完全多部グラフのエッジ環の conic 因子的イデアルと非可換クレパント特異点解消の構成

大阪大学大学院 情報科学研究科 情報基礎数学専攻
松下光虹 (Koji MATSUSHITA)

概要

あるトーリック環の非可換特異点解消 (NCR) を構成するという点において, conic 因子的イデアルを調べることは基本的な課題であり, Gorenstein トーリック環について, 非可換クレパント特異点解消 (NCCR) が存在するか, というのは重要な問題である. この講演では, 完全多部グラフから作られるエッジ環について, その因子類群及び, conic 因子的イデアルの決定と, エッジ環が Gorenstein になる場合の NCCR の構成などについて紹介する.

本講演の内容は東谷章弘氏 (大阪大学) との共同研究 [4] に基づく.

以下, $\mathbb{K}$ は体とし, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $[n] := \{1, \dots, n\}$ とする.

1 導入

R を正規 Cohen-Macaulay 整域，M を 0 でない反射的 R 加群とする．$\mathrm{End}_R(M)$ が有限な大域次元を持つとき，それを**非可換特異点解消 (NCR)** という．さらに，R が Gorenstein 環であるとして，$\mathrm{End}_R(M)$ が NCR で，極大 Cohen-Macaulay(MCM)R 加群であるとき，それを**非可換クレパント特異点解消 (NCCR)** という．R がトーリック環で NCCR を持つならば，R は Gorenstein でなければならないことが知られている ([2])．NCR は, 例えば [1] など, 表現論の文脈でもしばしば現れ, Van den Bergh([9]) によって導入された NCCR は, 通常のクレパント特異点解消と深い関わりを持ち, 代数幾何学などの様々な分野で応用されている重要な対象である. そして, これらの構成に, 次に導入するトーリック環の conic 因子的イデアルが非常に良い役割を担う.

$\mathcal{V} := \{v_1, \dots, v_s\} \subset \mathbb{Z}^d$ とし, $\mathrm{Cone}(\mathcal{V}) := \sum_{i\in[s]} \mathbb{R}_{\geq 0} v_i$ は正規強凸多面錐であるとする. つまり, $\mathrm{Cone}(\mathcal{V}) \cap (-\mathrm{Cone}(\mathcal{V})) = \{0\}$ を満たすとする. また, $\mathrm{Cone}(\mathcal{V})^\vee := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, v_i\rangle \geq 0\ (\forall i \in [s])\}$ ($\langle -, -\rangle$ は標準内積) とする. このとき, $R = \mathbb{K}[\mathrm{Cone}(\mathcal{V})^\vee \cap \mathbb{Z}^d] := \mathbb{K}[\mathbf{t}^x | x \in \mathrm{Cone}(\mathcal{V})^\vee \cap \mathbb{Z}^d] \subset \mathbb{K}[t_1^{\pm}, \dots, t_d^{\pm}]$ はトーリック環で, 正規 Cohen-Macaulay 整域である. また, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{R}^s$ に対し, $\{\mathbf{t}^x \mid x \in \mathbb{Z}^d, \langle x, v_i\rangle \geq a_i\ (\forall i \in [s])\}$ で生成される R 加群 $R_{\mathbf{a}}$ を**因子的イデアル**[*1] といい, 特に, ある $c \in \mathbb{R}^d$ があって, $a_i = \langle c, v_i\rangle$ $(\forall i \in [s])$ を満たす. つまり, $R_{\mathbf{a}} = \mathbb{K}[(\mathrm{Cone}(\mathcal{V})^\vee + c) \cap \mathbb{Z}^d]$

[*1] 一般に, $I = I^{-1}$ なる分数イデアル I を因子的イデアルというが, このトーリック環の因子的イデアルはすべて, 今回与えた形になる.

となるような因子的イデアルを **conic 因子的イデアル**という．また, 十分大きい n に対し, R 加群 $R^{\frac{1}{n}}$ を, $R^{\frac{1}{n}} := \mathbb{K}[\mathrm{Cone}(\mathcal{V})^\vee \cap (\frac{1}{n}\mathbb{Z}^d)]$ で定める．このとき, 次が知られている．

- conic 因子的イデアルはランク 1 の MCMR 加群である．
- $R^{\frac{1}{n}}$ の直和因子は conic 因子的イデアルであり，すべての conic 因子的イデアル (の同型類) が現れる．
- $\mathrm{End}_R(R^{\frac{1}{n}})$ は NCR である．
- $\mathrm{End}_R(R^{\frac{1}{n}})$ が NCCR である．$\Leftrightarrow$ $v_1, \ldots, v_s$ が線型独立．

以上の事実から分かるように, 一般に，トーリック環 R の NCR は，すべての conic 因子的イデアルの直和によって構成できるが，多くの場合，そのままでは NCCR にはならず, NCCR の存在とその構成は, 一般のトーリック環では知られていない．しかし，いくつかの conic 因子的イデアルを用いて NCCR を構成できることがある．例えば [5] において，半順序集合に付随する $\mathbb{K}$ 代数である日比環における conic 因子的イデアルを，半順序集合の言葉で完全に記述し，その応用として，多項式環の Segre 積 (これは日比環の一種) の NCCR を構成することに成功している．また [6] において，日比環の因子類群が $\mathbb{Z}^2$ の場合で NCCR が構成されている．

本研究では, これらの事実に倣い, 次に定義する完全多部グラフのエッジ環で, 同様に NCCR を構成することができるか, という問題に取り組んだ.

2　完全多部グラフのエッジ環

以下, グラフ G は有限単純グラフ, つまり, 頂点集合 $V(G) = [d]$ $(d := |V(G)|)$, 辺集合 $E(G)$ がそれぞれ有限集合であり, ループ, 多重辺を持たないもののみを考える．また, $\rho : E(G) \to \mathbb{R}^d$ を $\rho(\{i,j\}) = e_i + e_j$ (e_i は i 番目の標準基底) で定め, $K_{r_1,\ldots,r_n}$ を, $V(K_{r_1,\ldots,r_n}) = \bigsqcup_{i\in[n]} V_i = [d]$ $(r_i := |V_i|,\ 1 \le r_1 \le \cdots \le r_n)$ とする完全多部グラフとする.

$$\mathbb{K}[G] := \mathbb{K}[t_it_j \mid \{i,j\} \in E(G)] \subset \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_d],\ P_G := \mathrm{conv}(\rho(\{i,j\}) \mid \{i,j\} \in E(G)) \subset \mathbb{R}^d$$

をそれぞれ, グラフ G の**エッジ環**[*2], グラフ G の**辺凸多面体**という．特に, エッジ環に関して, 以下の事実が知られている．

- $\mathbb{K}[G]$ は正規整域. $\Leftrightarrow$ G は奇サイクル条件[*3]を満たす.
  特に, $\mathbb{K}[K_{r_1,\ldots,r_n}]$ は正規 Cohen-Macaulay 整域 ([7], [8]).
- $\mathbb{K}[K_{r_1,\ldots,r_n}]$ が Gorenstein 環になるのは, $\mathbb{K}[K_{1,n}]$ $(n \ge 1)$, $\mathbb{K}[K_{n,n}]$ $(n \ge 2)$, $\mathbb{K}[K_{n,m,l}]$ $(1 \le n \le m \le l \le 2)$, $\mathbb{K}[K_{1,1,1,1}]$ のときに限る ([3]).
- 特に, $\mathbb{K}[K_{1,n}]$ $(n \ge 1)$, $\mathbb{K}[K_{n,n}]$ $(n \ge 2)$, $\mathbb{K}[K_{1,n,m}]$ $(1 \le n \le m \le 2)$ は, ある日比環と同型であり, これらは NCCR を持つ ([6]).

一般にエッジ環は, 上記のような正規強凸多面錐から定まるトーリック環ではないが, 完全多部グ

[*2] 完全二部グラフ $K_{n,m}$ のエッジ環は, その定義から, n 変数多項式環, m 変数多項式環の Segre 積と同型となり, 上記にあるように, conic 因子的イデアルを決定と NCCR の構成は既知である．完全多部グラフのエッジ環で同様なことを考えることは, そういう意味での一般化と思える.

[*3] 弦を持たないどの 2 つの奇サイクルも頂点を共有しているか, その 2 つの間に道があるとき, グラフ G は奇サイクル条件を満たすという.

ラフのエッジ環の場合, それは正規整域なので, ある正規強凸多面錐から定まるトーリック環と同型になる (具体的な変換は後述する), ということに注意する. 今の段階で, NCCR を持つかどうかが未知なものは,$\mathbb{K}[K_{2,2,2}], \mathbb{K}[K_{1,1,1,1}]$ である. これを決定するために, 我々が示すべきことは,

- 完全多部グラフのエッジ環の因子類群 $\mathrm{Cl}(\mathbb{K}[K_{r_1,\dots,r_n}])$ を決定する.
- 因子類群の元のうち, conic 因子的イデアルに対応するものを決定する.
- conic 因子的イデアルのいくつかを用いて, $\mathbb{K}[K_{2,2,2}], \mathbb{K}[K_{1,1,1,1}]$ の NCCR を構成する.

となる.

3 主結果

定理 1 $\mathbb{K}[K_{r_1,\dots,r_n}]$ の因子類群 $\mathrm{Cl}(\mathbb{K}[K_{r_1,\dots,r_n}])$ は torsionfree となり, $n = 3$, $r_1 \geq 2$ または, $n \geq 4$ ならば,

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{K}[K_{r_1,\dots,r_n}]) \cong \mathbb{Z}^n.$$

注意 2 上記の定理で触れられていない, $\mathbb{K}[K_{m,n}], \mathbb{K}[K_{1,m,n}]$ は, 先に述べたように適当な日比環と同型であり, 日比環の因子類群は既に知られている. 実際, 次で与えられる.

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{K}[K_{n,m}]) \cong \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{if } n \geq 2. \end{cases} \quad \mathrm{Cl}(\mathbb{K}[K_{1,n,m}]) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } n = 1, \\ \mathbb{Z}^2 & \text{if } n \geq 2. \end{cases}$$

この定理は, 次の 2 つの補題から従う.

補題 3 $\Psi_r := \{e_i \in \mathbb{R}^d \mid i \in [d]\}$, $\Psi_f := \{\frac{1}{2}(\sum_{i \in V(K_{r_1,\dots,r_n}) \setminus V_k} e_i - \sum_{j \in V_k} e_j) \mid k \in [n]\}$, $\Psi := \Psi_r \cup \Psi_f$ とし, $l \in \Psi$ に対し, $H_l := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, l \rangle = 0\}$ とする.

このとき, $P_{K_{r_1,\dots,r_n}}$ の facet 全体と $\{P_{K_{r_1,\dots,r_n}} \cap H_l \mid l \in \Psi\}$ が一致し, 既約表示である.

Ψ_r, Ψ_f はそれぞれ, 完全多部グラフの頂点が "regular"である, 頂点の独立集合が "fundamental"である, という事実から出てくる. 詳しくは [7] を参照されたい. この Ψ は次の補題でも用いるが, conic 因子的イデアルの決定にも用いる.

補題 4 (cf. [10, Theorem 9.8.19]). $\alpha \in P_{K_{r_1,\dots,r_n}} \cap \mathbb{Z}^d = \{\rho(\{i,j\}) \mid \{i,j\} \in E(K_{r_1,\dots,r_n})\}$ に対し, $\mathbf{e}_l$ $(l \in \Psi)$ を自由基底とする自由アーベル群 $\bigoplus_{l \in \Psi} \mathbb{Z}\mathbf{e}_l$ の元, w_α を $w_\alpha := \sum_{l \in \Psi} \langle l, \alpha \rangle \mathbf{e}_l$ とし, M を各 w_α $(\alpha \in P_{K_{r_1,\dots,r_n}} \cap \mathbb{Z}^d)$ を行とする行列とする. このとき,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}(\mathbb{K}[K_{r_1,\dots,r_n}]) &\cong \bigoplus_{l\in\Psi}\mathbb{Z}\mathbf{e}_l \ / \sum_{\alpha\in P_{K_{r_1,\dots,r_n}}\cap\mathbb{Z}^d}\mathbb{Z}w_\alpha \\ &\cong \mathbb{Z}^t\oplus\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

ここで, $t=|\Psi|-\mathrm{rank}\ M,\ d_1,\dots,d_s$ は M を Smith normal form にした時の対角成分.

例 5　$K_{1,1,1,1}$ (つまり, 完全グラフ K_4) のエッジ環の因子類群を求める.

$E(K_4)=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}.$

$$\begin{aligned}\Psi=\Psi_r\cup\Psi_f=\{&(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),\\ &\tfrac{1}{2}(-1,1,1,1),\tfrac{1}{2}(1,-1,1,1),\tfrac{1}{2}(1,1,-1,1),\tfrac{1}{2}(1,1,1,-1)\}.\end{aligned}$$

$\alpha:=\rho(\{1,2\})=(1,1,0,0)$ に対応する w_α を, 上記の Ψ の順で内積を取り, 成分表示すると,

$$w_\alpha=(1,1,0,0,0,0,1,1)$$

を得る. これに続けて, α として, $\rho(\{1,3\}),\rho(\{1,4\}),\rho(\{2,3\}),\rho(\{2,4\}),\rho(\{3,4\})$ の順で, w_α を成分表示したものを行とする行列を考えると, 次の M になり, それを Smith normal form にすると,

$$M=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&1&0&1&0\\0&0&1&1&1&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

を得る. $t=|\Psi|-\mathrm{rank}\,M=4,\ d_1=\cdots=d_4=1$ より, 補題 4 から, $\mathrm{Cl}(\mathbb{K}[K_4])\cong\mathbb{Z}^4$ となる.

次に conic 因子的イデアルを決定するが, そのために, $\mathbb{K}[K_{r_1,\dots,r_n}]$ を正規強凸多面錐から定まるトーリック環に変換する. 具体的には $\pi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d-1},\ (x_1,\dots,x_d)\mapsto(x_1,\dots,x_{d-1})$ とし, $C_{K_{r_1,\dots,r_n}}:=\{(\pi(\alpha),1)\mid\alpha\in P_{K_{r_1,\dots,r_n}}\}$ とする. このとき, $e_d\mapsto 2e_d-e_1-\cdots-e_{d-1}$ という変換による Ψ の像を Ψ' とすると, Ψ' は $C_{K_{r_1,\dots,r_n}}$ の facet を定め,

$$\mathbb{K}[K_{r_1,\dots,r_n}]\cong\mathbb{K}[\mathrm{Cone}(\Psi')^\vee\cap\mathbb{Z}^d]$$

を得る. conic 因子的イデアルに関して, 以下の事実が分かる.

- $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^s$ に対し, $R_{\mathbf{a}}=R_{\lceil\mathbf{a}\rceil}$. ただし, $\lceil\mathbf{a}\rceil:=(\lceil a_1\rceil,\dots,\lceil a_s\rceil)$.
- $\mathbf{a},\mathbf{a}'\in\mathbb{R}^s$ に対し, $R_{\mathbf{a}}\cong R_{\mathbf{a}'}\ \Leftrightarrow\ \exists c\in\mathbb{Z}^d,\ \lceil\mathbf{a}\rceil=\lceil\mathbf{a}'\rceil+\sigma(c)$.
  ただし, $\sigma(c):=(\langle v_1,c\rangle,\dots,\langle v_s,c\rangle)$.
- conic 因子的イデアル $R_{\mathbf{a}}$ は, ある $c'\in(-1,0]^d$ があって, $R_{\mathbf{a}}\cong R_{\sigma(c')}$ となる.

これによって, conic 因子的イデアルの同型類は $\lceil\sigma((-1,0]^d)\rceil$ の値で分類できる.

以下, $n=3$, $r_1\geq 2$ または, $n\geq 4$ を仮定する.

定理 6　任意の conic 因子的イデアルは, $C(r_1,\dots,r_n)$ の元に対応させることができる. また, この対応の下で, $n=3,4$ ならば, 任意の $C(r_1,\dots,r_n)$ に属する元に対応する因子的イデアルは, conic 因子的イデアルである. ここで,

$$\begin{aligned}C(r_1,\dots,r_n):=\Big\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{Z}^n\Big|\ &-r_j\leq\ z_i-z_j\ \leq r_i\ \ (i,j\in[n]),\\ -\sum_{i\in[n-1]\setminus I}r_i-\sum_{j\in J}r_j-|J|+1+\chi_n(J)\leq\ &\sum_{i\in I}z_i-\sum_{j\in J}z_j\ \leq|J|+1-\chi_n(J)\\ &I\subset[n-1],\ J\subset[n],\ |I|=|J|+1,\ I\cap J=\emptyset\Big\}.\end{aligned}$$

ただし, $\chi_n(J):=\begin{cases}1 & \text{if } n\in J,\\ 0 & \text{if } n\notin J.\end{cases}$ であり, J は $J=\emptyset$ を許す多重集合.

注意 7　conic 因子的イデアルへの対応のさせ方は一意ではないので, 上の定理の $C(r_1,\dots,r_n)$ は conic 因子的イデアルの表示の 1 つであるが, どの表示も互いに全単射が存在する. また, 上記の定理において, $n\geq 5$ のとき, 任意の $C(r_1,\dots,r_n)$ に属する元に対応する因子的イデアルは, conic 因子的イデアルであるかどうかは, 未解決である.

例 8　$C(r_1,r_2,r_3), C(r_1,r_2,r_3,r_4)$ に現れる不等式を表記すると, 次のようになる.

- $C(r_1,r_2,r_3)$

$$\begin{aligned}-r_j\leq&\quad z_i-z_j\quad\leq r_i\quad(i,j\in[3]).\\ -r_j+1\leq&\quad\ \ z_i\quad\ \ \leq 1\quad(\{i,j\}=[2]).\\ -r_3+1\leq&\ \ z_1+z_2-z_3\ \ \leq 1.\end{aligned}$$

- $C(r_1,r_2,r_3,r_4)$

$$\begin{aligned}-r_j\leq&\quad z_i-z_j\quad\leq r_i\quad(i,j\in[4]).\\ -r_i-r_j+1\leq&\quad\ \ z_k\quad\ \ \leq 1\quad(\{i,j,k\}=[3]).\\ -2r_k\leq&\ \ z_i+z_j-z_k\ \ \leq 2\quad(\{i,j,k\}=[3]).\\ -r_k-r_4+1\leq&\ \ z_i+z_j-z_4\ \ \leq 1\quad(\{i,j,k\}=[3]).\\ -2r_4\leq&\ \ z_1+z_2+z_3-2z_4\ \ \leq 2.\end{aligned}$$

このことから, 特に,

$$\begin{aligned}C(2,2,2)=&\{\pm(1,1,a)\mid a=1,2,3\}\cup\{\pm(1,0,a),\pm(0,1,a)\mid a=0,1,2\}\cup\\ &\{\pm(1,-1,a),(0,0,a)\mid a=-1,0,1\},\end{aligned}$$

$$C(1,1,1,1)=\{\pm(1,1,1,2)\}\cup\{\pm(a,1)\mid a\in\{0,1\}^3\}\cup\{\pm(1,0,0,0),\pm(0,1,0,0),\pm(0,0,1,0),(0,0,0,0)\}$$

が分かる.

$\chi \in \mathbb{Z}^n \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{K}[K_{r_1,\ldots,r_n}])$ に対応する conic 因子的イデアルを M_χ とおき, 有限集合 $L \subset \mathbb{Z}^n$ に対し, $M_L := \bigoplus_{\chi \in L} M_\chi$ とおく.

次の定理が, 今回の主題の 1 つである NCCR の構成に関する定理だが, ここでは結果を述べるにとどめておく. 詳しくは [4] を参照されたい.

定理 9

- $R = \mathbb{K}[K_{2,2,2}]$ のとき,
  $L := \{(0,0,-1),(0,0,0),(1,0,0),(1,-1,0),(1,0,1),(0,-1,-1),(1,-1,-1),(0,-1,-2)\}$.

- $R = \mathbb{K}[K_{1,1,1,1}]$ のとき,
  $L := \{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(1,0,0,1),(1,1,0,1),(1,1,1,2)\}$.

このとき, $\mathrm{End}_R(M_L)$ が NCCR となる.

参考文献

[1] M. Auslander, "Representation Dimension of Artin Algebras", Lecture Notes. Queen Mary College, London (1971).

[2] H. Dao, O. Iyama, R. Takahashi and M. Wemyss, Gorenstein modifications and $\mathbb{Q}$-Gorenstein rings, *J. Algebraic Geom.* **29** (2020), 729–751.

[3] E. De Negri and T. Hibi, Gorenstein algebras of Veronese type, *J. Algebra* **193** (1997), 629–639.

[4] A. Higashitani and K. Matsushita, Conic divisorial ideals and non-commutative crepant resolutions of edge rings of complete multipartite graphs, arXiv:2011.07714.

[5] A. Higashitani and Y. Nakajima, Conic divisorial ideals of Hibi rings and their applications to non-commutative crepant resolutions, *Selecta Math.* **25** (2019), 25pp.

[6] Y. Nakajima, Non-commutative crepant resolutions of Hibi rings with small class groups, *J. Pure Appl. Algebra* **223** (2019), 3461–3484.

[7] H. Ohsugi and T. Hibi, Normal polytopes arising from finite graphs, *J. Algebra* **207** (1998), 409–426.

[8] H. Ohsugi and T. Hibi, Compressed polytopes, initial ideals and complete multipartite graphs, *Illinois J. Math.* **44**, No. 2 (2000), 391–406.

[9] M. Van den Bergh, Non-Commutative Crepant Resolutions, The Legacy of Niels Henrik Abel, pp. 749–770. Springer, Berlin (2004).

[10] R. H. Villarreal, "Monomial algebras", Monographs and Research Notes in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.