

# 空間非一様な量子ウォークの長時間平均分布

横浜国立大学大学院理工学府 数物・電子情報系理工学専攻  
黄海 仲星 (Chusei Kiumi)

## 概要

離散時間量子ウォークは量子版のランダムウォークと呼ばれる数理モデルであり、その応用可能性は多くの研究分野において注目されている。特に直線 ( $\mathbb{Z}$ ) 上の 2 状態量子ウォークは量子ウォークの性質を示す、基本的なモデルとして重要である [1, 4, 12]。ウォーカーのダイナミクスが場所に依存するモデルを、空間非一様量子ウォークモデルとよび、応用的な側面から盛んに研究されている。例えば、原点のみで異なる作用をする一欠陥モデルは、量子探索アルゴリズムと関係があるとされ [2, 3, 15]、正の領域と負の領域で異なる作用をする二相系モデルはトポロジカル絶縁体の研究と関連があるとされている [14]。本研究では特に、上記の二つのモデルを含んだ、一欠陥付二相系モデルについて扱う。このモデルの特徴として、局在化と呼ばれる、古典ランダムウォークにはない興味深い性質を持つ。これは無限時間において、ある場所でウォーカーが正の確率で留まることを意味する。また、量子ウォークの時間発展作用素が固有値を持つことと、局在化が起こることに非常に深い関係があることが知られており [19, 17, 18]、その固有値と固有ベクトルによって得られる長時間平均分布から、局在化の量を調べることができる。本研究では、転送行列を用いた固有値解析を用いて、一欠陥付二相系モデルの局在化について深く調べる。

## 1 モデルの定義

本章では本研究で扱う一欠陥付二相系量子ウォークを導入する。

### 1.1 $\mathbb{Z}$ 上の量子ウォーク

まず初めに、我々のモデルを導入する前に、一般的な  $\mathbb{Z}$  上の 2 状態を持つ量子ウォークの定義を紹介する。量子系の状態空間を与えるヒルベルト空間を  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^2)$  で定める。また、量子ウォークの時間発展作用素  $U$  は  $\mathcal{H}$  上のユニタリ作用素であるシフトオペレーター  $S$  とコインオペレーター  $C$  の積で与える。時間発展作用素は  $U = SC$  であるので、当然これも  $\mathcal{H}$  上のユニタリ作用素となる。ここで、任意の  $\Psi \in \mathcal{H}$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ , および  $\Psi(x) = {}^T [\Psi_L(x) \quad \Psi_R(x)]$  に対し、 $S, C$  は以下で定められる。

$$(S\Psi)(x) = \begin{bmatrix} \Psi_L(x+1) \\ \Psi_R(x-1) \end{bmatrix}, \quad (C\Psi)(x) = \tilde{C}_x \Psi(x).$$

また、 $\{\tilde{C}_x\}_{x \in \mathbb{Z}}$  は 2 次のユニタリ行列の列であり、一般性を失うことなく以下の形で与えられるものとする。

$$\tilde{C}_x = e^{i\Delta_x} \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ -\beta_x & \bar{\alpha}_x \end{bmatrix},$$

ただし、各  $x \in \mathbb{Z}$  に対し  $\alpha_x, \beta_x \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha_x \neq 0$ ,  $\Delta_x \in [0, 2\pi)$  であり  $|\alpha_x|^2 + |\beta_x|^2 = 1$  を満たす。このとき、

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{C}_x, \quad Q_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{C}_x,$$

とすると、定義から以下が得られる。

$$(U\Psi)(x) = P_{x+1}\Psi(x+1) + Q_{x-1}\Psi(x-1), \quad x \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

**Remark 1.1.** もし、ある  $x_0 \in \mathbb{Z}$  において  $\alpha_{x_0} = 0$  であれば、

$$P_x P_{x+1} = Q_x Q_{x-1} = O$$

となるため、場所  $x_0$  は反射壁となり、 $\mathbb{Z}$  は非連結な領域に分割されるため、本質的に半直線上の量子ウォークとなる。したがって、本研究では任意の  $x \in \mathbb{Z}$  において  $\alpha_x \neq 0$  を仮定する。

$\Psi_0 \in \mathcal{H}$  ( $\|\Psi_0\|^2 = 1$ ) を量子ウォークの初期状態とする。ここで、量子ウォークが局在化を生じることは、ある頂点  $x_0 \in \mathbb{Z}$  に対し、 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mu_t^{(\Psi_0)}(x_0) > 0$  を満たす初期状態が存在することをいう。特に、局在化が生じることは  $U$  に固有値が存在すること、すなわち

$$U\Psi = e^{i\lambda}\Psi$$

を満たす  $\lambda \in [0, 2\pi)$ ,  $\Psi \in \mathcal{H}$  が存在することと同値であることが知られている。さらに、次のように長時間平均極限分布  $\bar{\nu}_\infty(x)$  を定める。

$$\bar{\nu}_\infty(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \|\Psi_t(x)\|^2$$

**Lemma 1.2.**  $m_\lambda = \dim \ker(U - \lambda)$  とし、 $\Psi_j^\lambda$  を  $U$  の固有値  $e^{i\lambda}$  に対応する正規化された固有ベクトルとする。すなわち、 $\Psi_j^\lambda \in \ker(U - \lambda)$ ,  $\|\Psi_j^\lambda\|^2 = 1$  とすると、長時間平均極限分布  $\bar{\nu}_\infty(x)$  は以下のように与えられる。

$$\bar{\nu}_\infty(x) = \sum_{\lambda \in \sigma_p(U)} \sum_{j, j'=1}^{m_\lambda} \overline{\langle \Psi_{j'}^\lambda, \Psi_0 \rangle_{\mathcal{H}}} \langle \Psi_j^\lambda, \Psi_0 \rangle_{\mathcal{H}} \times |\langle \Psi_{j'}^\lambda(x), \Psi_j^\lambda(x) \rangle_{\mathbb{C}^2}|^2.$$

**Theorem 1.3.** ある定数  $N$  が存在して、任意の  $|x| > N$  を満たす場所  $x$  において、 $(\alpha_x, \beta_x, \Delta_x)$  が定数の組  $(\alpha, \beta, \Delta)$  となるとき、任意の  $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$  に対して、 $|\cos(\lambda - \Delta)| > |\alpha|$  が成り立つ。ここで、 $\sigma_p(U)$  は  $U$  の固有値の集合全体とする。

*Proof.* [16] 参照。 □

$\mathcal{H}$  上のユニタリ作用素  $J$  を以下で与える。

$$(J\Psi)(x) = \begin{bmatrix} \Psi_L(x-1) \\ \Psi_R(x) \end{bmatrix}, \quad \Psi \in \mathcal{H}, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

その逆作用素は以下によって与えられる。

$$(J^{-1}\Psi)(x) = \begin{bmatrix} \Psi_L(x+1) \\ \Psi_R(x) \end{bmatrix}, \quad \Psi \in \mathcal{H}, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

さらに,  $\lambda \in [0, 2\pi)$ ,  $x \in \mathbb{Z}$  に対し, 転送行列  $T_x(\lambda)$  を以下で定める.

$$T_x(\lambda) = \frac{1}{\alpha_x} \begin{bmatrix} e^{i(\lambda - \Delta_x)} & -\beta_x \\ -\overline{\beta_x} & e^{-i(\lambda - \Delta_x)} \end{bmatrix}.$$

転送行列は正規行列であり, その逆行列は以下である.

$$T_x^{-1}(\lambda) = \frac{\alpha_x}{|\alpha_x|^2} \begin{bmatrix} e^{-i(\lambda - \Delta_x)} & \beta_x \\ \overline{\beta_x} & e^{i(\lambda - \Delta_x)} \end{bmatrix}.$$

これらを用いると, 本研究の鍵となる次の命題が得られる

**Proposition 1.4.**  $\lambda \in [0, 2\pi)$  と  $\Psi \in \mathcal{H}$  に対して, 以下の (i) と (ii) は同値である.

- (i)  $\Psi \in \ker(U - e^{i\lambda})$ .
- (ii)  $(J\Psi)(x+1) = T_x(\lambda)(J\Psi)(x)$ ,  $x \in \mathbb{Z}$ .

*Proof.*  $\Psi \in \ker(U - e^{i\lambda})$  が成立することは任意の  $x \in \mathbb{Z}$  に対して,

$$\begin{aligned} e^{i\lambda}\Psi_L(x-1) &= e^{i\Delta_x}(\alpha_x\Psi_L(x) + \beta_x\Psi_R(x)), \\ e^{i\lambda}\Psi_R(x+1) &= e^{i\Delta_x}(-\overline{\beta_x}\Psi_L(x) + \overline{\alpha_x}\Psi_R(x)). \end{aligned}$$

が成立することと同値である. これを直接計算することで, 以下を得る.

$$\begin{bmatrix} e^{i\Delta_x}\alpha_x & 0 \\ -e^{i\Delta_x}\overline{\beta_x} & -e^{i\lambda} \end{bmatrix} (J\Psi)(x+1) = \begin{bmatrix} e^{i\lambda} & -e^{i\Delta_x}\beta_x \\ 0 & -e^{i\Delta_x}\overline{\alpha_x} \end{bmatrix} (J\Psi)(x)$$

すなわち,

$$(J\Psi)(x+1) = \frac{1}{\alpha_x} \begin{bmatrix} e^{i(\lambda - \Delta_x)} & -\beta_x \\ -\overline{\beta_x} & e^{-i(\lambda - \Delta_x)} \end{bmatrix} (J\Psi)(x)$$

である. □

**Corollary 1.5.**  $\lambda \in [0, 2\pi)$  と  $\varphi \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  に対して,  $\tilde{\Psi} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^2$  を次のように定義する.

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} T_{x-1}(\lambda)T_{x-2}(\lambda)\cdots T_1(\lambda)T_0(\lambda)\varphi, & x > 0, \\ \varphi, & x = 0, \\ T_x^{-1}(\lambda)T_{x+1}^{-1}(\lambda)\cdots T_{-2}^{-1}(\lambda)T_{-1}^{-1}(\lambda)\varphi, & x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

このとき,  $\tilde{\Psi} \in \mathcal{H}$  を満たす  $\varphi$  の存在性は  $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$  であるための必要十分条件を与える.

**Lemma 1.6.** 定数  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  と  $\Delta \in [0, 2\pi)$  に対して,  $x > N$  または  $x < -N$  を満たす場所  $x$  において,  $(\alpha_x, \Delta_x) = (\alpha, \Delta)$  満たすとする. この時,  $|\cos(\lambda - \Delta)| \leq |\alpha|$  ならば  $e^{i\lambda} \notin \sigma_p(U)$  である.

## 1.2 一欠陥付二相系量子ウォーク

本研究においては,  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$ ,  $\Delta_j \in [0, 2\pi)$  ( $|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2 = 1$ ,  $\alpha_j \neq 0$ ,  $j = m, o, p$ ) に対し以下で定義される一欠陥付二相系量子ウォークを扱う.

$$(\alpha_x, \beta_x, \Delta_x) = \begin{cases} (\alpha_m, \beta_m, \Delta_m), & x < 0, \\ (\alpha_o, \beta_o, \Delta_o), & x = 0, \\ (\alpha_p, \beta_p, \Delta_p), & x > 0. \end{cases} \quad (3)$$

また, 同様の記法を  $T_x(\lambda)$ ,  $\zeta_{x,\pm}$ ,  $|v_{x,\pm}\rangle$  にもそれぞれ適用する.

**Theorem 1.7.**  $\lambda \in [0, 2\pi)$  に対し,  $e^{i\lambda} \in \sigma_p(U)$  は  $|\cos(\lambda - \Delta_j)| > |\alpha_j|$ ,  $j \in \{p, m\}$  かつ  $\det D(\lambda) = 0$  と同値であり, このとき重複度は 1 である. ただし,  $D(\lambda)$  は以下で与えられる  $2 \times 2$  行列であり,  $|v_{j,\pm}^\perp\rangle$  は  $\langle v_{j,\pm}^\perp, v_{j,\pm} \rangle = 0$ ,  $j \in \{p, m\}$  を満たす非零のベクトルである.

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} \langle v_{p,s_p}^\perp, v_{o,+} \rangle \zeta_{o,+} & \langle v_{p,s_p}^\perp, v_{o,-} \rangle \zeta_{o,-} \\ \langle v_{m,s_m}^\perp, v_{o,+} \rangle & \langle v_{m,s_m}^\perp, v_{o,-} \rangle \end{bmatrix},$$

ただし,  $s_p, s_m$  は以下で定められた符号とする.

$$s_p = \begin{cases} +, & -\cos(\lambda - \Delta_p) > 0, \\ -, & -\cos(\lambda - \Delta_p) < 0. \end{cases} \quad s_m = \begin{cases} +, & \cos(\lambda - \Delta_m) > 0, \\ -, & \cos(\lambda - \Delta_m) < 0. \end{cases}$$

## 2 主結果

本章では, 定理 1.7 を用いて, 5つのクラスに対して固有値解析を行う. 以下の定理は固有値が存在するための必要十分条件と, その固有値の具体的な値を示している. なお, これらのモデルの内, 4つのモデルは先行研究のモデルを包含したモデルである.

**Theorem 2.1.**  $(\alpha_p, \beta_p, \Delta_p) = (\alpha_m, \beta_m, \Delta_m) = (\alpha, \beta, \Delta)$  と  $\Delta_o = \Delta$  を仮定する.  $|\beta|^2 > \Re(\beta\bar{\beta}_o)$  が成立するときに限り,  $U$  の固有値は以下のように与えられる.

$$e^{i\lambda_1} = \frac{(\Re(\beta_o\beta) - 1) + i\sqrt{|\beta|^2 - \Re^2(\beta_o\beta)}}{\sqrt{1 + |\beta|^2 - 2\Re(\beta_o\beta)}} e^{i\Delta}, \quad e^{i\lambda_2} = -e^{i\lambda_1},$$

$$e^{i\lambda_3} = \frac{(\Re(\beta_o\beta) - 1) - i\sqrt{|\beta|^2 - \Re^2(\beta_o\beta)}}{\sqrt{1 + |\beta|^2 - 2\Re(\beta_o\beta)}} e^{i\Delta}, \quad e^{i\lambda_4} = -e^{i\lambda_3}.$$

**Theorem 2.2.**  $(\alpha_p, \beta_p, \Delta_p) = (\alpha_m, \beta_m, \Delta_m) = (\alpha, \beta, \Delta)$  と  $\beta_o = \beta$  を仮定する. 以下の *Condition 1* または *Condition 2* が成立するときに限り,  $U$  の固有値が存在する.

- Condition 1 :  $|\beta| \cos(\Delta_o - \Delta) - |\alpha| \sin(\Delta_o - \Delta) < |\beta|$ .
- Condition 2 :  $|\beta| \cos(\Delta_o - \Delta) + |\alpha| \sin(\Delta_o - \Delta) < |\beta|$ .

そして,  $U$  の固有値は次のように与えられる.

- *Condition 1* が成立するとき,  $e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2} \in \sigma_p(U)$  であり,

$$e^{i\lambda_1} = \frac{|\beta|(|\beta| + i|\alpha|)e^{i\Delta_o} - e^{i\Delta}}{||\beta|(|\beta| + i|\alpha|)e^{i\Delta_o} - e^{i\Delta}|}, \quad e^{i\lambda_2} = -e^{i\lambda_1}.$$

- *Condition 2* が成立するとき,  $e^{i\lambda_3}, e^{i\lambda_4} \in \sigma_p(U)$  であり,

$$e^{i\lambda_3} = \frac{|\beta|(|\beta| - i|\alpha|)e^{i\Delta_o} - e^{i\Delta}}{||\beta|(|\beta| - i|\alpha|)e^{i\Delta_o} - e^{i\Delta}|}, \quad e^{i\lambda_4} = -e^{i\lambda_3}.$$

特に, *Condition 1* と *Condition 2* が両方成立するとき,  $U$  は上記の 4 つの固有値を持つ.

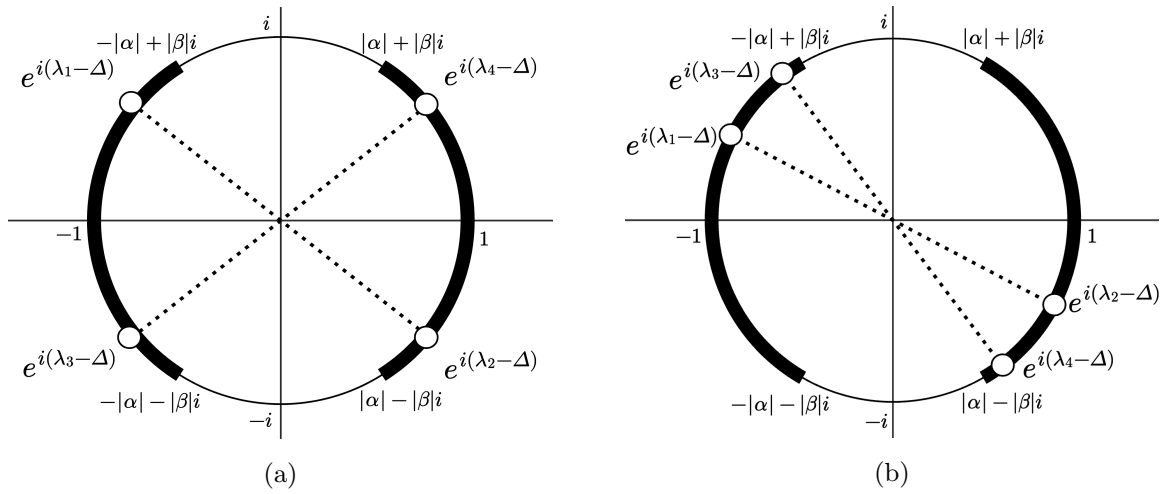


図 1: (a) と (b) はそれぞれ Theorem 2.1 と Theorem 2.2 における一欠陥モデルの固有値を  $-\Delta$  回転したものを白丸で表した図である. 黒の太線はそれらの存在範囲を表したものである.

**Remark 2.3.** *Theorem 2.1* と *Theorem 2.2* のモデルは以下の先行研究を拡張したモデルとなっている.

- *Endo, Konno, Segawa, Takei (2014) [8]* :

$$(\alpha, \beta, \Delta) = \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{2} \right), \quad (\alpha_o, \beta_o, \Delta_o) = (i \cos \xi, i \sin \xi, \frac{3\pi}{2}), \quad \xi \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

- *Wojcik et al. (2012) [20], Endo, Konno (2014) [10]* :

$$(\alpha, \beta, \Delta) = \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{2} \right), \quad (\alpha_o, \beta_o, \Delta_o) = \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{2} + 2\pi\phi \right), \quad \phi \in (0, 1).$$

**Theorem 2.4.**  $(\alpha_o, \beta_o, \Delta_o) = (\alpha_p, \beta_p, \Delta_p)$  と  $\arg \beta_p = \arg \beta_m$  を仮定する,  $\cos(\Delta_m - \Delta_p) < |\beta_m| |\beta_p| - |\alpha_m| |\alpha_p|$  が成立するとき限り,  $U$  の固有値は以下のように与えられる.

$$e^{i\lambda_1} = \frac{|\beta_p| e^{i\Delta_m} - |\beta_m| e^{i\Delta_p}}{||\beta_p| e^{i\Delta_m} - |\beta_m| e^{i\Delta_p}|}, \quad e^{i\lambda_2} = -e^{i\lambda_1}.$$

**Theorem 2.5.**  $(\alpha_o, \beta_o, \Delta_o) = (\alpha_p, \beta_p, \Delta_p)$  と  $\Delta_p = \Delta_m = \Delta$  を仮定する.

$(\Re(\beta_m \overline{\beta_p}) - |\beta_p|^2) (\Re(\beta_m \overline{\beta_p}) - |\beta_m|^2) > 0$  が成立するとき限り,  $U$  の固有値は以下のように与えられる.

$$e^{i\lambda_1} = \frac{e^{i\Delta} \left( \sqrt{(\Re(\beta_m \overline{\beta_p}) + |\alpha_p| |\alpha_m| - 1) (\Re(\beta_m \overline{\beta_p}) - |\alpha_p| |\alpha_m| - 1) + i\Im(\beta_m \overline{\beta_p})} \right)}{|\beta_p - \beta_m|}, \quad e^{i\lambda_2} = -e^{i\lambda_1}$$

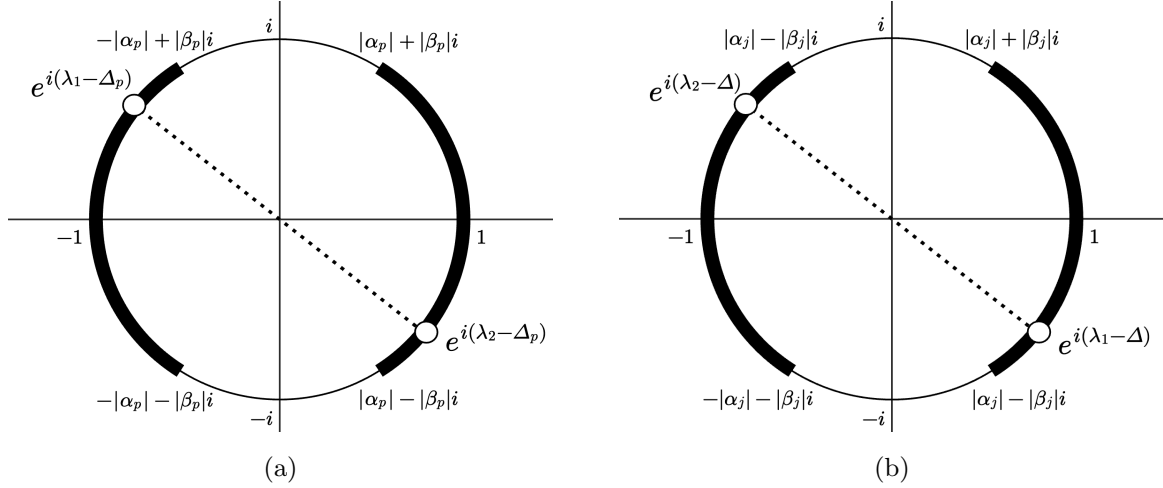


図 2: (a) と (b) はそれぞれ Theorem 2.4 と Theorem 2.5 における二相系モデルの固有値をそれぞれ,  $-\Delta_p$  と  $-\Delta$  回転したものを白丸で表した図である. 黒の太線はそれらの存在範囲を表したものであり, ここで,  $j = p$  ( $|\beta_p| \leq |\beta_m|$ ),  $= m$  ( $|\beta_m| < |\beta_p|$ ).

**Remark 2.6.** Theorem 2.5 のモデルは以下の先行研究を拡張したモデルとなっている.

- Endo, Konno, Obuse (2015) [6] :

$$(\alpha_p, \beta_p, \Delta_p) = \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{ie^{i\sigma_+}}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{2} \right), \quad (\alpha_m, \beta_m, \Delta_m) = \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{ie^{i\sigma_-}}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{2} \right), \quad \sigma_{\pm} \in [0, 2\pi).$$

**Theorem 2.7.**  $\beta_o = 0$ ,  $|\beta_p| = |\beta_m| = |\beta|$  と  $\Delta_p = \Delta_m = \Delta$  を仮定する.  $U$  の固有値は常に存在する. ここで,  $C = \Delta_0 + (\arg \beta_p - \arg \beta_m)/2$  とおくと, 以下のように固有値が与えられる.

- Condition 1 :  $\sin(\Delta - C) \in [-1, |\beta|]$ .
- Condition 2 :  $\sin(\Delta - C) \in (-|\beta|, 1]$ .

- Condition 1 が成立するとき,  $e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2} \in \sigma_p(U)$  であり,

$$e^{i\lambda_1} = \frac{e^{i\Delta} - i|\beta|e^{iC}}{|e^{i\Delta} - i|\beta|e^{iC}|}, \quad e^{i\lambda_2} = -e^{i\lambda_1}.$$

- Condition 2 が成立するとき,  $e^{i\lambda_3}, e^{i\lambda_4} \in \sigma_p(U)$  であり,

$$e^{i\lambda_3} = \frac{e^{i\Delta} + i|\beta|e^{iC}}{|e^{i\Delta} + i|\beta|e^{iC}|}, \quad e^{i\lambda_4} = -e^{i\lambda_3}.$$

特に, *Condition 1* と *Condition 2* が両方成立するとき,  $U$  は上記の 4 つの固有値を持つ.

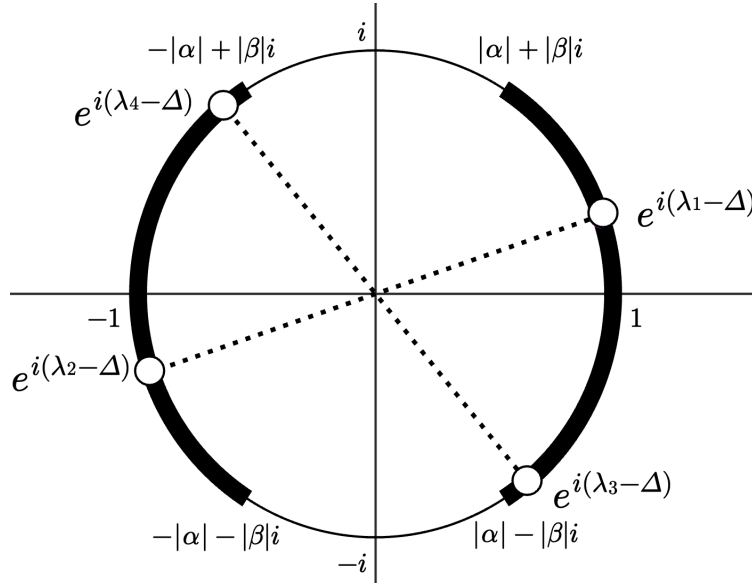


図 3: 定理 2.7 における一欠陥付二相系モデルの固有値を  $-\Delta$  回転したものを白丸で表した図. 黒の太線はそれらの存在範囲を表したものである.

**Remark 2.8.** *Theorem 2.7* のモデルは以下の先行研究を拡張したモデルとなっている.

- Endo, Konno, Segawa, Takei (2015) [9] :

$$\begin{aligned}
 (\alpha_p, \beta_p, \Delta_p) &= \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{ie^{i\sigma_+}}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{2} \right), \\
 (\alpha_m, \beta_m, \Delta_m) &= \left( \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{ie^{i\sigma_-}}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{2} \right), \\
 (\alpha_o, \beta_o, \Delta_o) &= \left( i, 0, \frac{3\pi}{2} \right), \quad \sigma_{\pm} \in [0, 2\pi).
 \end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath and J. Watrous, One-dimensional quantum walks, *Proc. of the 33rd Annual ACM symposium on Theory of computing*, 37–49 (2001).
- [2] A. Ambainis, J. Kempe, R. Alexander, Coins make quantum walks faster, *Proc. 16th ACM-SIAM SODA*, 1099–1108 (2005).
- [3] A. M. Childs, J. Goldstone, Spatial search by quantum walk, *Phys. Rev. A*, **70**, 022314 (2004).
- [4] M. J. Cantero, F. A. Grunbaum, L. Moral and L. Velazquez, The CGMV method for quantum walks, *Quantum Inf. Process.*, **11**, 1149–1192 (2012).

- [5] S. Endo, T. Endo, T. Komatsu and N. Konno, Eigenvalues of two-state quantum walks induced by the Hadamard walk, *Entropy*, **22**(1), 127 (2020).
- [6] T. Endo, N. Konno and H. Obuse, Relation between two-phase quantum walks and the topological invariant, arXiv:1511.04230.
- [7] H. Kawai, T. Komatsu and N. Konno, Stationary measure for two-state space-inhomogeneous quantum walk in one dimension, *Yokohama Math. J.*, **64**, 111–130 (2018).
- [8] T. Endo, N. Konno, E. Segawa and M. Takei, A one-dimensional Hadamard walk with one defect, *Yokohama Math. J.*, **60**, 49–90 (2014).
- [9] T. Endo, N. Konno, E. Segawa and M. Takei, Limit theorems of a two-phase quantum walk with one defect, *Quantum Inf. Comput.*, **15**, 1373–1396 (2015).
- [10] T. Endo, N. Konno, The stationary measure of a space-inhomogeneous quantum walk on the line, *Yokohama Math. J.*, **60**, 33–47 (2014).
- [11] X. Lu, C. Wang and W. Wang, The stationary measure of a space-inhomogeneous three-state quantum walk on the line, *Quantum Inf. Process.*, **14**(3), 867–880 (2015).
- [12] N. Konno, A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk, *J. Math. Soc. Japan*, **57**(4), 1179–1195 (2005).
- [13] H. Kawai, T. Komatsu and N. Konno, Stationary measures of three-state quantum walks on the one-dimensional lattice, *Yokohama Math. J.*, **63**, 59–74 (2017).
- [14] T. Kitagawa, M. S. Rudner, E. Berg and E. Demler, Exploring topological phases with quantum walks, *Phys. Rev. A*, **82**, 033429 (2010).
- [15] N. Shenvi, J. Kempe and K. B. Whaley, A quantum random walk search algorithm, *Phys. Rev. A*, **67**, 052307 (2002).
- [16] M. Maeda, H. Sasaki, E. Segawa, A. Suzuki and K. Suzuki, Dispersive estimates for quantum walks on 1d lattice, arXiv:1808.05714.
- [17] S. Richard, A. Suzuki and R. Tiedra de Aldecoa, Quantum walks with an anisotropic coin I:spectral theory, *Lett. Math. Phys.*, **108**, 331 (2018).
- [18] S. Richard, A. Suzuki and R. Tiedra de Aldecoa, Quantum walks with an anisotropic coin II:scattering theory, *Lett. Math. Phys.*, **109**, 61 (2019).
- [19] A. Suzuki, Asymptotic velocity of a position-dependent quantum walk, *Quantum Inf. Process.*, **15**, 103–119 (2016).
- [20] A. Wojcik, T. Luczak, P. Kurzynski, A. Grudka, T. Gdala and M. Bednarska-Bzdega, Trapping a particle of a quantum walk on the line, *Phys. Rev. A*, **85**(1), 012329 (2012).