同相群のゲージ群拡大と特性類

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科
丸山修平 (Shuhei MARUYAMA)

概要

一次コホモロジーが自明な位相空間 X の二次コホモロジー類をひとつ固定する．このとき, 以下のようにしてふたつのコホモロジー類が得られる．(1)X をファイバーに持つファイバー束のスペクトル系列の転入として得られる (普遍) 特性類．(2) 固定したコホモロジー類から定まる, X の同相群のアーベル群拡大に対応する群コホモロジー類．本講演では, これらふたつのコホモロジー類の関係について紹介する．

1 導入

実ベクトル束のオイラー類や複素ベクトル束のチャーン類などに代表されるように, ベクトル束には特性類と呼ばれる不変量がある．一般に, バンドル写像に関する自然性を持つコホモロジー類のことをベクトル束の特性類と呼ぶ．ここでベクトル束をファイバー束に置き換えることで, ファイバー束の特性類も同様に (自然性でもって) 定義される．また普遍束と自然性を用いれば, 特性類は構造群の分類空間のコホモロジー類として定義することもできる．

ベクトル束はその構造群が有限次元線形リー群 (実ベクトル束なら $GL(n,\mathbb{R})$, 複素ベクトル束なら $GL(n,\mathbb{C})$) であり, 既に特性類の理論は成熟している．ファイバー束の場合, 構造群がファイバーの変換群, とくに同相群や微分同相群 (無限次元リー群) となることから, 一般のファイバー束の特性類の理論に関しては未発達の部分も多い．

ファイバー束には平坦と呼ばれる性質がある．ファイバー束が平坦であるとは, その構造群が離散群に縮小するときをいう．別の言い方をすると, 平坦なファイバー束とは, その変換関数として局所定数関数を取ることのできるファイバー束のことである．平坦なファイバー束の分類空間は, 構造群が離散群に縮小することから, 離散群の分類空間である．したがって平坦束の特性類は離散群の分類空間のコホモロジー類として与えられる．また離散群の分類空間のコホモロジーは, 代数的に定義される群コホモロジーと同型となることが知られている．つまり平坦なファイバー束に関しては, その特性類を, 位相空間のコホモロジー類として「幾何的」に, さらに構造群の群コホモロジー類として「代数的」にも調べることができる．

今回の講演では上記のような観点から, 平坦束の特性類として幾何由来のもの, 代数由来のものをそれぞれ構成し, さらにその両者の関係について述べる．

注意 1.1. ファイバーが曲面のファイバー束を曲面束という．今回の講演では述べないが, 曲面の特殊性に由来して, 曲面束の特性類も (平坦という仮定なしに) 上述の意味で幾何的, 及び代数的に調べ

ることができる.

2　群コホモロジー

この章では群コホモロジーの定義及びその基本性質について, 今回の講演で用いるものに限定して紹介する. 群コホモロジーに関する標準的な教科書として [2] を挙げておく.

G を群とし, A を (right)G-module とする. このとき, G^p から A への写像のことを群 G の A 係数の群 p コチェインといい, p コチェイン全体のなすコチェイン群を $C^p_{\mathrm{grp}}(G;A)$ で表す. コバウンダリ作用素 $\delta : C^p_{\mathrm{grp}}(G;A) \to C^{p+1}_{\mathrm{grp}}(G;A)$ を

$$\begin{aligned}\delta c(g_1,\ldots,g_{p+1}) = c(g_2,\ldots,g_{p+1}) &+ \sum_{i=1}^{p}(-1)^i c(g_1,\ldots,g_i g_{i+1},\cdots,\gamma_{p+1}) \\ &+ (-1)^{p+1}c(g_1,\ldots,g_p)g_{p+1}\end{aligned}$$

で定める ($p=0$ のときは $\delta=0$ で定める). このとき $\delta\circ\delta=0$ が単純計算で分かり, $(C^*_{\mathrm{grp}}(G;A),\delta)$ はコチェイン複体をなす. このコチェイン複体のコホモロジーを G の A 係数の群コホモロジーといい, $H^*_{\mathrm{grp}}(G;A)$ で表す.

群 G に離散位相を入れた位相群を G^δ で表す. 群コホモロジーは幾何的には離散群 G^δ の分類空間 BG^δ の特異コホモロジーとみなすことができる. つまり, A を用いて BG^δ 上に定まる局所系を $\mathcal{A}$ で表すことにすると, 自然な同型

$$H^*_{\mathrm{grp}}(G;A) \cong H^*(BG^\delta;\mathcal{A})$$

が存在する. A として自明な G-module $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{R}$ などを考えると, 上の同型から平坦束の特性類が群コホモロジーとして与えられることが分かる.

低次の群コホモロジーには代数的にわかりやすい解釈が知られている. まず 0 次群コホモロジー $H^0_{\mathrm{grp}}(G;A)$ は, 定義から直ちに, A の G-不変部分と同型となる. 1 次群コホモロジー $H^1_{\mathrm{grp}}(G;A)$ は G から A への crossed homomorphism と呼ばれる写像全体と一致する. ここで写像 $c: G\to A$ が crossed homomorphism であるとは任意の $g,h\in G$ に対し

$$c(gh) = c(g)h + c(h)$$

が成り立つときをいう. とくに A が自明な G-module のときには, crossed homomorphism とは単に準同型のことである. 2 次群コホモロジー $H^2_{\mathrm{grp}}(G;A)$ は, 群 G の A 拡大の同値類全体と一致する. ここで群 G の A 拡大とは完全列

$$0\to A\to\Gamma\to G\to 1$$

のことであり, ふたつの A 拡大が同値であるとは可換図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma_1 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & \Gamma_2 \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

が存在するときをいう. つまり群 G の A 拡大をひとつ与えれば, そこから対応する 2 次群コホモロジーが得られる.

3　コホモロジー類の構成

位相空間 X で, 整数係数 1 次コホモロジーが自明であり, 2 次コホモロジーが非自明なものを考える．また, X の非自明な整数係数 2 次コホモロジー類 c をひとつ固定する．この設定の下で, X の同相群の連結部分群に関するコホモロジー類の構成をふたつ紹介する (詳しくは [4] を参照のこと).

3.1　ファイバーが X のファイバー束の特性類

ファイバーが X のファイバー束 $E \to B$ で, 構造群が $G = \mathrm{Homeo}(X)_0$ に縮小するものを考える．ここで G は, X の同相群 $\mathrm{Homeo}(X)$ のコンパクト開位相に関する連結成分のなす部分群である．この, 構造群が G に縮小するファイバー束を G 束という．

このファイバー束 $E \to B$ に関する Serre スペクトル系列を $E_r^{p,q}$ で表す．このとき $H^1(X;\mathbb{Z})$ が自明という仮定から, スペクトル系列の微分写像を用いることで写像

$$d_3^{0,2} : H^2(X;\mathbb{Z}) = E_3^{0,2} \to E_3^{3,0} = H^3(X;\mathbb{Z})$$

が得られる．整数係数 2 次コホモロジー類 $c \in H^2(X;\mathbb{Z})$ をこの微分写像で送ることで, 底空間 B の 3 次コホモロジー類 $d_3^{0,2}c \in H^3(B;\mathbb{Z})$ が得られる．

定義 3.1. コホモロジー類 $D_c(E) \in H^3(B;\mathbb{Z})$ を $D_c(E) = -d_3^{0,2}c$ で定義する．

Serre スペクトル系列の自然性がコホモロジー類 $D_c(E)$ の自然性を誘導するので, このコホモロジー類 $D_c(E)$ は G 束の特性類となる．とくに, Borel construction で得られる G 束

$$EG \times_G X \to BG$$

におけるコホモロジー類 $D_c(EG \times_G X) \in H^3(BG;\mathbb{Z})$ が普遍特性類を与える．この普遍特性類を単に D_c で表す．

注意 3.2. スペクトル系列を用いた特性類の構成はよく知られているものであり, 例えば球面束のオイラー類などもスペクトル系列を用いて定義することができる．詳しくは [1] を参照のこと．

3.2　ゲージ群拡大から定まる群コホモロジー類

コホモロジー類 c を 1 次 Chern 類にもつ主 S^1 束 $P \to X$ を考える．P の bundle automorphism 全体のなす群を $\mathrm{Aut}(P)$ で表す．このとき自然な射影 $p : \mathrm{Aut}(P) \to \mathrm{Homeo}(X)$ が存在するが, チャーン類の自然性より, この射影は P の Chern 類を保つ同相群への写像を定める．また 1 次 Chern 類が主 S^1 束の完全不変量であることを用いると, この Chern 類を保つ同相群への写像が全射となることも分かる．この射影 $p : \mathrm{Aut}(P) \to \mathrm{Homeo}(X)$ の, G の preimage $p^{-1}(G)$ を $\mathrm{Aut}(P)_0$ で表し, 射影 p の $\mathrm{Aut}(P)_0$ 及び G への制限も単に $p : \mathrm{Aut}(P)_0 \to G$ で表す．射影 $p : \mathrm{Aut}(P)_0 \to G$ の核を P のゲージ群といい, $\mathrm{Gau}(P)$ で表す．ここで S^1 がアーベル群なことから, ゲージ群 $\mathrm{Gau}(P)$

もアーベル群となり, したがって完全列

$$0 \to \mathrm{Gau}(P) \to \mathrm{Aut}(P)_0 \to G \to 1 \tag{1}$$

は同相群 G のアーベル群拡大である. 2 章で述べたように, アーベル群拡大には 2 次群コホモロジー類が対応していた.

定義 3.3. アーベル群拡大 (1) に対応する 2 次群コホモロジー類を $e_c \in H^2_{\mathrm{grp}}(G; \mathrm{Gau}(P))$ で表す.

ゲージ群 $\mathrm{Gau}(P)$ は, X 上の S^1 値連続関数全体 $C(X; S^1)$ と自然に同一視される. また, X 上の $\mathbb{R}$ 値連続写像全体を $C(X; \mathbb{R})$ で表すことにすると, 完全列

$$0 \to \mathbb{Z} \to C(X; \mathbb{R}) \to C(X; S^1) \to 0$$

が得られる. この完全列に関するコホモロジー長完全列の連結準同型

$$\delta : H^2_{\mathrm{grp}}(G; \mathrm{Gau}(P)) = H^2_{\mathrm{grp}}(G; C(X; S^1)) \to H^3_{\mathrm{grp}}(G; \mathbb{Z})$$

により, G の整数係数 3 次群コホモロジー類 $\delta e_c \in H^3_{\mathrm{grp}}(G; \mathbb{Z})$ が得られる.

4 コホモロジー類 D_c と δe_c の関係

3 章で特異コホモロジー類 $D_c \in H^3(BG; \mathbb{Z})$ 及び群コホモロジー類 $\delta e_c \in H^3_{\mathrm{grp}}(G; \mathbb{Z})$ を構成した. D_c については G 束の特性類として, とくに Serre スペクトル系列を用いた構成であり, δe_c については主 S^1 束から自然に定まる G の拡大を用いた構成であった. この章では, これら (構成のまったく異なる) ふたつのコホモロジー類の関係について説明する.

G^δ で群 G に離散位相を入れた位相群を表すことにすると, 特異コホモロジー $H^*(BG^\delta; \mathbb{Z})$ と群コホモロジー $H^*_{\mathrm{grp}}(G; \mathbb{Z})$ は自然に同型だった. また G にはもともとコンパクト開位相が入っていたので, その意味で恒等写像 $G^\delta \to G$ は連続準同型となる. この連続準同型が分類空間に誘導する連続写像 $BG^\delta \to BG$ が, コホモロジーの間の写像

$$H^3(BG; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota} H^3(BG^\delta; \mathbb{Z}) \cong H^3_{\mathrm{grp}}(G; \mathbb{Z})$$

を誘導する.

定理 4.1. [4] 上述のコホモロジー類 D_c 及び δe_c について

$$\iota D_c = \delta e_c$$

が成り立つ.

証明はいくつかのスペクトル系列を組み合わせて得られる可換図式上での diagram chasing である.

5 具体例

定理 4.1 のコホモロジー類が自明になる例, 非自明になる例をいくつか紹介する.

X として複素射影空間, c として $H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元をとる．このときコホモロジー類 $\iota D_c = \delta e_c$ は非自明となる (この例については実質的に [3] で証明されている)．この非自明性の証明では, $G = \mathrm{Homeo}(\mathbb{C}P^n)_0$ の部分群である projective unitary 群 $PU(n+1)$ のトポロジーを用いる．

X として 3 次実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ をとり, c として $H^2(\mathbb{R}P^3;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元をとる．この例についても, コホモロジー類 $\iota D_c = \delta e_c$ は非自明となる．この非自明性の証明では, $G = \mathrm{Homeo}(\mathbb{R}P^3)_0$ の部分群の特殊直交群 $SO(3)$ を用いる．

ここまではコホモロジー類 $\iota D_c = \delta e_c$ が非自明となる例を紹介したが, 自明なコホモロジー類になる場合もある．例えば X として 2 次実射影空間 $\mathbb{R}P^2$ をとり, c として $H^2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の生成元をとると, コホモロジー類 $\iota D_c = \delta e_c$ は自明となる．

参考文献

[1] R. Bott and L. W. Tu, Differential forms in algebraic topology, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[2] K.S. Brown, Cohomology of Groups, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1982.

[3] S. Maruyama, *A group three-cocycle of the Symplectomorphism group and the Dixmier-Douady class of Symplectic fibrations*, arXiv:2009.01022.

[4] S. Maruyama, *A characteristic class of* $\mathrm{Homeo(X)}_0$*-bundles and an abelian extension of the homeomorphism group*, arXiv:2009.03724.