多重ゼータ関数の幾つかの繰込み値の間の関係について

小見山尚　(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)
Nao Komiyama　(Nagoya University)

1 Multiple zeta-function

複素数 $s_1, \dots, s_n$ に対し次で定まる級数を**多重ゼータ関数 (MZF)** と呼ぶ。

$$\zeta(s_1, \dots, s_n) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_n} \frac{1}{m_1^{s_1} \cdots m_n^{s_n}}$$

この級数は、

$$\{(s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{C}^n \mid \Re(s_{n-k+1} + \cdots + s_n) > k \ (1 \le k \le n)\}$$

において絶対収束することが知られている。2000 年初頭、Zhao([Z]) と秋山、江上、谷川 ([AET]) は独立に上記の関数が $\mathbb{C}^n$ 上に有理型接続できることを示した。特に、[AET] では次のように MZF の具体的な極がすべて求められている。

命題 1.1 ([AET])**.** 関数 $\zeta(s_1, \dots, s_n)$ の極の集合は次で与えられる。

$$\left\{ (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} s_n = 1, \ s_{n-1} + s_n = 2, 1, 0, -2, -4, \cdots , \\ s_{n-k+1} + \cdots + s_n = k - r \ (3 \le k \le n, \ r \in \mathbb{N}_0) \end{array} \right\}$$

この命題から $n \ge 2$ に対し $\zeta(s_1, \dots, s_n)$ の極が無数に存在することが分かる。特に $n \ge 3$ では非正整数点はすべて特異点になることも分かる。これまでにこれら非正整数点での” 適切な” 特殊値を定める手法が幾つか提唱されてきた。ここでは、繰込み法と呼ばれる手法についての説明とそれにより得られる特殊値の間の関係について説明する。

2 繰込み法

繰込み法 (英語では **Renormalization** と呼ばれる) とは、そもそも量子場理論において値が発散してしまう計算結果に対し発散項を適切に除去することでその発散を解消する操作の事である。Connes と Kreimer は

[CK] において、Hopf 代数の言葉を用いて renormalization が行えることを示した。[GZ], [MP], [EMS] ではこの方法を用いて多重ゼータ関数の極における" 特殊値" を与えることに成功した。まず Connes と Kreimer の主張を述べるために幾つかの準備を行う。

以下、$\mathbb{K}$ を $\mathbb{C}$ もしくは $\mathbb{Q}$ として、$\mathcal{H}$ を $\mathbb{K}$ 上の connected filtered Hopf 代数、$\mathcal{A} := \mathbb{K}[\frac{1}{z}, z]] := \mathbb{K}[[z]][\frac{1}{z}]$ を Laurent 級数全体からなる $\mathbb{K}$-代数とする。このとき、$\mathbb{K}$-線形写像 $\phi, \psi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ に対し **convolution** $\phi * \psi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ を

$$\phi * \psi := m_{\mathcal{A}} \circ (\phi \otimes \psi) \circ \Delta_{\mathcal{H}}$$

により定める。ただし $m_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{A}$ の product、$\Delta_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ の coproduct を表すとする。

また、$\mathcal{A}$ の部分代数 $\mathcal{A}_- := \frac{1}{z}\mathbb{K}[\frac{1}{z}]$ と $\mathcal{A}_+ := \mathbb{K}[[z]]$ に対し $\mathcal{A} = \mathcal{A}_- \oplus \mathcal{A}_+$ という分解を考える。このとき次が成り立つ。

定理 2.1 ([CK], [EMS], [M]: **代数的 Birkhoff 分解**)**.** $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{A}$ を $\phi(1) = 1$ を満たす $\mathbb{K}$-線形写像とする。 このとき、

$$\phi = \phi_-^{-1} * \phi_+$$

を満たす $\phi_- : \mathcal{H} \to \mathbb{K} \oplus \mathcal{A}_-$ と $\phi_+ : \mathcal{H} \to \mathcal{A}_+$ が一意に存在し $\phi_-(1) = 1$ を満たす。さらに ϕ が代数射のならば ϕ_- と ϕ_+ も代数射になる。

上記の定理を用いて以下繰込み値の定義を各節で与えていく。

2.1 Guo, Zhang による繰込み値

まず、[GZ] で導入された Hopf 代数 $\mathcal{H}_G$ の説明を行う。 G を可換な半群で次で定義されるものとする。

$$G := \left\{ \left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \right] \mid s \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}_{>0} \right\}.$$

但し、G の積は $\left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \right]\left[\begin{smallmatrix} s' \\ t' \end{smallmatrix} \right] := \left[\begin{smallmatrix} s+s' \\ t+t' \end{smallmatrix} \right]$ と定められるとする。このとき、$\mathcal{H}_G$ を G の元で生成される $\mathbb{C}$ 上非可換多項式環とする、すなわち

$$\mathcal{H}_G := \sum_{r \geq 0} \mathbb{C}G^r.$$

ここで、$G^0 := \{\mathbf{1}\}$ かつ $G^r := \underbrace{G \times \cdots \times G}_{r}$ $(r \geq 1)$ とする。しばしば G^r の元を $\left[\begin{smallmatrix} s_1, \ldots, s_r \\ t_1, \ldots, t_r \end{smallmatrix} \right]$ と書くことにもする。すると、$(\mathcal{H}_G, *, \Delta)$ は connected filtered Hopf 代数になる。但し、積 $*$ は調和積と呼ばれる次で与えられるものである: $\mathbf{1} * w := w * \mathbf{1} := w$ かつ

$$\left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right] w * \left[\begin{smallmatrix} s' \\ t' \end{smallmatrix}\right] w' := \left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right] (w * \left[\begin{smallmatrix} s' \\ t' \end{smallmatrix}\right] w') + \left[\begin{smallmatrix} s' \\ t' \end{smallmatrix}\right] (\left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right] w * w') + \left[\begin{smallmatrix} s+s' \\ t+t' \end{smallmatrix}\right] (w * w')$$

($s, s' \in \mathbb{Z}$ かつ $t, t' \in \mathbb{R}_{>0}$ かつ語 $w, w' \in \mathcal{H}_G$)。また、余積 Δ は deconcatenation coproduct と呼ばれる次で与えられるものとする: 任意の語 $w \in \mathcal{H}_G$ に対し、

$$\Delta(w) := \sum_{w = w_1 w_2} w_1 \otimes w_2.$$

次に $\zeta_{\mathrm{GZ}}(-k_1, \ldots, -k_r)$ を定義するために使われる代数準同型 $\widetilde{Z} : \mathcal{H}_G \to \mathbb{C}[T][[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$ の定義を確認する。$r \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{Z}$ かつ $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し、次を考える。

$$Z(\left[\begin{smallmatrix} s_1, \ldots, s_r \\ t_1, \ldots, t_r \end{smallmatrix}\right]; \varepsilon) := \sum_{0 < n_1 < \cdots < n_r} \frac{e^{n_1 t_1 \varepsilon} \cdots e^{n_r t_r \varepsilon}}{n_1^{s_1} \cdots n_r^{s_r}}.$$

また $\mathbb{C}\{\{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\}$ を $\mathbb{C}$ 上の収束 Laurent 級数環とする。このとき次が成り立つ。

定理 2.2 ([GZ, Theorem 3.3])**.** *$r \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_r \in \mathbb{Z}$ かつ $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し、$Z(\left[\begin{smallmatrix} s_1, \ldots, s_r \\ t_1, \ldots, t_r \end{smallmatrix}\right]; \varepsilon)$ は $\mathbb{C}\{\{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\}[\log(-\varepsilon)]$ の元である。*

この定理により Z は $\mathcal{H}_G$ から $\mathbb{C}\{\{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\}[\log(-\varepsilon)]$ への代数準同型とみなすことが出来る。この写像 Z と埋め込み $u : \mathbb{C}\{\{\varepsilon, \varepsilon^{-1}\}[\log(-\varepsilon)] \to \mathbb{C}[T][[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]; -\log(-\varepsilon) \mapsto T$ の合成により、代数準同型 $\widetilde{Z} : \mathcal{H}_G \to \mathbb{C}[T][[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$ を次のように定義する。

$$\widetilde{Z} := u \circ Z.$$

定理 2.1 を $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ として $\widetilde{Z}$ に適用することで代数準同型 $\widetilde{Z}_+ : \mathcal{H}_G \to \mathbb{C}[T][[\varepsilon]]$ を得る。

定義 2.3 ([GZ, Definition 4.1])**.** $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、繰込み値を

$$\zeta_{\mathrm{GZ}}(-k_1, \ldots, -k_r) := \lim_{\delta \to +0} \lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{Z}_+(\left[\begin{smallmatrix} -k_1, \ldots, -k_r \\ k_1 + \delta, \ldots, k_r + \delta \end{smallmatrix}\right]; \varepsilon)$$

と定義する。

2.2 Manchon, Paychaによる繰込み値

§2.1と同様に[MP]で導入されたHopf代数と代数準同型の説明を行う。$\mathcal{Y}$を次の集合で生成される$\mathbb{C}$上非可換多項式環とする。

$$\{y_a \mid a \in \mathbb{C}\}.$$

このとき組$(\mathcal{Y}, ш, \Delta)$及び$(\mathcal{Y}, *, \Delta)$はconnected filtered Hopf代数になる。ここで積$ш$及び$*$は通常のシャッフル積及び調和積とする。また、余積Δはdeconcatenation coproductとする。今、これらの間の$\mathbb{C}$上線形写像$\exp_H : (\mathcal{Y}, ш, \Delta) \to (\mathcal{Y}, *, \Delta)$と$\log_H : (\mathcal{Y}, *, \Delta) \to (\mathcal{Y}, ш, \Delta)$を以下で定める。

$$\exp_H(u) := \sum_{\mathrm{I}=(i_1,\dots,i_j)\in\mathcal{P}(n)} \frac{1}{i_1!\cdots i_j!}\mathrm{I}[u],$$
$$\log_H(u) := \sum_{\mathrm{I}=(i_1,\dots,i_j)\in\mathcal{P}(n)} \frac{(-1)^{n-j}}{i_1\cdots i_j}\mathrm{I}[u],$$

(これらは互いに逆写像になる)。ここで$\mathcal{P}(n)$は自然数nの全ての分解からなる集合、すなわち、$i_1+\cdots+i_j=n$となる自然数の列$\mathrm{I}=(i_1,\cdots,i_j)$全体の集合とする。また、語$u=y_{a_1}\cdots y_{a_n}\in\mathcal{Y}$と$n$の分解$\mathrm{I}=(i_1,\cdots,i_j)$に対し、新たな語$\mathrm{I}[u]$を次で定義する。

$$\mathrm{I}[u] := y_{a_1+\cdots+a_{i_1}} y_{a_{i_1+1}+\cdots+a_{i_1+i_2}} \cdots y_{a_{i_1+\cdots+i_{k-1}+1}+\cdots+a_n}.$$

例 2.4. 定義から$a, b \in \mathbb{C}$に対し、

$$\mathcal{P}(1)=\{(1)\}, \quad \mathcal{P}(2)=\{(2),(1,1)\}, \quad \mathcal{P}(3)=\{(3),(2,1),(1,2),(1,1,1)\},$$

であるので次を得る。

$$\exp_H(y_a)=y_a, \quad \log_H(y_a)=y_a,$$
$$\exp_H(y_ay_b)=y_ay_b+\frac{1}{2}y_{a+b}, \quad \log_H(y_ay_b)=y_ay_b-\frac{1}{2}y_{a+b}.$$

定理 2.5 ([H00, Theorem 3.3])**.** 線形写像$\exp_H$と$\log_H$は*Hopf*代数同型写像になる。

$z\in\mathbb{C}$に対し、同型写像$\mathcal{R}_z : (\mathcal{Y}, ш, \Delta) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{Y}, ш, \Delta)$を

$$\mathcal{R}_z(y_{a_1}\cdots\ y_{a_n}) := y_{a_1-z}\cdots\ y_{a_n-z},$$

と定め、これを用いて同型写像 $\widetilde{\mathcal{R}}_z : (\mathcal{Y}, *, \Delta) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{Y}, *, \Delta)$ を

$$\widetilde{\mathcal{R}}_z := \exp_H \circ \mathcal{R}_z \circ \log_H$$

と定義する。また、$\mathcal{M}_z(\mathbb{C})$ を $\mathbb{C}$ 上有理型関数の成す $\mathbb{C}$ 上代数とする。さらに写像 ζ^* を

$$\zeta^*(y_{a_r} \cdots y_{a_1}) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{a_1} \cdots m_r^{a_r}},$$

として、これを用いて $\Phi : \mathcal{Y} \to \mathcal{M}_z(\mathbb{C})$ を

$$\Phi(y_{a_r} \cdots\ y_{a_1})(z) := \zeta^* \circ \widetilde{\mathcal{R}}_z(y_{a_r} \cdots\ y_{a_1})$$

$(a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C})$ と定める。写像 ζ^* 及び $\widetilde{\mathcal{R}}_z$ の定義により Φ は代数準同型になることが分かる。従って定理 2.1 を $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ として Φ に適用することで代数準同型 Φ_+ を得る。

定義 2.6. $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、繰込み値を

$$\zeta_{\mathrm{MP}}(-k_1, \ldots, -k_r) := \lim_{z \to 0} \mathit{\Phi}_+(y_{-k_r} \cdots\ y_{-k_1})(z)$$

と定義する。

注意 2.7. $r = 2$ の場合については *[GZ]* 及び *[MP]* で具体的に繰込み値の明示式が以下のように与えられている。*[GZ, Corollary 4.13]* において $\zeta_{\mathrm{GZ}}(-k_1, 0) = \zeta(0)\zeta(-k_1) - \zeta(-k_1 - 1)$ かつ

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathrm{GZ}}(-k_1, -k_2) = &\sum_{i+j=k_2} \binom{k_2}{i} \zeta(-i)\zeta(-k_1 - j) - \frac{1}{k_2 + 1}\zeta(-k_1 - k_2 - 1) \\ &+ \sum_{i+j=k_2} \binom{k_2}{i} \frac{(-1)^{k_1+i+1}}{k_1 + i + 1} \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2}\right)^{k_1+i+1} \zeta(-k_1 - k_2 - 1),\end{aligned}$$

（$k_1 \geq 0,\ k_2 \geq 1$）となることが、一方 *[MP, (77)]* において

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathrm{MP}}(-k_1, -k_2) = &\frac{1}{k_1 + 1} \sum_{i=0}^{k_1+1} \binom{k_1 + 1}{i} B_i \zeta(-k_1 - k_2 + i - 1) + \zeta(-k_1)\zeta(-k_2) \\ &+ (-1)^{k_2+1} \frac{k_1! k_2!}{2(k_1 + k_2 + 2)!} B_{k_1+k_2+2},\end{aligned}$$

$(k_1, k_2 \geq 0)$ となることが示されている。

2.3 Ebrahimi-Fard, Manchon, Singer による繰込み値

前節までと同様に [EMS] の繰込み値を導入するために Hopf 代数を構成しよう。まず $L := \{d, y\}$ として、L^* を単位元 1 を持つ L の自由 monoid とする。また、$Y := \{1\} \cup L^* y$ として、$w \in Y$ に対し**深さ** $\mathrm{dp}(w)$ を w に現れる y の個数、**重さ** $\mathrm{wt}(w)$ を w に現れる文字の個数とする。そして、$\mathbb{Q}\langle L\rangle$ を L の元で生成される単位元を持つ結合的な非可換自由 $\mathbb{Q}$-代数とする。この $\mathbb{Q}\langle L\rangle$ に対し次のような $\mathbb{Q}$-線形写像 $ш_0 : \mathbb{Q}\langle L\rangle \otimes \mathbb{Q}\langle L\rangle \to \mathbb{Q}\langle L\rangle$ を考えると $(\mathbb{Q}\langle L\rangle, ш_0)$ は非結合的な非可換 $\mathbb{Q}$-代数になる。

$$\begin{aligned} \mathbf{1}\, ш_0\, w &:= w\, ш_0\, \mathbf{1} := w \quad (w \in L^*), \\ yu\, ш_0\, v &:= u\, ш_0\, yv := y(u\ \ ш_0\ \ v) \quad (u, v \in L^*), \\ du\, ш_0\, dv &:= d(u\, ш_0\, dv) - u\, ш_0\, d^2 v \quad (u, v \in L^*). \end{aligned}$$

但し、$ш_0$ は $\mathrm{wt}(w)$ に関して帰納的に定めるものとする。

次に $\mathbb{Q}\langle L\rangle$ の元のうち末尾が d であるもので生成される部分空間として

$$\mathcal{T}_- := \langle \{wd \mid w \in L^*\}\rangle_{\mathbb{Q}},$$

を、$(\mathbb{Q}\langle L\rangle, ш_0)$ の元のうち次のような元で生成される両側イデアルとして

$$\mathcal{L}_- := \langle d^k\{d(u\ ш_0\ v) - du\ ш_0\ v - u\ ш_0\ dv\} \mid k \in \mathbb{N}_0,\ u, v \in L^*\ \rangle_{(\mathbb{Q}\langle L\rangle, ш_0)},$$

を考える。すると、

$$\mathcal{H}_0 := \mathbb{Q}\langle L\rangle / (\mathcal{T}_- + \mathcal{L}_-).$$

は connected filtered Hopf 代数になる ([EMS] Corollary 3.22 参照)。また、$k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ に対し $\mathbb{Q}$-線形写像 $\phi : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{A}$ を次のように定める。

$$d^{k_1} y \cdots d^{k_n} y \mapsto \phi(d^{k_1} y \cdots d^{k_n} y)(z) := \partial_z^{k_1}\left(x\partial_z^{k_2}\right)\cdots\left(x\partial_z^{k_n}\right)(x(z))$$

但し、$\phi(1) := 1$ であり $x := x(z) := \frac{e^z}{1-e^z} \in \mathcal{A}$ かつ ∂_z は z による微分とする。すると、この $\mathcal{H}_0$ と ϕ に定理 2.1 が適用出来る。ϕ は代数準同型になるので ϕ_+ も代数準同型になり、次のような定義が出来る。

定義 2.8 ([EMS] §4.2)**.** $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ に対し繰込み値を次のように定める。

$$\zeta_{\mathrm{EMS}}(-k_1, \ldots, -k_n) := \lim_{z \to 0} \phi_+(d^{k_n} y \cdots d^{k_1} y)(z)$$

3　繰込み値の間の関係式

2章で定義した繰込み値の間の関係を述べるためにこれらの母関数を考える。すなわち $\bullet =$ GZ 又は MP 又は EMS と $r \geq 1$ に対し、

$$Z_\bullet(t_1, \ldots, t_r) := \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{\infty} \frac{(-t_1)^{k_1} \cdots (-t_r)^{k_r}}{k_1! \cdots k_r!} \zeta_\bullet(-k_1, \ldots, -k_r) \in \mathbb{Q}[[t_1, \ldots, t_r]]$$

と定義する。また、$i \leq r$ なる $r, i \in \mathbb{N}$ に対し、$\mathcal{P}(r,i)$ を $\{1, \ldots, r\}$ から $\{1, \ldots, i\}$ への全射全体からなる集合とする。また $\sigma \in \mathcal{P}(r,i)$ と $1 \leq k \leq i$ に対し、

$$t_{\sigma^{-1}(k)} := \sum_{n \in \sigma^{-1}(k)} t_n$$

と定義する。このとき次が成り立つ。

定理 3.1. $\bullet =$ GZ 又は MP とすると $r \geq 1$ に対し、

$$Z_{\text{EMS}}(t_1, \ldots, t_r) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(r,i)} Z_\bullet\left(u_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, u_{\sigma^{-1}(i)}\right).$$

但し $u_{\sigma^{-1}(k)}$ は $u_i := t_i + \cdots + t_r$ $(1 \leq i \leq r)$ に対し

$$u_{\sigma^{-1}(k)} := \sum_{n \in \sigma^{-1}(k)} u_n,$$

と定める。

参考文献

[AET] S.Akiyama, S.Egami, Y.Tanigawa, *Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers*, Acta. Arith. 2001, no. 2, 107-116.

[CK] A.Connes, D.Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, 2000, Comm. Math. Phys. 210(1):249-273.

[EMS] K.Ebrahimi-Fard, D.Manchon, J.Singer, *The Hopf algebra of (q)multiple polylogarithms with non-positive arguments*, 2015, arXiv:1503.02977.

[GZ] L. Guo, B. Zhang, *Renormalization of multiple zeta values*, 2008, J. Algebra **319**, no. 9, 3770–3809.

[H00] M. E. Hoffman, *Quasi-Shuffle Products*, J. Algebraic Combin. **11** (2000), 49–68.

[K] N.Komiyama, *Equivalence between desingularized and renormalized values of multiple zeta functions at negative arguments*, in preparation.

[M] D.Manchon, *Hopf algebras in renormalization*, 2008, Handbook of algebra, Vol.5, 365-427.

[MP] D. Manchon, S. Paycha, *Nested sums of symbols and renormalized multiple zeta values*, 2010, Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 24, 4628–4697.

[Z] J.Zhao, *Analytic continuation of multiple zeta functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 2000, no. 5, 1275-1283.