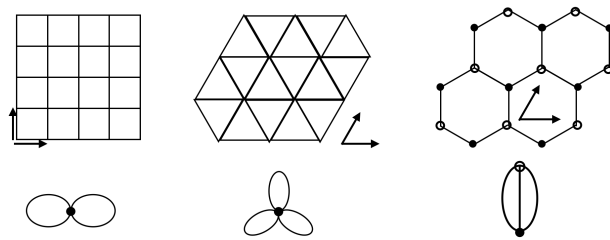


図 3 正方格子（左），三角格子（中央），およびハニカム格子（右）．

d 次元結晶格子 $X = (V, E)$ に対しその \mathbb{R}^d 内における「形」は，写像 $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ により与えられる．ここで $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ は頂点集合 V から \mathbb{R}^d への写像であり，辺はその端点を結ぶ線分として移される．写像 $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ が X の周期的実現であるとは，ある単射準同型 $\rho : L \rightarrow \mathbb{R}^d$ が存在し，次の条件を満たすことである．

- 像 $\rho(L)$ は格子群である．即ち，ある \mathbb{R}^d の基底 (a_1, \dots, a_d) が存在し，
 $\rho(L) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_d a_d : \lambda_i \in \mathbb{Z}\}$ とかける．
- 任意の $\sigma \in L, x \in V$ に対して， $\Phi(\sigma x) = \Phi(x) + \rho(x)$ ．

実現された結晶格子 $\Phi(X)$ は，格子群の元 $\tau \in \Gamma := \rho(L)$ による平行移動で重なり合う．この格子群が実現の「周期」を与えていることが分かる．

例 2.2. 図 4 に示すのはいずれもハニカム格子の周期的実現である．赤・青点はそれぞれの実現における格子群 Γ を，また矢印はその基底を表している．左と中央の実現は周期が等しいことが分かる．

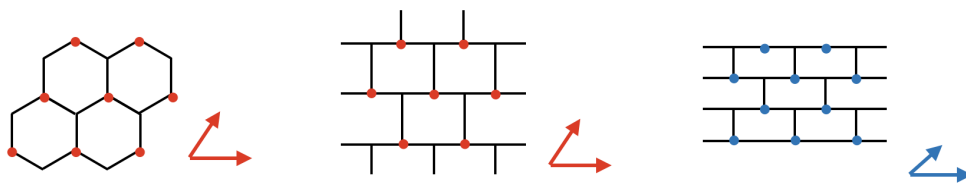


図4 ハニカム格子の周期的実現.

3 主結果 1：極限図形の存在

3.1 主定理

本研究ではまず、正方格子モデルにおける [3] の結果の拡張として、結晶格子上最速浸透モデルにおける大数の法則を得た。

$X = (V, E)$ を d 次元結晶格子とし、 (Φ, ρ) をその周期的実現とする。独立同分布な非負値確率変数族 $(t_e : e \in E)$ で各 t_e がある時間分布 ν に従うものを与える。また \mathbb{P}, \mathbb{E} でそれぞれ、この分布 ν に関する確率・期待値を表すとする。2 点 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 間の最速到達時間 $T(x, y)$ および浸透領域 $B(t) := \{x \in \mathbb{R}^d : T(0, x) \leq t\}$ を同様に定める。また記号 \mathcal{M}_X で、以下の 2 条件を満たす時間分布 ν 全体とする：

- $\mathbb{E} \min\{t_1, t_2, \dots, t_{l_X}\}^d < \infty$. ただし l_X は X の辺連結度であり、 t_1, t_2, \dots, t_{l_X} は各時間 t_e の独立なコピーである。
- $\nu(\{0\}) < p_c(X)$.

ここで記号 $p_c(X)$ はグラフ X におけるボンドパーコレーションモデルの臨界確率 [5] を表す。簡単に述べると、第二条件は「時間 0 の辺のみをたどって無限遠点まで浸透する」ことが起こらないように確率 $\nu(\{0\})$ を制御するものである。

以下は [3] の結果の、結晶格子上モデルへの拡張である。

定理 3.1. 時間分布 $\nu \in \mathcal{M}_X$ に対し、以下が成立：

- ある凸かつコンパクトな集合 $B \subset \mathbb{R}^d$ が存在し、任意の $\epsilon > 0$ に対し事象

$$\text{ある } T > 0 \text{ があって、} t > T \text{ ならば } (1 - \epsilon)B \subset \frac{B(t)}{t} \subset (1 + \epsilon)B$$

が確率 1 でおこる。

- この極限図形 B はグラフ X 、分布 ν および周期 ρ のみに依存する。

例 3.2. 図 2 において、左と中央における最速浸透モデルから得られる極限図形は等しくなる。

3.2 証明の概略

本節で定理 3.1 の証明の概略を述べる．ここでは正方格子モデルの場合と同様，*time constant* とよばれる次の極限を得ることが目標となる：

$$\mu(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(0, nx)}{n} \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

X の「原点」 $x_0 \in X$ を固定し，周期的実現 (Φ, ρ) が $\Phi(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^d$ を満たすとしてよい．また格子群 $\Gamma = \rho(L)$ の基底 (a_1, \dots, a_d) を固定する． $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ を用いて $x = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_d a_d$ と表される点 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して， $Nx \in \Gamma$ となる N をとる．このとき点 $kNx \in \mathbb{R}^d$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) は，原点 x_0 の作用 $L \curvearrowright X$ による軌道の実現先と重なり，とくにグラフ X の頂点上にある (図 5)．確率変数列 $(T(kNx, lNx) : k \leq l)$ に subadditive ergodic theorem [9] を適用し，極限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{T(0, kNx)}{kN}$$

を得る．また，任意の番号 n と $kN \leq n < (k+1)N$ となる $k = k(n)$ に対し誤差 $|T(0, nx) - T(0, kNx)|$ を評価することで収束

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(0, nx)}{n} \tag{1}$$

を得る．この $\mu(\cdot)$ を \mathbb{R}^d 上の関数へと連続拡張する． $\nu \in \mathcal{M}_X$ のとき，最速到達時間 $T(\cdot, \cdot)$ が三角不等式を満たすことなどから， μ は \mathbb{R}^d 上のノルムとなることが分かる．収束 (1) が方向 $x/\|x\|$ について一様であることを示し，ノルム μ に関する単位円

$$\mathcal{B} := \{x \in \mathbb{R}^d : \mu(x) \leq 1\}$$

への $B(t)/t$ の収束を得る．なお， $\mu(x)$ および極限図形 \mathcal{B} は，格子群 Γ 上の頂点までの最速到達時間から定まっており，したがってグラフ構造と実現の周期 ρ のみに依存する．

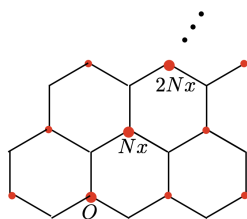


図 5 格子群 Γ (赤) と点 kNx ($k = 0, 1, 2, \dots$)．

4 主結果 2：極限図形の被覆単調性

4.1 主定理

本研究ではまた，三角格子と 3 次元正方格子のような被覆関係にある二つの結晶格子に対し，独立同分布な最速浸透モデルを考えたときの極限図形の比較を与えた．

有限グラフ X_0 上の二つの結晶格子 X, X_1 で, X_1 が X の部分被覆であるようなものを考える. 即ち, 次の可換図式を仮定する:

$$\begin{array}{ccc}
 & & X_1 \\
 & \nearrow \omega & \downarrow \omega_2 \\
 X & \xrightarrow{\omega_1} & X_0.
 \end{array} \tag{2}$$

ここで, $\omega, \omega_1, \omega_2$ はいずれも正則被覆射である. 結晶格子を定義したときと同様, 格子 X_1 を, X へのある自由な作用 $G \curvearrowright X$ を与えたときの商グラフと思っても良い.

X, X_1 の次元をそれぞれ d, d_1 ($d_1 \leq d$) とすると, それぞれの標準的実現 [11] (= 最大対称性を持つ周期的実現) $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}^d$ および $\Phi_1: X_1 \rightarrow \mathbb{R}^{d_1}$ は射影関係を持つ. 即ち, 空間 \mathbb{R}^{d_1} を \mathbb{R}^d のある部分空間と同一視することにより, 次の可換図式が成立する.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^d \\
 \omega \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow P \\
 X_1 & \xrightarrow{\Phi_1} & \mathbb{R}^{d_1}.
 \end{array} \tag{3}$$

ただし $P: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d_1}$ は直交射影である.

例 4.1. 三角格子 \mathbb{T} は 3 次元正方格子 \mathbb{L}^3 の部分被覆である. 実際, ベクトル $(-1, -1, -1)$ 方向への平行移動による作用 $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{L}^3$ による商グラフは \mathbb{T} と同型である (図 6). また三角格子 \mathbb{T} の実現は, 正方格子 \mathbb{L}^3 の実現の, 平面 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ への直交射影により与えられる.

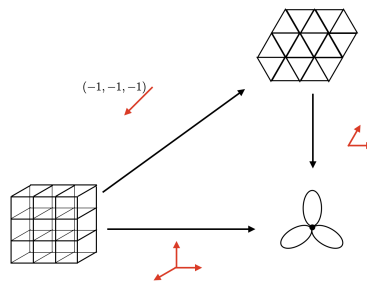


図 6 3 次元正方格子, 三角格子およびそれらの基本有限グラフ. 赤い矢印はそれぞれ作用を与える平行移動を表す.

2 つの結晶格子 $X = (V, E), X_1 = (V_1, E_1)$ の上の, 独立同分布な最速浸透モデルを考えよう. それぞれの辺集合 E, E_1 の非交差和 $E \sqcup E_1$ で添字づけられた独立同分布, 非負値確率変数族 $(t_e : e \in E \sqcup E_1)$ を与える. X, X_1 はそれぞれ空間 $\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d_1}$ へと実現されているとし, それぞれの空間における浸透時間, 浸透領域を第 3 章と同様に定める. X_1 上モデルにおける浸透時間, 浸透領域および time constant はそれぞれ $T_1, \mathcal{B}_1, \mu_1$ と表す.

以上の設定の下, 本研究では次を得た.

定理 4.2. 2 つの結晶格子 X, X_1 で X_1 が X の部分被覆であるものを考え, それらの実現が図式 (3)

を満たすとする。任意の時間分布 $\nu \in \mathcal{M}_X \cap \mathcal{M}_{X_1}$ に対し、

$$\mathcal{B}_1 \subset P(\mathcal{B}).$$

定理 4.2 により例えば、正方格子最速浸透モデルにおける極限図形のある方向への「広がり」を、別の結晶格子の極限図形で評価することができる (図 7)。

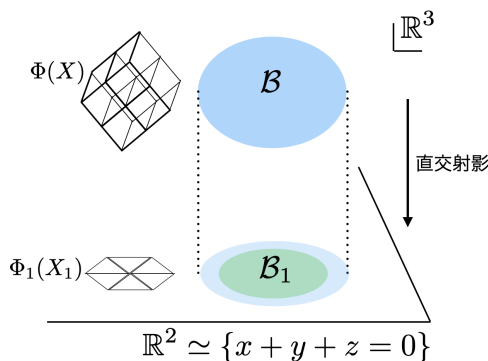


図 7 三角格子 T と 3 次元正方格子 L^3 の極限図形の関係.

4.2 証明の概略

本節で定理 4.2 の証明の概略を与える。定理 4.2 を示すにあたり、2 つの補題を用意する。 $A \subset \mathbb{R}^d$ をアフィン部分空間 (空間内の直線や平面) とする。「点から A までの最速浸透時間」 $T(0, A)$ を、 A のどこかある一点までの浸透にかかる時間で定める。すなわち、

$$T(0, A) = \inf\{T(0, y) : y \in A\}$$

である。このとき「点から面までの最速時間」の挙動は「点から点までの最速時間」の挙動と等しいことを述べたのが以下の補題である。

補題 4.3. $\nu \in \mathcal{M}_X$ とする。このとき任意のアフィン部分空間 $A \subset \mathbb{R}^d$ に対しある点 $x \in A$ が存在し、

$$\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(0, nA)}{n}.$$

補題 4.3 はよく知られた結果 [7, 命題 1.14] の結晶格子モデルへの拡張である。次の二つ目の補題が証明に際し本質的である。

格子 X の「原点」 $0 \in X$ を固定する。 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ を、 $\omega(0) \in X_1$ を出発点とした有限の長さの道とする。 $\omega : X \rightarrow X_0$ が被覆射であることから、それぞれの道のリフト $\tilde{\gamma}_i$ (すなわち制限 $\omega|_{\tilde{\gamma}_i} : \tilde{\gamma}_i \rightarrow \gamma_i$ が同型射となる X の道) で $x \in X$ を出発点とするものが一意に存在する。これらのリフト $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$ に対して次が成立する。

補題 4.4. 任意の $t \geq 0$ に対し、

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{T(\gamma_k) \geq t\}\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{T(\tilde{\gamma}_k) \geq t\}\right).$$

補題 4.4 は、以下の FKG 不等式と呼ばれる不等式から導かれる。

命題 4.5. (FKG 不等式 [4]) 単調増加な事象 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) に対し

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i). \quad (4)$$

ただし事象 A が単調増加であるとは、根元事象 $\mathbf{t} = (t_e)_{e \in E \sqcup E_1}$, $\mathbf{t}' = (t'_e)_{e \in E \sqcup E_1}$ 間の順序

$$\mathbf{t} \leq \mathbf{t}' \stackrel{\text{def}}{\iff} t_e \leq t'_e \text{ for any } e \in E \sqcup E_1$$

に関して、 $\mathbf{t} \in A$ かつ $\mathbf{t} \leq \mathbf{t}'$ ならば $\mathbf{t}' \in A$ となることである。ここで式 (4) の右辺が「各事象 A_i を独立なコピーで置き換えたときの積事象の確率」と捉えられることに注意すると、事象 A_i どうしの相関が小さくなるほど積事象の確率が下がることが観察される。以上の考察と、 X_1 内の各道 γ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) がリフトを取る操作により「ばらける」(\iff 相関が下がる) ことを合わせ、補題 4.4 が示される。

以上の 2 つの補題から、定理 4.2 が示される。

定理 4.2 の証明. X の原点 $0 \in X$ が $\Phi(0) = 0 \in \mathbb{R}^d$ となるように実現されているとして良い。点 $x_1 \in \mathcal{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^d : \mu_1(x) \leq 1\}$ で $Nx_1 \in \Gamma_1$ となるものをとる。 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ を、 $\omega(0) \in X_1$ を始点、 Nx_1 を終点とする X_1 の任意の道とする。これらのリフト $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_n$ で 0 を始点とするものをとると、補題 4.4 より、

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{T(\gamma_k) \geq t\}\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \{T(\tilde{\gamma}_k) \geq t\}\right).$$

ここから

$$\mathbb{P}(\min_k T(\gamma_k) \geq t) \geq \mathbb{P}(\min_k T(\tilde{\gamma}_k) \geq t)$$

を得る。2 点間の最速浸透時間が「2 点間のパスの上の浸透時間の最小値」であったこと、およびリフト $\tilde{\gamma}_k$ の終点が逆像 $\omega^{-1}(Nx_1)$ に含まれることから

$$\mathbb{P}(T_1(0, kNx_1) \geq t) \geq \mathbb{P}(T(0, \omega^{-1}(kNx_1)) \geq t)$$

を得る。さらに X, X_1 の実現の関係 (3) から、この右辺は

$$\mathbb{P}(T(0, kP^{-1}(Nx_1)) \geq t)$$

により下から評価される。したがって

$$\mu_1(x_1) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(0, nP^{-1}(x_1))}{n}$$

を得るが、補題 4.3 よりある点 $y \in P^{-1}(x_1)$ が存在し、(右辺) = $\mu(y)$ となる。 $\mu_1(x_1) \leq 1$ より $\mu(y) \leq 1$ ($\iff y \in \mathcal{B}$) である。以上より $\mathcal{B}_1 \subset P(\mathcal{B})$ を得る。 \square

■謝辞 本研究は、JSPS 科研費 JP19J20795 の助成を受けている。

参考文献

- [1] E. Sven Alm and D. Maria, *First passage percolation on \mathbb{Z}^2 a simulation study*, J Stat Phys **161** (2015), 657–678.
- [2] A. Auffinger, M. Damron, and J. Hanson, *50 years of first-passage percolation*, University Lecture Series, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. MR3729447
- [3] J. T. Cox and R. Durrett, *Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions*, Ann. Probab. **9** (1981), no. 4, 583–603. MR624685
- [4] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre, *Correlation inequalities on some partially ordered sets*, Comm. Math. Phys. **22** (1971), 89–103. MR309498
- [5] G. Grimmett, *Percolation*, 2nd ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 321, Springer-Verlag, Berlin, 1999. MR1707339
- [6] J. M. Hammersley and D. J. A. Welsh, *First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory*, Proc. Internat. Res. Semin., Statist. Lab., Univ. California, Berkeley, Calif., Springer-Verlag, New York, 1965, pp. 61–110. MR0198576
- [7] H. Kesten, *Aspects of first passage percolation*, École d’été de probabilités de Saint-Flour, XIV—1984, Lecture Notes in Math., vol. 1180, Springer, Berlin, 1986, pp. 125–264, DOI 10.1007/BFb0074919. MR876084
- [8] M. Kotani and T. Sunada, *Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 1, 1–20, DOI 10.1090/S0002-9947-00-02632-5. MR1783793
- [9] T. M. Liggett, *An improved subadditive ergodic theorem*, Ann. Probab. **13** (1985), no. 4, 1279–1285. MR806224
- [10] T. Mikami, *First passage percolation on crystal lattices* (2020), available at [arXiv:2009.11679](https://arxiv.org/abs/2009.11679).
- [11] T. Sunada, *Topological crystallography*, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, vol. 6, Springer, Tokyo, 2013. With a view towards discrete geometric analysis. MR3014418