節減数 2 のイデアルの Hilbert 関数挙動

千葉大学大学院 理学研究院
神代真也 (Shinya KUMASHIRO)

概要

Hilbert 関数とは、組成列の長さで定義される整数値関数で、環の次元論に欠かせない概念である。十分大きい値で多項式関数となり、その多項式のふるまいは、環の重複度や Rees 代数・随伴次数環の Cohen-Macaulay 性と関連して、深い研究がなされている。なかでも有名な結果の一つに、Huneke, Ooishi の定理がある。これは、「節減数 1」という比較的計算しやすいイデアルの条件が、Hilbert 多項式間の係数の等号と同値であり、ひいては Rees 代数・随伴次数環の Cohen-Macaulay 性を導くという優れた結果である。

この記事における目的は、Huneke, Ooishi の結果に続く「節減数 2」のイデアルの Hilbert 関数挙動について述べることである。結果として、節減数 2 のイデアルは、Hilbert 多項式間の係数に不等式が成り立つことを示し、さらにその等号成立条件が Rees 代数・随伴次数環が良い構造を持つことと同値であることを述べる。

1 導入

以下この記事を通して、常に $(A, \mathfrak{m})$ は d 次元ネーター局所環、I は $\mathfrak{m}$-準素イデアルとする[*1]。このとき、任意の負でない整数 n に対して、剰余環 A/I^{n+1} の組成列の長さは（組成列の取り方によらず一意に定まり）有限値を取ることが知られている。さらに、剰余環 A/I^{n+1} の組成列の長さ $\ell_A(A/I^{n+1})$ は、十分大きい n においては、（n に関する）ある有理多項式関数と一致する。すなわち、ある整数 $\mathrm{e}_0(I), \mathrm{e}_1(I), \dots, \mathrm{e}_d(I)$ が存在して、十分大きい n で

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_0(I)\binom{n+d}{d} - \mathrm{e}_1(I)\binom{n+d-1}{d-1} + \cdots + (-1)^d \mathrm{e}_d(I)$$

となる。ただし、$\binom{n+i}{i}$ は二項係数を表す。$\mathrm{e}_0(I), \mathrm{e}_1(I), \dots, \mathrm{e}_d(I)$ を I の $(0, 1, \dots, d$ 番目の$)$ Hilbert 係数という。

例 1. $A = K[[X_1, \dots, X_d]]$ を体 K 上の形式的冪級数環とする。このとき $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_d)$ は極大イデアルである。また任意の負でない整数 n に対して、剰余環 $A/\mathfrak{m}^{n+1}$ の組成列の長さは

$$\ell_A(A/\mathfrak{m}^{n+1}) = \#\{n \text{ 次以下の単項式 }\} = \binom{n+d}{d}$$

である。従って、$\mathrm{e}_0(\mathfrak{m}) = 1,\ \mathrm{e}_i(\mathfrak{m}) = 0$ for $1 \le i \le d$ である。

[*1] 可換環に馴染みがない場合は、A は体上の多項式環、I は単項式イデアルとしても差し支えない。

Hilbert 関数は環の次元に欠かせない概念であり、環の重複度とも深い関わりがある。また、Hilbert 関数は Rees 代数や随伴次数環

$$\mathcal{R}(I) = A[It] = \bigoplus_{n\geq 0} I^n t^n, \quad \mathcal{G}(I) = \mathcal{R}(I)/I\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n\geq 0}(I^n/I^{n+1})t^n$$

の構造も反映している。以下、Hilbert 関数を解析するにあたって基本となる概念を二つ紹介する。

1.1 節減

定義 2. イデアル J が I の節減であるとは、$J \subseteq I$ かつ、ある整数 $n \geq 0$ について $I^{n+1} = JI^n$ を満たすことをいう。

事実 3. (a) もしも J が I の節減ならば、$\mathrm{e}_0(I) = \mathrm{e}_0(J)$ である。

(b) 剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が無限体[*2]とすると、勝手な $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I に対して、I の節減となるようなあるパラメーターイデアル Q が存在する。

(c) A は Cohen-Macaulay 局所環、Q はパラメーターイデアルとする。このとき $\mathrm{e}_0(Q) = \ell_A(A/Q)$ である。

以上を組み合わせることで、A が Cohen-Macaulay 局所環であって剰余体 $A/\mathfrak{m}$ が無限体とすると、勝手な $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I に対して、あるパラメーターイデアル Q が存在して

$$\mathrm{e}_0(I) = \mathrm{e}_0(Q) = \ell_A(A/Q)$$

であることがわかる。この事実から、第 0 番目の Hilbert 係数が計算しやすいものであると同時に、第 0 番目の Hilbert 係数だけでは（Hilbert 関数に比べて）情報が欠けていることもみて取れる。そこで、次に第 1 番目の Hilbert 係数を扱うための概念を紹介する。

1.2 Sally 加群

以下この記事を通して、特に述べない限り

設定 1. $(A, \mathfrak{m})$ は d 次元 Cohen-Macaulay 局所環、I は $\mathfrak{m}$ 準素イデアル、Q は I の節減であるパラメーターイデアルとする。

定義 4. ([13]) 設定 1 の状況において、有限生成次数付き $\mathcal{R}(Q)$ 加群

$$\mathcal{S}_Q(I) = I\mathcal{R}(I)/I\mathcal{R}(Q) = \oplus_{n\geq 0}(I^{n+1}/Q^n I)t^n$$

を I の Q に関する Sally 加群という。

事実 5. (a) 全ての非負整数 $n \geq 0$ に対して、等式

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = \mathrm{e}_0(I)\binom{n+d}{d} - (\mathrm{e}_0(I) - \ell_A(A/I))\binom{n+d-1}{d-1} - \ell_A([\mathcal{S}_Q(I)]_n).$$

[*2] 単に集合として元の個数が無限ということである。Hilbert 関数を考える際には、この仮定は平坦写像を経由することで取り外せることが多い

が成り立つ。

(b) もし $\mathcal{S}_Q(I) \neq 0$ ならば、$\mathrm{Ass}_{\mathcal{R}(Q)} \mathcal{S}_Q(I) = \{\mathfrak{m}\mathcal{R}(Q)\}$ である。

事実 5(a) は Sally 加群が Hilbert 関数の剰余項であることを述べている。そのため、Hilbert 関数の解析は Sally 加群の構造解析に帰着できる。事実 5(b) は Sally 加群の構造解析を行うにあたり、基本となる事実である。

1.3 既知の結果

以上の背景のもとで、知られている結果を以下に述べる。

事実 6. (a) ([10]) $\ell_A(A/I) \geq \mathrm{e}_0(I) - \mathrm{e}_1(I)$ が成り立つ。

(b) ([5, 11]) $\ell_A(A/I) = \mathrm{e}_0(I) - \mathrm{e}_1(I)$ である必要十分条件は $I^2 = QI$ である。このとき、$\mathcal{G}(I)$ は Cohen-Macaulay 環である。また $d \geq 2$ であれば $\mathcal{R}(I)$ も Cohen-Macaulay 環である。

(c) ([12]) $\ell_A(A/I) = \mathrm{e}_0(I) - \mathrm{e}_1(I) + 1$ かつ $\mathrm{e}_2(I) \neq 0$ である必要十分条件は $I^3 = QI^2$ かつ $\ell_A(I^2/QI) = 1$ である。このとき、$\operatorname{depth} \mathcal{G}(I) \geq d - 1$ である。

(d) ([2, 3]) $\ell_A(A/I) = \mathrm{e}_0(I) - \mathrm{e}_1(I) + 1$ である必要十分条件は

$$\mathcal{S}_Q(I) \cong (X_1, \ldots, X_c) \subseteq (A/\mathfrak{m})[X_1, \ldots, X_d]$$

となることである。ただし、$c = \ell_A(I^2/QI)$ である。このとき、$I^3 = QI^2$, $\mathfrak{m}I^2 \subseteq QI$, $\operatorname{depth} \mathcal{G}(I) \geq d - c$ が成り立つ。

事実 6(a) は、Northcott の不等式として知られるものであり、事実 5(a) に現れる $\mathrm{e}_0(I) - \ell_A(A/I)$ が $\mathrm{e}_1(I)$ より小さいことを主張している。事実 6(b) は Northcott の不等式が等号となる必要十分条件が $I^2 = QI$、すなわち節減の定義における n が 1 であって[*3]、このとき Rees 代数や随伴次数環の Cohen-Macaulay 性が導けることを主張している。

これに続く結果として、Sally は $\ell_A(A/I) = \mathrm{e}_0(I) - \mathrm{e}_1(I) + 1$ が成り立つときの Rees 代数や随伴次数環の構造はどうなっているかを考察し、部分的な解答を与えた。これに対して完全な解答を与えたのが [2, 3] である。以上の背景のもと、これらに続く問題として次が考えられる。

問題 7. (a) $\ell_A(A/I) = \mathrm{e}_0(I) - \mathrm{e}_1(I) + 2$ が成り立つときの Rees 代数や随伴次数環の構造はいかなるものか。

(b) 節減数が 2 のとき、すなわち等式 $I^3 = QI^2$ のときの Rees 代数や随伴次数環の構造はいかなるものか。

本記事の結果はこのうちの (b) に焦点を当てたものである。注意すべきは、一般に節減数は節減の取り方に依存してしまう[*4]ということである。

[*3] 一般に、$I^{n+1} = QI^n$ を満たす最小の非負整数を I の Q に関する節減数という

[*4] 例えば [4, 7, 8] を参照されたい。一方で事実 6(b) の同値条件は、節減数が 1 という条件が Q の取り方に依存しないことも述べている

2　主結果

以下、設定 1 の仮定に加えて $d \geq 2$ とする。このとき次が正しい。

主定理 1. ([6]) $I^3 = QI^2$、$\mathfrak{m}I^2 \subseteq QI$ とする。このとき、

$$\ell_A(A/I) \geq \mathrm{e}_0(I) - \mathrm{e}_1(I) + \mathrm{e}_2(I)$$

が成り立つ。さらに、等号成立条件は $\operatorname{depth} \mathcal{G}(I) \geq d-1$ となることである。

注意 8. (a) ([9]) $\mathrm{e}_2(I) \geq 0$ が成り立つ。特に主定理 1 に現れる不等式は Northcott の不等式よりも強い条件である。

(b) ([1]) もし I が整閉イデアルであれば、（主定理 1 と不等号の向きが逆の）不等式 $\ell_A(A/I) \leq \mathrm{e}_0(I) - \mathrm{e}_1(I) + \mathrm{e}_2(I)$ が成り立つ。

例 9. (a) $A = K[[X, Y]]$ を体 K 上の二変数の形式的冪級数環として、$I = (X^5, X^3Y^2, X^2Y^3, Y^5)$、$Q = (X^5, Y^5)$ とする。このとき、$I^3 = QI^2$, $\mathfrak{m}I^2 \subseteq QI$ であって、

$$\ell_A(A/I^{n+1}) = \begin{cases} 17 & (n = 0) \\ 25\binom{n+2}{2} - 10\binom{n+1}{1} + 2 & (n \geq 1). \end{cases}$$

である。従って、$\ell_A(A/I) = \mathrm{e}_0(I) - \mathrm{e}_1(I) + \mathrm{e}_2(I) = 17$ であるから、$\operatorname{depth} \mathcal{G}(I) \geq 1$ が成り立つ。

(b) $\mathbb{X} = (X_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq t}$ は、（$3t$ 個の）変数を成分に持つ 3 行 t 列の行列とする。$K[[\mathbb{X}]]$ を体 K 上の $3t$ 変数の形式的冪級数環として、$I_3(\mathbb{X})$ で $\mathbb{X}$ の 3×3 の小行列で生成されるイデアルを表すとする。このとき、$A = K[[\mathbb{X}]]/I_3(\mathbb{X})$ は $(2t+2)$ 次元の Cohen-Macaulay 局所環になる。また、$\mathfrak{m}$ を A の極大イデアルとすると $\mathfrak{m}^3 = Q\mathfrak{m}^2$ となるパラメーターイデアル Q が存在することがわかる。従って $1 = \mathrm{e}_0(\mathfrak{m}) - \mathrm{e}_1(\mathfrak{m}) + \mathrm{e}_2(\mathfrak{m})$ であって、$\operatorname{depth} \mathcal{G}(\mathfrak{m}) \geq \dim A - 1 = 2t + 1$ である。

参考文献

[1] A. Corso, C. Polini, and M. E. Rossi, Depth of associated graded rings via Hilbert coefficients of ideals, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **201** (2005), 126–141.

[2] S. Goto, K. Nishida, K. Ozeki, Sally modules of rank one, *Michigan Mathematical Journal*, **57** (2008), 359–381.

[3] S. Goto, K. Nishida, K. Ozeki, The structure of Sally modules of rank one, *Mathematical Research Letters*, **15** (2008), no.5, 881–892.

[4] S. Huckaba, Reduction numbers of ideals of higher analytic spread, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **102** (1987), 49-57.

[5] C. Huneke, Hilbert functions and symbolic powers, *Michigan Mathematical Journal*, **34** (1987), 293-318.

[6] S. Kumashiro, Ideals of reduction number two, *Israel Journal of Mathematics*, to appear.

[7] T. Marley, The coefficients of the Hilbert polynomial and the reduction number of an ideal, *Journal of the London Mathematical Society*, **40** (1989), 1-8.

[8] T. Marley, The reduction number of an ideal and the local cohomology of the associated graded ring, *Proceeding of the American mathematical society*, **117** (1993), 335-341.

[9] M. Narita, A note on the coefficients of Hilbert characteristic functions in semi-regular local rings, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **59** (1963), 269-275.

[10] D. G. Northcott, A note on the coefficients of the abstract Hilbert function, *Journal of the London Mathematical Society*, **35** (1960), 209-214.

[11] A. Ooishi, Δ-genera and sectional gerena of commutative rings, *Hiroshima Mathematical Journal*, **17** (1987), 361-372.

[12] J. Sally, Hilbert coefficients and reduction number 2, *Journal of Algebraic Geometry*, **1**, no. 2 (1992), 325–333.

[13] W. V. Vasconcelos, Hilbert functions, analytic spread, and Koszul homology, *Commutative algebra: Syzygies, multiplicities, and birational algebra (South Hadley, 1992), Contemporary Mathematics*, **159**, 410–422, Amer. Math., Soc., Providence, RI, 1994.