

Hopf 代数から構成される Branched Spine を用いた 3 次元多様体の量子不変量について

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
Serban Matei Mihalache

概要

量子不変量は幾何的対象を組み合わせた形で表示し、その組み合わせ構造を実現する各パーツに対して代数やモノイダル圏から得られるテンソルや射を対応させることで構成される。本講演では、新しく構成したフレーミング付き 3 次元多様体の不変量を紹介する。これは Hopf 代数と、Benedetti と Petronio が定義した branched spine とそれを表示する BP 図式を用いて定義される。

1 導入

与えられた空間を調べる手段はたくさん存在するが、その中でも強力な道具の 1 つとして不変量が挙げられる。特に低次元トポロジーでは重要な役割を果たし、古くから研究されている。一方で非自明な不変量を構成するのは難しい。

しかし、80 年代の Jones 多項式と量子群の発見、さらに Witten による Chern-Simons 理論との関係により、量子不変量と呼ばれるクラスの非自明な不変量が大量に構成されるようになった。これらは次のような特徴的な構成方法をもつ。まず対象となる空間を組み合わせた形で表示し、それらの間に局所変形を定める。次に、その組み合わせ構造を実現する各パーツを代数の言葉に置き換える。こうすることで局所変形が代数上の等式に翻訳され、そして驚くべきことに適切な代数構造を用いることでこの等式が実際に成り立つ。これより、不変量が得られたことになる。

ここで用いる代数は多くの場合低次元トポロジーとは別の文脈で研究されてきたものであり、今回用いる Hopf 代数 (定義 1.) もそうである。このような、組み合わせ構造の局所変形を代数に落とし込んだときに成り立っているという事実は、幾何的対象と代数の隠された対応関係について述べており、未だによく理解されているとは言い難い。

90 年代に G. Kuperberg は $S^2 = \text{id}_H$ が成り立つ Hopf 代数に対して 3 次元多様体の位相不変量を構成し ([Ku1]), さらにフレーミングを付加構造として考えることで任意の Hopf 代数に対して不変量を構成した ([Ku2]). 量子不変量と呼ぶからには、Hopf 代数の重要な具体例である量子群を用いて不変量を構成したいというモチベーションがあるが、量子群は $S^2 = \text{id}_H$ の仮定を満たさない。そのため、不変量の $S^2 = \text{id}_H$ の仮定を外すことは本質的である。一般的に Hopf 代数を用いて量子不変量を構成する際、ribbon や modular であることを仮定するケースが多いが Kuperberg 不変量は Hopf 代数には一切の仮定が必要なく、そのためもっとも一般的な形になっていると考えられる。一方

で Kuperberg はテクニカルで難しく、多くのことは分かっていない。

Benedetti と Petronio は彼らが導入した branched spine と BP 図式を用いて、フレーミング付き 3 次元多様体を組み合わせ的に表示する方法を構成した。[BP] の中で、これを用いることで Kuperberg 不変量を組み合わせ的に再構成できるのではないかと考えた。実際に branched spine と BP 図式を用いることで任意の Hopf 代数から不変量を構成できたので、今回の講演ではそれについて述べる。特徴的な点として Hopf 代数の積分の理論を用いず、非常に簡単な形で定義できたことである。特にフレーミング付き閉 3 次元多様体に関して、この不変量は Kuperberg 不変量の再構成になっているのではないかと考えている。

2 Hopf 代数

まずは、不変量を定義するにあたって必要となる Hopf 代数とその Heisenberg ダブルについて述べる。 H を \mathbb{K} 上の有限次元ベクトル空間とする。

定義 1. $(H, M, 1, \Delta, \epsilon, S)$ が次を満たすとき H は Hopf 代数であると呼ぶ。

$$M : H \otimes H \rightarrow H \quad 1 : \mathbb{K} \rightarrow H \quad \Delta : H \rightarrow H \otimes H \quad \epsilon : H \rightarrow \mathbb{K} \quad S : H \rightarrow H$$

はそれぞれ線形写像であり、次を満たす。

$$\begin{aligned} M \circ (M \otimes \text{id}_H) &= M \circ (\text{id}_H \otimes M) & M \circ (1 \otimes \text{id}_H) &= \text{id}_H = M \circ (\text{id}_H \otimes 1) \\ (\Delta \otimes \text{id}_H) \circ \Delta &= (\text{id}_H \otimes \Delta) \circ \Delta & (\epsilon \otimes \text{id}_H) \Delta &= \text{id}_H = (\text{id}_H \otimes \epsilon) \circ \Delta \\ M \circ \Delta &= (\Delta \otimes \Delta) \circ (\text{id} \otimes \tau \otimes \text{id}) \circ (M \otimes M) \\ M \circ (S \otimes \text{id}) \circ \Delta &= 1 \circ \epsilon = M \circ (\text{id} \otimes S) \circ \Delta \end{aligned}$$

Hopf 代数の定義は最初は煩雑に見えるが、ベクトル空間の圏の中の群であるという言い方をすると自然なものになっていると納得してもらえないのではないと思う。ここで、1 行目は単位元 1 が存在し、積 M が結合律を満たしていることを主張している。2 行目も同様である。3 行目は M と Δ が独立して存在しているのではなく、互いに可換であることを述べている。4 行目は antipode と呼ばれる S の性質について述べている。Hopf 代数の antipode S は非常に大切な構造で、Hopf 代数の性質は S の性質と深く関係しており、不変量の構成でも重要な役割を果たす。

Hopf 代数を扱うときには、 M や Δ をそのまま扱うのではなく、テンソルネットワークと呼ばれる図式を用いたほうが分かりやすい。ここでは立ち入らないが、この図式を用いて議論することで、直観的な操作が行えるだけでなく、有限次元ベクトル空間の圏に十分似た圏の Hopf 対象でも同様の理論が展開できる。実際、この章の内容と不変量の構成は trivial twist を持つ pivotal 対象モノイダル圏の Hopf 対象に対しても同様に行える。

Hopf 代数に関する文献はたくさんあるが、[R] は網羅的である。

H を Hopf 代数とする。 H の H^* への作用を、 $a, x \in H$ と $f \in H^*$ に対して、

$$(a \rightharpoonup f)(x) := f(xa) \tag{1}$$

で定める。

定義 2. H の Heisenberg ダブル $\mathcal{H}(H) = H^* \otimes H$ とは \mathbb{K} -代数で, 積 $M_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}(H) \otimes \mathcal{H}(H) \rightarrow \mathcal{H}(H)$ が $f \otimes a, g \otimes b \in \mathcal{H}(H)$ に対して,

$$(f \otimes a) \cdot (g \otimes b) = f \cdot (a_{(1)} \rightarrow g) \otimes a_{(2)b},$$

単位元 $1_{\mathcal{H}}$ が $\epsilon \otimes 1$ で定義されているものである.

ここで, $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ で, 線形写像の積 $f \cdot g$ は $\Delta^*(f \otimes g)$ で定義される.

Heisenberg ダブルの重要な性質として, 5 角形関係式を満たす標準元 (canonical element) $T \in \mathcal{H}(H)^{\otimes 2}$ が存在することが挙げられる. この標準元は以下のように定義される:

$$T = \sum_i (\epsilon \otimes e_i) \otimes (e^i \otimes 1) \in \mathcal{H}(H)^{\otimes 2}$$

$$\bar{T} = \sum_i (\epsilon \otimes S(e_i)) \otimes (e^i \otimes 1) \in \mathcal{H}(H)^{\otimes 2}$$

ここで $\{e_i\}$ は H の基底, $\{e^i\}$ は双対基底, また \bar{T} は T の逆元である.

Hopf 代数の Drinfeld ダブル $\mathcal{D}(H)$ の場合, 標準元は量子 Yang-Baxter 方程式を満たし, これより結び目や 3 次元多様体の不変量が構成された [H][KR]. Kashaev([Ka]) は Hopf 代数の Heisenberg ダブルの標準元が以下の 5 角形方程式

$$T_{12}T_{13}T_{23} = T_{23}T_{12} \in \mathcal{H}(H)^{\otimes 3}.$$

を満たすことを示した. これは最後に定義する不変量の MP 変形 (図 4) の元での不変性に対応している. このような対応は [S] で示されている.

最後に不変量の構成で用いる Heisenberg ダブルの表現について説明する.

定義 3. H^* 上に $\mathcal{H}(H)$ の作用が, $f \otimes a \in \mathcal{H}(H)$ と $g \in H^*$ に対して

$$(f \otimes a) \triangleright g := f \cdot (a \rightarrow g)$$

で定まったものを Fock 空間 $F(H^*)$ と呼ぶ.

実は, $\mathcal{H}(H)$ の既約表現は Fock 空間ただ 1 つであることを示すことができる ([L], Proposition 6.1). これより, Heisenberg ダブルには Fock 空間から誘導される指標 $\chi_{Fock} : \mathcal{H}(H) \rightarrow \mathbb{K}$ が定まり, すべての指標は定数倍を除いて χ_{Fock} と同じになる.

3 BP 図式

以下, M を向き付けられた閉 3 次元多様体とする.

定義 4. M の接束 TM の自明化のホモトピー類をフレーミングと呼ぶ.

一般に多様体の接束は自明ではないが, 向き付けられた閉 3 次元多様体はそうなることが知られている [BL].

次の節でフレーミング付き閉 3 次元多様体の量子不変量を定義するために, まずはこれを組み合わせ的に表示する必要がある. Benedetti と Petronio は [BP] で branched spine を用いること

で, 実際にこの構成を与えた. Branched spine とは spine と呼ばれる多様体の 3 角形分割の双対に, branching と呼ばれる付加構造が入ったものである. 3 次元多様体の spine はよく研究されている対象であり, これを用いて量子不変量なども定義される. この spine に入った branching は, 元の 3 角形分割の言葉では各 4 面体に向きがついているものと解釈できる. Branched spine の理論について説明するのは大変なので, ここでは不変量を定義するために必要なことのみを解説する. まずは, \mathbb{Z} -BP 図式を天下りの的に定義する.

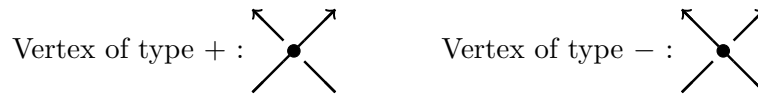


図 1

定義 5. 平面に沈め込まれた有限, 連結な 4 価グラフ Γ で以下を満たすものを \mathbb{Z} -BP 図式と呼ぶ.

- N1 すべての頂点の近傍は図 1 ののようになりか - の形になっている.
- N2 各辺は向き付けられており, その向きは頂点で一致している.
- C1 頂点を取り除いて, 対応する辺同士をつなげるとただ 1 つの単純閉曲線となる.
- C2 [BP] の Figure 1.2 で 3 価グラフに置き換えたものは連結である.
- C3 [BP] の Figure 1.3 で置き換えてできる単純閉曲線を考える. このとき連結成分の個数は元のグラフの頂点 $+1$ と等しい.
- F1 グラフの各辺には \mathbb{Z} の元が対応している.
- F2 Γ が定める branched spine P の Euler cochain c_P と F1 から構成される P chain x に対して $\delta x = c_P$ が成り立つ.

(F2 で用いた用語の定義は [BP] の 7 章を参照.)

ここで, N1, N2 と F1 の条件以外は (不変量の構成には直接関係ないため) 気にしなくてもよい. 実際, C1 から C3 の仮定を外した BP-図式は境界をもったフレーミング付き 3 次元多様体と対応しており, この場合でも同様に不変量が構成できる. \mathbb{Z} -BP 図式が与えられたとき, ここからフレーミング付きの branched spine が定まり, これによってフレーミング付きの閉 3 次元多様体が定まる. 特に, F2 の条件は 1 胞体上で定義されたフレーミングが実際に多様体全体に拡張することを保証している. 一方で, フレーミング付きの閉 3 次元多様体を与えられたとき, これを定める branched spine, BP 図式は一意的ではない. そのため結び目図式などと同様に, BP 図式の局所的な変形が定まる.

\sim_{int} を, 以下の図 2 から 4 の \mathbb{Z} -BP 図式の局所的な変形で生成される同値関係とする.

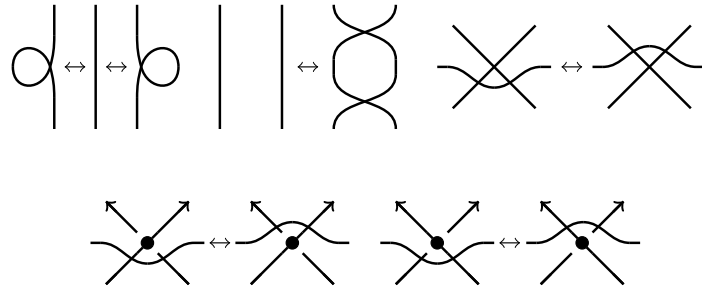


图 2

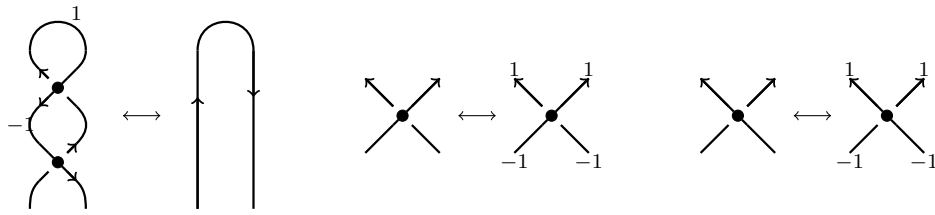


图 3

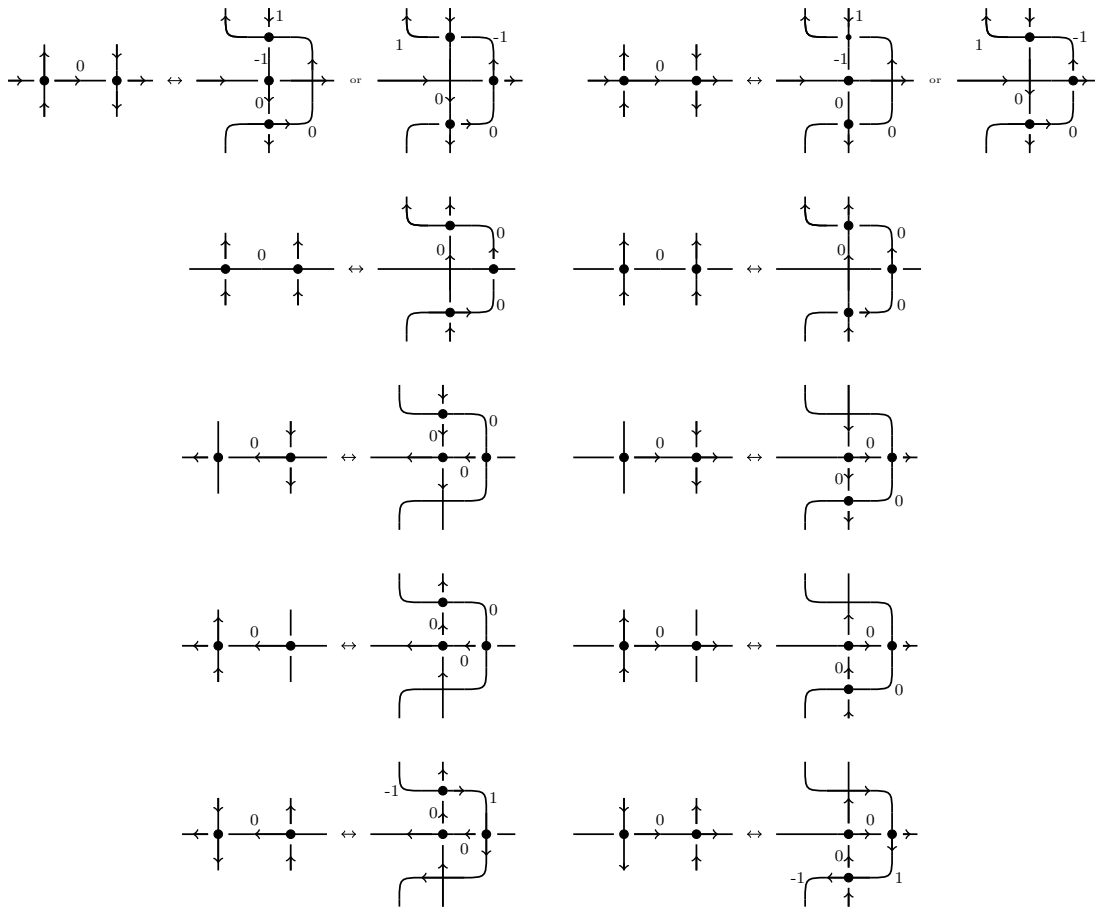


图 4 MP-moves

\mathcal{G}_{int} を \mathbb{Z} -BP 図式のイソトピー類全体の集合, \mathcal{G}_2 を \mathbb{Z} -BP 図式の各整数を \mathbb{Z}_2 に落とした図式のイソトピー類全体の集合, \sim_2 を \sim_{int} の局所的な変形の辺の各整数を \mathbb{Z}_2 に落としてできる \mathbb{Z}_2 -BP 図式の同値関係とする. このとき, 以下がフレーミング付き閉 3 次元多様体の組み合わせ的に表示を可能にする定理である.

定理 6 ([BP], Theorem 1.4.3). $\mathcal{M}_{\text{fram}}$ をフレーミング付き閉 3 次元多様体の同型類の集合とする. このとき自然な 1:1 写像が存在する.

$$\Phi : \mathcal{G}_2 / \sim_2 \rightarrow \mathcal{M}_{\text{fram}}$$

この定理が主張する組み合わせ的表示では不変量が構成出来ないので, 係数の”リフト”を考える.

定義 7. $\bar{\Phi}$ を以下の写像の合成で定義する.

$$\mathcal{G}_{\text{int}} / \sim_{\text{int}} \xrightarrow{\text{proj.}} \mathcal{G}_2 / \sim_2 \xrightarrow{\Phi} \mathcal{M}_{\text{fram}}$$

命題 8. フレーミング付き閉 3 次元多様体 M は $\text{Tor}(\mathbb{Z}_2, H^1(M)) = H^1(M)$ を満たすとする. このとき

$$\bar{\Phi}(\Gamma) = M = \bar{\Phi}(\Gamma') \Leftrightarrow \Gamma \sim_{\text{int}} \Gamma'$$

これより, コホモロジーの仮定を満たす M に関しては \mathbb{Z} -BP 図式を用いて組み合わせ的に表示できることが分かる.

4 不変量

主結果である不変量の構成について述べる.

4.1 A で彩色された図式

不変量を定義する前に, A で彩色された図式について説明しておく. A を \mathbb{K} -代数とする. A で彩色された図式とは, 向き付けられて平面にはめ込まれた閉曲線で曲線上に有限個の点に乗っていて, それぞれの点に A の元 a が対応しているものである. A で彩色された図式は平面のイソトピーと図 5 と図 6 による変形を除いて同じものとみなす. また, 曲線上の点は曲線に沿って移動させてもよい.

図 6 の元 ab は, $a, b \in A$ に対して, A に定義されている積を用いて 2 つの元の積をとったものである.

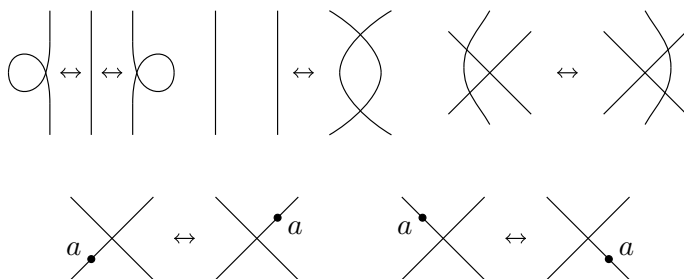


図 5

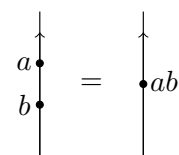


図 6

4.2 Z の定義

まず初めに、不変量の構成で用いる $\mathcal{H}(H)$ のテンソルを定義する.

定義 9. $G_{\mathcal{H}}$ を Heisenberg ダブル $\mathcal{H}(H)$ の元で、次で定義されるものである.

$$\sum_{i,j} e^i \cdot e^j \otimes S^{-1}(e_j) S^2(e_i) \in \mathcal{H}(H)$$

$G_{\mathcal{H}}$ を Heisenberg ダブルのピボタル元と呼ぶことにする. $G_{\mathcal{H}}$ の定義に現れる S^2 を S^{-2} に置き換えることで、 $G_{\mathcal{H}}$ の逆元となる. 以下で見るようにこのピボタル元を整数のついた辺に対応させることで $S^2 \neq \text{id}_H$ の障害が解消され、不変量の構成が可能になる.

不変量を定義していく. まず、2 章で定義された Heisenberg ダブルの標準元 T とその逆元 \bar{T} の定義を思い出す. これを便宜上 $T = T_1 \otimes T_2$, $\bar{T} = \bar{T}_1 \otimes \bar{T}_2$ と書く. Γ を \mathbb{Z} -BP 図式とする. まず Γ の各交点と \mathbb{Z} で色付けされた辺を以下のように置き換えることで、 $\mathcal{H}(H)$ で彩色された図式を構成する.

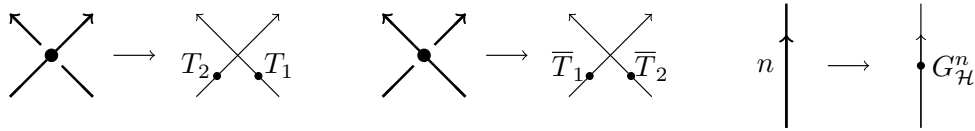


図 7

このとき、上で得られる図式を図 5 と図 6 を用いて変形することで、閉曲線 c に $\mathcal{H}(H)$ のテンソル J が対応した点に乗っていると仮定できる. 一方で図 8 からすぐに分かるように、このテンソルは共役作用を除いてしか一意にはならない. そのため、 J に対して $\chi_{Fock} : \mathcal{H}(H) \rightarrow \mathbb{K}$ を作用させることで得られる \mathbb{K} の元を考える.

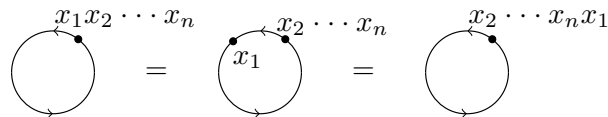


図 8

定義 10. Γ を \mathbb{Z} -BP 図式, H 有限次元 Hopf 代数とする. このとき、上の構成で得られる \mathbb{K} の元を $Z(\Gamma; \mathcal{H}(H))$ と書く.

次が主結果である.

定理 11. $Z(\Gamma; \mathcal{H}(H))$ は \mathbb{Z} -BP 図式の変形 \sim_{int} の変形の下で不変である. つまり、 $\text{Tor}(\mathbb{Z}_2, H^1(M)) = H^1(M)$ を満たすフレーミング付き閉 3 次元多様体の不変量となっている.

ここで、上で与えた構成は Heisenberg ダブルを経由せず、直接テンソルネットワークを用いて定義することも可能である.

不変量の非自明性について例えば以下が成り立つ.

命題 12. $\pi_1(M)$ を M の基本群とする. このとき

$$Z(M; \mathbb{C}[G]) = |\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)|$$

が成り立つ.

これは [Ko1][Ko2] で与えられた BP 図式を用いた基本群の表現を用いて示される. さらに, Hopf 代数の亜種である Hopf G -代数を用いることで, 基本群の表現 $\rho: \pi_1(M) \rightarrow G$ と M の組 (M, ρ) に対しても不変量を定義することができた. 特に外積代数から誘導される Hopf G -代数を用いて不変量を構成した場合, この不変量は多様体のコーミング ($\mathrm{spin}^{\mathbb{C}}$ 構造の精密化) に依存することが確認出来ており, これは $\mathrm{spin}^{\mathbb{C}}$ で精密化された Reidemeister torsion で記述されるのではないかと期待している [L1][L2].

参考文献

- [BP] R. Benedetti, C. Petronio, *Branched standard spines of 3-manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 1653. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [BL] R. Benedetti, P. Lisca, *Framing 3-manifolds with bare hands*. Enseign. Math. 64 (2018), no. 3-4, 395–413
- [H] M. Hennings, *Invariants of links and 3-manifolds obtained from Hopf algebras*. J. London Math. Soc. (2) 54 (1996), no. 3, 594624.
- [KR] L. H. Kauffman, D. E. Radford, *Invariants of 3-manifolds derived from finite-dimensional Hopf algebras*. J. Knot Theory Ramifications 4 (1995), no. 1, 131162.
- [Ka] R. M. Kashaev, *The Heisenberg double and the pentagon relation*, St. Petersburg Math. J. 8 (1997), no. 4, 585–592.
- [Ko1] Y. Koda, *O-graphic study of closed 3-manifolds*, Hakone seminar 2010, Available online at <http://hakone-seminar.com/Hakone2010.html>
- [Ko2] Y. Koda, *Spines, Heegaard splittings and the Reidemeister-Turaev torsion*, Tokyo J. Math. 30 (2007), no. 2, 417–439.
- [Ku1] G. Kuperberg, *Involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants*, Internat. J. Math. 2 (1991), no. 1, 41–66.
- [Ku2] G. Kuperberg, *Noninvolutory Hopf algebras and 3-manifold invariants*, Duke Math. J. 84 (1996), no. 1, 83–129.
- [L] J.-H. Lu, *Hopf algebroids and quantum groupoids*. Internat. J. Math. 7 (1996), no. 1, 4770.
- [L1] D. Lopez-Neumann, *Kuperberg invariants for balanced sutured 3-manifolds*. arXiv:1904.05786v2
- [L2] D. Lopez-Neumann, *Twisting Kuperberg invariants via Fox calculus and Reidemeister torsion*. arXiv:1911.02925
- [R] D. E. Radford, *Hopf algebras*, Series on Knots and Everything, 49. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012.
- [S] S. Suzuki, *The universal quantum invariant and colored ideal triangulations*, Algebr. Geom. Topol. 18 (2018), no. 6, 3363–3402.