結晶粒界運動数理モデルに対する
温度制約条件付きの最適制御問題

千葉大学大学院 融合理工学府 数学情報科学専攻 数学・情報数理学コース
久保田翔大 (Shodai KUBOTA)

概 要

本講演では, 結晶粒界運動を記述する数学モデルに対する温度制約条件付きの最適制御問題を考える. このモデルは 2 つの放物型偏微分方程式で構成されている初期値境界値問題の一種である. 片方の方程式は特異拡散と呼ばれる項を含んでおり, その部分を緩和した問題も併せて扱う. 本講演では, 元の問題と緩和問題それぞれにおける最適制御の存在, 並びに最適制御問題の連続依存性. 加えて, 緩和問題に対する最適制御の必要条件について考察する. なお本講演は, 白川 健氏 (千葉大学), 山崎 教昭氏 (神奈川大学), Antil Harbir 氏 (George Mason University) との共同研究に基づく.

1 導入

まず初めに, 本講演において必要な定義, 性質の確認を行う. この章を通して X を実 Banach 空間, X^* を X の共役空間, つまり, 定義域が X である有界線形汎関数からなる集合とする.

<u>**記号 1.**</u> $|\cdot|_X$, $|\cdot|_{X^*}$ はそれぞれ X のノルム, X^* のノルムとし, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ は X と X^* との双対写像を表す. 特に, X が実 Hilbert 空間ならば, こちらは内積 $(\cdot, \cdot)_X$ を表す.

<u>**記号 2.**</u> $A : X \to 2^{X^*}$ に対して, $D(A)$ を定義域, $R(A) := \bigcup_{u \in D(A)} Au$ を値域とする.

<u>**定義 1.**</u> $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ が適正凸関数であるとは, $\exists x_0 \in X$ s.t. $\varphi(x_0) < \infty$,

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y), \quad (x, y \in X, \lambda \in [0,1]).$$

<u>**定義 2.**</u> $\varphi : X \to (-\infty, \infty]$ が下半連続であるとは,

$$\liminf_{x_n \to x} \varphi(x_n) \geq \varphi(x) \quad (x \in X).$$

φ が弱下半連続であるとは,

$$\liminf_{x_n \rightharpoonup x} \varphi(x_n) \geq \varphi(x) \quad (x \in X).$$

<u>**定義 3.**</u> φ を適正下半連続凸関数とする. 以下で定めた多価作用素 $\partial\varphi : X \to 2^{X^*}$ を φ の劣微分という:

$$\partial\varphi(x) := \{x^* \in X^* ; \langle x^*, y - x \rangle_X \leq \varphi(y) - \varphi(x), \forall y \in X\} \quad (x \in X).$$

劣微分は通常の微分の拡張であり, 端的に述べると, グラフの傾きを下から支えるものを集めた集合である.

<u>例.</u> $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を, $\varphi(x) := |x| \quad (x \in \mathbb{R})$ と定めると, 原点を除いては微分でき, 劣微分は以下のようになる:

$$\partial\varphi(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0), \\ [-1, 1] & (x = 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$

なお参考までに φ と劣微分 $\partial\varphi$ グラフを載せておく:

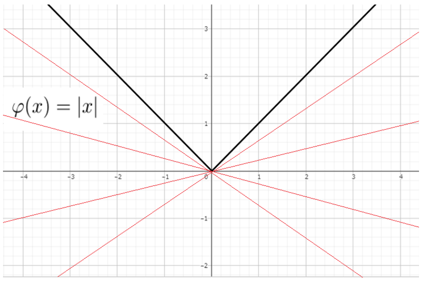

図 1: φ と原点を下から支える接線

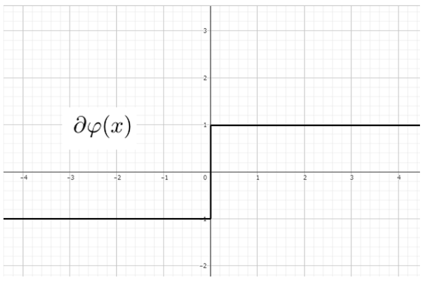

図 2: φ の劣微分 $\partial\varphi$ のグラフ

φ は $x < 0$ においては, 傾きは常に -1 であり, 劣微分も -1 となる. 同様にして, $x > 0$ においては, 傾きは常に 1 であり, 劣微分も 1 となる. 原点においては, 図 1 より, -1 から 1 までの傾きで下から支えられている. 原点における劣微分は $[-1, 1]$ という多価になっている.

<u>**定義 4.**</u> $f : X \to \mathbb{R}$ とする. $f' : X \times X \to \mathbb{R}$ を,

$$f'(x, y) := \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} \quad (x, y \in X)$$

と定める. 点 $[x, y] \in X \times X$ において, 右辺の極限が存在するとき, これを点 $x \in X$ における y 方向の方向微分という.

<u>**定義 5.**</u> $f : X \to \mathbb{R}$ とする. $x \in X$ に対して,

$$f'(x, y) = \langle \nabla f(x), y \rangle_X \quad (y \in X)$$

を満たす $\nabla f(x) \in X^*$ が存在するとき, f は点 $x \in X$ で Gâteaux 微分可能であるという.

2 問題設定

本講演を通して, $N \in \{2, 3, 4\}$, $0 < T < \infty$ を定数とする. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は十分滑らかな境界 $\Gamma := \partial\Omega$ を持つ有界領域とし, Γ 上の外向き単位法線ベクトルを n_Γ と表す. また, $Q := (0, T) \times \Omega$ を時間区間 $(0, T)$ と空間領域 Ω との直積集合とし, 同様に $\Sigma := (0, T) \times \Gamma$ と定める. こちらを踏まえて以下の連立偏微分方程式の初期値境界値問題 (S) を考える.

(S) :

$$\begin{cases} \partial_t \eta - \Delta\eta + g(\eta) + \alpha'(\eta)|\nabla\theta| = u(t, x), \ (t, x) \in Q, \\ \nabla\eta \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Sigma, \quad \eta(0, x) = \eta_0(x), \ x \in \Omega; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0(t,x)\partial_t\theta - \mathrm{div}\big(\alpha(\eta)\frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} + \nu^2\nabla\theta\big) = v(t,x), \ (t,x)\in Q, \\ \theta = 0 \text{ on } \Sigma, \ \theta(0,x) = \theta_0(x), \quad x\in\Omega. \end{cases}$$

(S) は Kobayashi et-al. [1] により提唱された結晶粒界運動を記述する数理モデルをアレンジしたものになっており, 以後こちらを K.W.C. システムと呼ぶ. K.W.C. システムについて詳しく紹介する. こちらのシステムは, 例えば図 3 のようなセラミックスなどの多結晶において, そちらを構成する結晶の粒の境界, いわゆる結晶粒界が時間とともにどのように変化しているのかを対象とした数学モデルである. 多結晶は複数の小さな単結晶によって構成されている. この個々の単結晶を結晶の粒, 結晶粒という. 結晶粒の中には, 図 3 の左下や, 右の結晶粒のように, 縞模様の特徴的な結晶の向きを見ることができる結晶粒もある. この結晶の向きのことを配向という. そして結晶粒同士の境界を結晶粒界という.

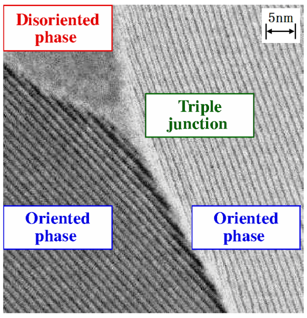

図 3: 多結晶 (Si_3N_4) の顕微鏡画像: UBE 科学分析センター (http://www.ube-ind.co.jp/usal/)

(S) における未知関数 η, θ である. η は結晶粒の配向度, つまりどれだけ模様がはっきり見えるのかに相当する相関数である. 一方, θ は多結晶体内の各点における配向の向きを角度で表した相関数である. 1 つ目の方程式は, η に対する方程式で, u を外力項とする放物型の方程式である. なお u は結晶粒界運動を制御する温度に対応している. $g \in C^2(\mathbb{R})$ は η に対するリプシッツ摂動項である. $0 < \alpha \in C^2(\mathbb{R})$ は空間に対するモビリティーと呼ばれる項である. このモビリティーを入れることで, η と θ に相互作用が生まれ, これによって, 複雑な結晶粒界の形成プロセスを再現することを狙っている. η_0 は η に対する与えられた初期値である. α' は α の微分を表す. 2 つ目の方程式は θ に関する方程式で, v を外力項とするような特異拡散と呼ばれる拡散の係数が無限大になりうるものを含んでいる偏微分方程式である. $0 < \alpha_0 \in W^{1,\infty}(Q)$ は時間に対するモビリティーである. $\nu > 0$ は与えられた定数である. θ_0 は θ に対する与えられた初期値である.

なお, こちらの K.W.C. システムを考えるにあたって, 特に難しいのが特異拡散の $\frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|}$ の部分である. 本講演では, こちらを緩和する問題 $(\mathrm{S})_\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ も合わせて考える.

$(\mathrm{S})_\varepsilon$:

$$\begin{cases} \partial_t\eta_\varepsilon - \Delta\eta_\varepsilon + g(\eta_\varepsilon) + \alpha'(\eta_\varepsilon)f_\varepsilon(\nabla\theta_\varepsilon) = u(t,x), \ (t,x)\in Q, \\ \nabla\eta_\varepsilon\cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Sigma, \quad \eta_\varepsilon(0,x) = \eta_0(x), \ x\in\Omega; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0(t,x)\partial_t\theta_\varepsilon - \mathrm{div}\big(\alpha(\eta_\varepsilon)\nabla f_\varepsilon(\nabla\theta_\varepsilon) + \nu^2\nabla\theta_\varepsilon\big) = v(t,x), \ (t,x)\in Q, \\ \theta_\varepsilon = 0 \text{ on } \Sigma, \ \theta_\varepsilon(0,x) = \theta_0(x), \quad x\in\Omega. \end{cases}$$

緩和問題 $(\mathrm{S})_\varepsilon$ では, $|\nabla\theta|$ の部分を以下で定める双曲線タイプの関数 f_ε を用いて近似する:

$$\omega\in\mathbb{R}\mapsto f_\varepsilon(\omega) := \sqrt{\varepsilon^2 + |\omega|^2}, \ (f_\varepsilon \to |\cdot| \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \text{ as } \varepsilon\downarrow 0).$$

これに伴い, 特異拡散の部分も ∇f_ε で近似される.

3 最適制御問題

この章では $\varepsilon \geq 0$ を定数とし, $(\mathrm{S})_0$ は (S) に対応するとする. $H := L^2(\Omega)$, $\mathscr{H} := L^2(0,T;H)$ とおき, 関数 $\sigma_*, \sigma^* \in L^\infty(Q)$; $\sigma_* \leq \sigma^*$ a.e. in Q を固定する. さらに, $\mathcal{U}_{\mathrm{ad}} \subset \mathscr{H}$ を以下で定める:

$$\mathcal{U}_{\mathrm{ad}} := \left\{ \tilde{u} \in \mathscr{H} \,\middle|\, \sigma_* \leq \tilde{u} \leq \sigma^* \text{ a.e. in } Q \right\} \neq \emptyset.$$

本講演では, $(\mathrm{S})_\varepsilon$ に支配される最適制御問題 $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ を, 次で設定する.

$(\mathrm{OP})_\varepsilon$ 以下の条件を満たす外力の組 $[u^*, v^*] \in [\mathscr{H}]^2$ を求める問題.

(I) $[u^*, v^*] \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H}$.

(II) $[u^*, v^*]$ は以下のコスト関数 $\mathcal{J}_\varepsilon := \mathcal{J}_\varepsilon(u,v)$ の最小元である:

$$\begin{aligned}[u,v] \in [\mathscr{H}]^2 \mapsto \mathcal{J}_\varepsilon(u,v) := &\frac{1}{2}\int_0^T \bigl(|(\eta_\varepsilon - \eta_{\mathrm{ad}})(t)|_H^2 + |(\theta_\varepsilon - \theta_{\mathrm{ad}})(t)|_H^2\bigr)dt \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T \bigl(|u(t)|_H^2 + |v(t)|_H^2\bigr)dt \quad \in [0,\infty).\end{aligned}$$

ここに, $[\eta_{\mathrm{ad}}, \theta_{\mathrm{ad}}] \in [\mathscr{H}]^2$ は数学モデル $(\mathrm{S})_\varepsilon$ による結晶粒界の再現目標を表す与えられた関数の組 (target profile) であり, $[\eta_\varepsilon, \theta_\varepsilon]$ は外力 $[u,v]$ に対する $(\mathrm{S})_\varepsilon$ の解である.

上記 (I), (II) をみたす関数の組 $[u^*, v^*] \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H}$ を $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ の解, もしくは最適制御と呼ぶ.

以上を踏まえ, 本講演では, (OP), $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ において最適制御の存在や, $\varepsilon > 0$ における最適制御の必要条件など得られた結果を報告する.

4 主定理

4.1 仮定と記号

本講演では, 以下のように設定する.

(A1) $\nu > 0$, $\sigma_*, \sigma^* \in L^\infty(Q)$; $\sigma_* \leq \sigma^*$ a.e. in Q, $H := L^2(\Omega)$, $V := H^1(\Omega)$, $V_0 := H_0^1(\Omega)$, $\mathscr{H} := L^2(0,T;H)$, $\mathscr{V} := L^2(0,T;V)$, $\mathscr{V}_0 := L^2(0,T;V_0)$.

(A2) $\alpha_0 \in W^{1,\infty}(Q)$, $\quad \alpha_0 > 0$ on $\overline{Q}$.

(A3) $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$ と $\alpha\alpha'$ は $\mathbb{R}$ 上のリプシッツ連続関数であり以下を満たす:

$$\alpha'(0) = 0,\ \alpha'' \geq 0, \text{ and } \delta_\alpha := \inf \alpha(\mathbb{R}) \cup \alpha_0(\overline{Q}) > 0.$$

(A4) $g \in C^2(\mathbb{R})$ は非負値の原始関数 $0 \leq G \in C^3(\mathbb{R})$ を持つリプシッツ連続関数で以下を満たす定数 ρ_*, ρ^* を持つ:

$$\begin{cases} g(\eta) \leq -|\sigma_*|_{L^\infty(Q)}, \text{ for } \eta \leq \rho_*, \\ g(\eta) \geq |\sigma^*|_{L^\infty(Q)}, \text{ for } \eta \geq \rho^*. \end{cases}$$

(A5) $[\eta_0, \theta_0] \in \bigl[V \cap L^\infty(\Omega)\bigr] \times V_0$, $\rho_* \leq \eta_0 \leq \rho^*$ a.e. in Ω.

4.2 準備

まず初めに, (S) に対する解の存在と一意性について先行研究から得られた結果を報告する.
命題 1 (cf. [2–4]). $[u,v] \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H}$ を仮定する. このとき状態方程式 (S) は以下の意味でただ一つ解 $[\eta, \theta]$ を持つ:

(S0) $\eta \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$,

$\theta \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V_0)$.

(S1) $\partial_t \eta - \varDelta \eta + g(\eta) + \alpha'(\eta)|\nabla \theta| = u$ in $\mathscr{H}$,

subject to $\nabla \eta \cdot n_\Gamma = 0$ a.e. in Σ, and $\eta(0) = \eta_0$ in H.

(S2) $\alpha_0(t)\partial_t \theta(t) - \mathrm{div}\bigl(\alpha(\eta(t))\omega^*(t) + \nu \nabla \theta(t)\bigr) = v(t)$ in H, a.e. $t \in (0,T)$,

with $\omega^* \in L^\infty(Q)$ satisfying $\omega^* \in \mathrm{Sgn}^N(\nabla \theta)$ a.e. in Q,

subject to $\theta = 0$ a.e. in Σ, and $\theta(0) = \theta_0$ in H.

ここで, 特異性に対する厳密な表現には以下で定める符号関数 (Sgn 関数) と呼ばれる多価作用素 $\mathrm{Sgn}^N : \mathbb{R}^N \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^N}$ が必要である:

$$\omega \in \mathbb{R}^N \mapsto \mathrm{Sgn}^N(\omega) := \left\{ \omega^* \in \mathbb{R}^N : \omega^* \cdot (z - \omega) \le |z| - |\omega|, \ \forall z \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

Sgn^N は Euclid ノルム $|\cdot| : \omega \in \mathbb{R}^N \mapsto |\omega| := \sqrt{\omega \cdot \omega} \in [0,\infty)$ の劣微分と一致する. すなわち, $\mathrm{Sgn}^N = \partial |\cdot|$ である.

続けて, $(\mathrm{S})_\varepsilon$ においても同様の結果を得ているので報告する.
命題 2 (cf. [2–4]). $\varepsilon > 0$, $[u,v] \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H}$ を仮定する. このとき状態方程式 $(\mathrm{S})_\varepsilon$ は以下の意味でただ一つ解 $[\eta_\varepsilon, \theta_\varepsilon]$ を持つ:

(S0)$_\varepsilon$ $\eta_\varepsilon \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$,

$\theta_\varepsilon \in W^{1,2}(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V_0)$.

(S1)$_\varepsilon$ $\partial_t \eta_\varepsilon - \varDelta \eta_\varepsilon + g(\eta_\varepsilon) + \alpha'(\eta_\varepsilon) f_\varepsilon(\nabla \theta_\varepsilon) = u$ in $\mathscr{H}$,

subject to $\nabla \eta_\varepsilon \cdot n_\Gamma = 0$ a.e. in Σ, and $\eta_\varepsilon(0) = \eta_0$ in H.

(S2)$_\varepsilon$ $\alpha_0(t)\partial_t \theta_\varepsilon(t) - \mathrm{div}\bigl(\alpha(\eta_\varepsilon(t))[\nabla f_\varepsilon](\nabla \theta_\varepsilon(t)) + \nu \nabla \theta_\varepsilon(t)\bigr) = v(t)$ in H,

a.e. $t \in (0,T)$, subject to $\theta_\varepsilon = 0$ a.e. in Σ, and $\theta_\varepsilon(0) = \theta_0$ in H.

次に, $(\mathrm{S})_\varepsilon$ における ε と外力に関する連続依存性について得られた結果を報告する.
命題 3 (cf. [3, 4]). $\varepsilon \ge 0$ とし, 解作用素を以下のように定める:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_0 : [u,v] \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H} \mapsto [\eta, \theta] := \mathcal{S}_0[u,v] : (\mathrm{S}) \text{ の解}, \\ \mathcal{S}_\varepsilon : [u,v] \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H} \mapsto [\eta_\varepsilon, \theta_\varepsilon] := \mathcal{S}_\varepsilon[u,v] : (\mathrm{S})_\varepsilon \text{ の解}. \end{cases}$$

このとき,

$$\begin{gathered} \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,1], \ \varepsilon_n \to \varepsilon, \ [u_n, v_n] \to [u,v] \text{ weakly in } [\mathscr{H}]^2, \text{ as } n \to \infty \\ \Longrightarrow [\eta_n, \theta_n] := \mathcal{S}_{\varepsilon_n}[u_n, v_n] \to [\eta, \theta] := \mathcal{S}_\varepsilon[u,v] \text{ in } C([0,T];H)^2, \\ \text{and in } \mathscr{V} \times \mathscr{V}_0, \text{ as } n \to \infty. \end{gathered}$$

<u>補足 1.</u> $\varepsilon>0$ とする. 最適制御の必要条件において, 考察の要となる補助システム $(\mathrm{A})_\varepsilon$ を紹介する.

$(\mathrm{A})_\varepsilon$:

$$\begin{cases}\partial_t p-\varDelta p+\mu(t,x)p+\lambda(t,x)p+\omega(t,x)\cdot\nabla z=h(t,x),\ (t,x)\in Q,\\ a(t,x)\partial_t z+b(t,x)z-\mathrm{div}\big(A(t,x)\nabla z+\nu\nabla z+p\omega(t,x)\big)=k(t,x),\ (t,x)\in Q,\\ \nabla p(t,x)\cdot n_\Gamma=0,\quad z(t,x)=0,\ (t,x)\in\Sigma,\\ p(0,x)=p_0(x),\ z(0,x)=z_0(x),\ x\in\Omega.\end{cases}$$

こちらのシステムは, 緩和問題の状態方程式を線形化したシステムを一般化したものである. こちらのシステムにおいて, $[h,k]\in[\mathscr{H}]^2$ は与えられた外力項, p_0, z_0 はそれぞれ与えられた p, z に対する初期値である. $[a,b,\lambda,\omega,A]\in W^{1,\infty}(Q)\times L^\infty(Q)\times L^\infty(Q)\times L^\infty(Q)^N\times L^\infty(Q)^{N\times N}$ は与えられた関数で, 特に, $\log a\in L^\infty(Q)$ であり, A は正値対称である. $\mu\in L^\infty(0,T;H)$ は $\mu\geq 0$ a.e. in Q を満たす与えられた関数である.

補助システムについては先行研究 [5] において, 解の存在と一意性, 並びに解の連続依存性が得られている. この補助システムは, コスト関数 $\mathcal{J}_\varepsilon$ の Gâteaux 微分と深くかかわっている. 本講演において, コスト関数 $\mathcal{J}_\varepsilon$ の Gâteaux 微分の計算では, 補助システムの外力項 h, k は方向微分を計算する際の方向ベクトルと対応している. なお, コスト関数 $\mathcal{J}_\varepsilon$ の Gâteaux 微分を計算する際には, 以下の設定が対応する:

$$a=\alpha_0,\ b=0,\ \lambda=g'(\eta),\ \omega=\alpha'(\eta)[\nabla f_\varepsilon](\nabla\theta),\ A=\alpha(\eta)[\nabla^2 f_\varepsilon](\nabla\theta).$$

<u>補題 1.</u> $\varepsilon>0$ とする. このとき, コスト関数を $\mathscr{X}:=L^\infty(Q)\times\mathscr{H}$ に制限した $\mathcal{J}_\varepsilon|_{\mathscr{X}}:\mathscr{X}\longrightarrow\mathbb{R}$ は $\mathscr{X}$ 上で Gâteaux 微分可能である. さらに, 各 $[u,v]\in\mathscr{X}$ に対して, Gâteaux 微分 $(\mathcal{J}_\varepsilon|_{\mathscr{X}})'(u,v)$ は $([\mathscr{H}]^2)^*=[\mathscr{H}]^2$ への一意拡張 $\mathcal{J}_\varepsilon'(u,v)$ をもち, 以下の等式を満たす:

$$\big(\mathcal{J}_\varepsilon'(u,v),[h,k]\big)_{[\mathscr{H}]^2}=\big([\eta-\eta_{\mathrm{ad}},\theta-\theta_{\mathrm{ad}}],[\chi_\varepsilon,\gamma_\varepsilon]\big)_{[\mathscr{H}]^2}+\big([u,v],[h,k]\big)_{[\mathscr{H}]^2},\ \text{for any } [h,k]\in\mathscr{X}.$$

なお, $[\chi,\gamma]$ は, 状態方程式 $(\mathrm{S})_\varepsilon$ を線形化した以下のシステムの解である:

$$\begin{cases}\partial_t\chi_\varepsilon-\varDelta\chi_\varepsilon+\big(g'(\eta_\varepsilon)+\alpha''(\eta_\varepsilon)f_\varepsilon(\nabla\theta_\varepsilon)\big)\chi_\varepsilon+\alpha'(\eta_\varepsilon)[\nabla f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon)\cdot\nabla\gamma_\varepsilon=h\quad\text{in } Q,\\ \alpha_0\partial_t\gamma_\varepsilon-\mathrm{div}\big(\alpha(\eta_\varepsilon)[\nabla^2 f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon)\nabla\gamma_\varepsilon+\nu\nabla\gamma_\varepsilon+\alpha'(\eta_\varepsilon)\chi_\varepsilon[\nabla f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon)\big)=k\quad\text{in } Q,\\ \nabla\chi_\varepsilon\cdot n_\Gamma=0,\quad\gamma_\varepsilon=0\text{ in }\Sigma,\ \chi_\varepsilon(0,x)=\gamma_\varepsilon(0,x)=0,\ x\in\Omega.\end{cases}$$

線形システムには, 随伴システムと呼ばれるものが必ず存在する. 次に, それらのシステムの関係性について紹介する.

<u>補題 2.</u> $\varepsilon>0$, $[u,v]\in[\mathscr{H}]^2$, $[h,k]\in[\mathscr{H}]^2$ とすると, 以下が成り立つ:

$$([p_\varepsilon,z_\varepsilon],[h,k])_{[\mathscr{H}]^2}=([u,v],[\chi_\varepsilon,\gamma_\varepsilon])_{[\mathscr{H}]^2}.$$

なお, $[\eta_\varepsilon,\theta_\varepsilon]:=\mathcal{S}_\varepsilon[u,v]$ in $[\mathscr{H}]^2$ であり, $[\chi_\varepsilon,\gamma_\varepsilon]\in[\mathscr{H}]^2$, $[p_\varepsilon^*,z_\varepsilon^*]\in[\mathscr{H}]^2$ はそれぞれ以下の変分システムの一意解である:

$$\begin{cases}\partial_t\chi_\varepsilon-\varDelta\chi_\varepsilon+\big(g'(\eta_\varepsilon^*)+\alpha''(\eta_\varepsilon^*)f_\varepsilon(\nabla\theta_\varepsilon^*)\big)\chi_\varepsilon+\alpha'(\eta_\varepsilon^*)[\nabla f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon^*)\cdot\nabla\gamma_\varepsilon=h\quad\text{in } Q,\\ \alpha_0\partial_t\gamma_\varepsilon-\mathrm{div}\big(\alpha(\eta_\varepsilon^*)[\nabla^2 f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon^*)\nabla\gamma_\varepsilon+\nu\nabla\gamma_\varepsilon+\alpha'(\eta_\varepsilon^*)\chi_\varepsilon[\nabla f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon^*)\big)=k\quad\text{in } Q,\\ \nabla\chi_\varepsilon\cdot n_\Gamma=0,\quad\gamma_\varepsilon=0\text{ in }\Sigma,\ \chi_\varepsilon(0,x)=\gamma_\varepsilon(0,x)=0,\ x\in\Omega,\end{cases}$$

$$\begin{cases} -\partial_t p_\varepsilon - \varDelta p_\varepsilon + \bigl(g'(\eta_\varepsilon^*) + \alpha''(\eta_\varepsilon^*) f_\varepsilon(\nabla\theta_\varepsilon^*)\bigr) p_\varepsilon + \alpha'(\eta_\varepsilon^*)[\nabla f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon^*) \cdot \nabla z_\varepsilon = u \quad \text{in } Q, \\ -\partial_t(\alpha_0 z_\varepsilon) - \mathrm{div}\bigl(\alpha(\eta_\varepsilon^*)[\nabla^2 f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon^*)\nabla z_\varepsilon + \nu\nabla z_\varepsilon + \alpha'(\eta_\varepsilon^*) p_\varepsilon [\nabla f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon^*)\bigr) = v \quad \text{in } Q, \\ \nabla p_\varepsilon \cdot n_\Gamma = 0, \quad z_\varepsilon = 0 \text{ in } \Sigma, \ \ p_\varepsilon(T,x) = z_\varepsilon(T,x) = 0, \ x \in \Omega. \end{cases}$$

以上を踏まえて, 主定理を紹介する.

4.3 主定理

本講演では, 以下 4 つの定理について紹介する.

定理 1 (最適制御の存在). (A1)–(A5) の仮定の下, 以下の 2 つが成り立つ:

(I) 問題 (OP) は少なくとも 1 つ最適制御 $[u^*, v^*] \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H}$ を持つ.

(II) $\varepsilon > 0$ に対して, 問題 $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ は少なくとも 1 つ最適制御 $[u_\varepsilon^*, v_\varepsilon^*] \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H}$ を持つ.

定理 2 (最適制御の連続依存性). 各 $\varepsilon > 0$ に対して, $[u_\varepsilon^*, v_\varepsilon^*] \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H}$ を $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ に対する最適制御とする. このとき,

$$\exists\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,1), \exists[u^*, v^*] \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H} \text{ s.t. } \varepsilon_n \to 0, [u_\varepsilon^*, v_\varepsilon^*] \to [u^*, v^*] \text{ weakly in } [\mathscr{H}]^2 \text{ as } n \to 0,$$
$$[u^*, v^*]\text{: 問題 (OP) における最適制御.}$$

定理 3 (緩和問題における最適制御の必要条件). $\varepsilon > 0$ とし, $[u_\varepsilon^*, v_\varepsilon^*] \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H}$ を $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ に対する最適制御とする. このとき以下が成り立つ:

$$\bigl(u_\varepsilon^* + p_\varepsilon^*, h - u_\varepsilon^*\bigr)_{\mathscr{H}} \geq 0, \quad \forall h \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}} \ \text{ and } \ v_\varepsilon^* + z_\varepsilon^* = 0 \ \text{ in } \ \mathscr{H}.$$

なお, $[\eta_\varepsilon^*, \theta_\varepsilon^*] := \mathcal{S}_\varepsilon[u_\varepsilon^*, v_\varepsilon^*]$ in $[\mathscr{H}]^2$ であり $[p_\varepsilon^*, z_\varepsilon^*] \in [\mathscr{H}]^2$ は以下の随伴システムの一意解である:

$$\begin{cases} -\partial_t p_\varepsilon^* - \varDelta p_\varepsilon^* + \bigl(g'(\eta_\varepsilon^*) + \alpha''(\eta_\varepsilon^*) f_\varepsilon(\nabla\theta_\varepsilon^*)\bigr) p_\varepsilon^* + \alpha'(\eta_\varepsilon^*)[\nabla f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon^*) \cdot \nabla z_\varepsilon^* = \eta_\varepsilon^* - \eta_{\mathrm{ad}} \quad \text{in } Q, \\ -\partial_t(\alpha_0 z_\varepsilon^*) - \mathrm{div}\bigl(\alpha(\eta_\varepsilon^*)[\nabla^2 f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon^*)\nabla z_\varepsilon^* + \nu\nabla z_\varepsilon^* + \alpha'(\eta_\varepsilon^*) p_\varepsilon^* [\nabla f_\varepsilon](\nabla\theta_\varepsilon^*)\bigr) = \theta_\varepsilon^* - \theta_{\mathrm{ad}} \quad \text{in } Q, \\ \nabla p_\varepsilon^* \cdot n_\Gamma = 0, \quad z_\varepsilon^* = 0 \quad \text{in } \Sigma, \\ p_\varepsilon^*(T,x) = z_\varepsilon^*(T,x) = 0, \ x \in \Omega. \end{cases}$$

定理 4 ($\varepsilon \downarrow 0$ における必要条件の考察). 空間 $\mathscr{W}_0$ を以下で定める:

$$\mathscr{W}_0 := \left\{ \ \psi \in W^{1,2}(0,T;H) \cap \mathscr{V}_0 \ \middle| \ \psi(0,x) = 0, \ \forall x \in \Omega \ \right\}.$$

このとき, 問題 (OP) の最適制御 $[u^*, v^*] \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{H}$ と, $[\eta^*, \theta^*] = \mathcal{S}_0[u^*, v^*]$ が存在し, さらに, 以下の条件を満たす $[\xi^*, \zeta^*, \varpi^*] \in \mathscr{H} \times \mathscr{W}_0^* \times [L^\infty(Q)]^N$ が存在する:

$$\bigl(u^* + p^*, u - u^*\bigr)_{\mathscr{H}} \geq 0, \quad \forall u \in \mathscr{U}_{\mathrm{ad}}, \ v^* + z^* = 0 \ \text{ in } \ \mathscr{H}, \ \text{ and } \ \varpi^* \in \mathrm{Sgn}^N(\nabla\theta^*) \text{ a.e. in } Q,$$

$$\begin{bmatrix} -\partial_t p^* - \varDelta p^* + \bigl(g'(\eta^*) + \alpha''(\eta^*)|\nabla\theta^*|\bigr) p^* + \alpha'(\eta^*)\xi^* \\ -\partial_t(\alpha_0 z^*) + \zeta^* - \mathrm{div}(\nu^2 \nabla z^* + \alpha'(\eta^*) p^* \varpi^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^* - \eta_{\mathrm{ad}} \\ \theta^* - \theta_{\mathrm{ad}} \end{bmatrix} \ \text{ in } \ \mathscr{V}^* \times \mathscr{W}_0^*.$$

参考文献

[1] R. Kobayashi, J. A. Warren, and W. Craig Carter. A continuum model of grain boundaries. *Phys. D*, 140(1-2):141–150, 2000.

[2] R. Nakayashiki. Quasilinear type Kobayashi–Warren–Carter systems including dynamic boundary conditions *Adv. Math. Sci. Appl.*, 27(2):403-437, 2018.

[3] H. Antil, S. Kubota, K. Shirakawa, and N. Yamazaki. Optimal control problems governed by 1-D Kobayashi–Warren–Carter type systems Math. Control Relat. Fields (online first). `doi:10.3934/mcrf.2020036`

[4] S. Kubota, R. Nakayashiki, and K. Shirakawa. Optimal control problems for 1D parabolic state-systems of KWC types with dynamic boundary conditions *Adv. Math. Sci. Appl.*, 29(2):583–637, 2020.

[5] H. Antil, K. Shirakawa, and N. Yamazaki. A class of parabolic systems associated with optimal controls of grain boundary motions *Adv. Math. Sci. Appl.*, 27(2):299–336, 2018.

[6] J. Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$ *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146:65–96, 1987.

[7] V. Barbu. Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[8] P. Colli and J. Sprekels. Optimal control of an Allen–Cahn equation with singular potentials and dynamic boundary condition. *SIAM J. Control Optim.*, 53(1):213–234, 2015.