Morse 関数折り目写像を介した高次元多様体のより幾何学的構成的な理解
(More geometric and constructive understandings of higher dimensional manifolds via Morse functions and fold maps)

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (Institute of Mathematics for Industry)
北澤 直樹 (Naoki Kitazawa) *

1 導入–多様体を低次元空間への良い射影写像を通じて知ろう–。

数学をある程度専門的に学ばれていたり研究されている方々や機械学習やデータ解析などの応用領域や周辺科学技術で数学をそれなりに利用している方々には釈迦に説法であろうが、多様体とは、1 次元の直線や曲線、2 次元の平面や曲面、我々の生きる 3 次元の空間や 4 次元の時空のように決まった成分数 (次元) の座標が入るような空間を自然に一般化したクラスの空間である。$k \geq 0$ 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^k$ やその中の原点を中心とした単位球面 S^{k-1} (単位球体 D^k) つまり半径 1 の球面 (球体) のような空間 (ちなみにそれぞれ次元 $k-1$ と k) がその例である。幾何学や数学では基本的で重要な空間で、最近流行りの機械学習やデータ解析でも時折登場したり最近の数学の応用の流行を考えればまだまだ可能性のある対象である。また、相対性理論をはじめとした様々な物理学でも様々な物理学を展開する場として欠かせない対象で周辺科学でもしばしば登場する。幾何学数学の基本的で重要な問題の一つが、多様体の形つまり位相やより深い幾何的な性質をみるというものである。今回、複雑で幾何的構成的にとらえにくい、高次元の多様体とそういった情報や性質を低次元の空間への具体的な可微分写像つまり微分の施せる写像を構成することによって捉えていこうという、現時点では漸く始まり出したといえる状態である講演者の新たな試みを結果も交え紹介する。

本稿は著者の HP (https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html) から飛べる HP (https://naokikitazawa.github.io/KenkyuNaokiKitazawaJapanese.html) にある https://naokikitazawa.github.io/General20190926.pdf 等をいくらか基にしている。なお、著者の至らなさからの誤りや記述をよくできる部分は多くあるかもしれず、その場合には教えて頂ければ幸いである。

多様体について基礎の部分から始め詳しいことは [17] や [28] 等を参考にして頂ければ幸いである。多様体の定義は勿論、(局所) 座標 (系)、多様体 X の次元 $\dim X$、多様体の境界、C^r 級構造、C^r 級多様体、C^r 級写像 (関数)、多様体 X の点 $p \in X$ における接ベクトル空間 T_pX、C^r 級写像の微分、多様体の向き等といった基本的な概念は既知として話を進める。具体的な (連結閉) 多様体として円周の直積であるトーラスや実射影空間や複素射影空間等も用語だけだが登場する。r が 1 以上の整数か ∞ であるとき ”C^r 級” を可微分ということにする。

* n-kitazawa@imi.kyushu-u.ac.jp

2 可微分写像と特異点と折り目写像。

多様体やその間の写像は特に指示のない限り滑らか、つまり C^∞ 級つまり任意の点でいくらでも微分できるものとする。多様体間の滑らかな写像 $f: M \to N$ について各点 p で微分 $df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ の階数が $\min\{\dim M, \dim N\}$ より低いような点を特異点とよぶ。特異点全体の集合を特異点集合と呼び $S(f)$ と表記する。特異点集合の像を特異値集合、値域におけるその補空間を正則値集合と呼ぶ。特異値集合、正則値集合上の点をそれぞれ特異値、正則値と呼ぶ。

$f: M \to N$ について値域の次元が定義域のそれより低くないとする。この写像が特異点を持たないときはめ込みであるといいさらに単射な時埋め込みであるという。さらにこの写像が微分同相写像であるとき二つの多様体 M と N は微分同相であるという (多様体に向きが入っていてそれが保たれるとき向きを込めて微分同相であるという)。さらに埋め込みの像が自然に多様体になり M とその多様体が微分同相であるときそれを N の部分多様体と呼ぶ (例えば空でない開部分集合はもとの多様体の部分多様体である)。部分多様体が N の閉集合であるとき閉部分多様体であるという (**閉多様体とは区別する**: 境界がない時は**境界のない閉部分多様体**などと呼ぶことにする)。

今後 $m \geq n \geq 1$ を整数とし M を連結な m 次元コンパクト多様体、$f: M \to \mathbb{R}^n$ を値域の可微分構造を自然なものとし滑らかな写像とする。

以下は基本的であると同時に重要である。

Proposition 1. f で正則値集合は n 次元の境界のない $\mathbb{R}^n$ の部分多様体である。正則値の逆像は $m-n$ 次元の閉部分多様体であり、M が閉多様体ならば境界のない閉部分多様体となる。またその中の n 次元単位球体の内部と同相な部分集合 U の逆像に f を制限すると U と U の中の正則値の逆像の直積として表される可微分多様体から U への射影とみなせる。

Definition 1. 前の写像 f で $n=1$ とする。特異点が境界上になく各特異点 p で、適切な座標とある整数 $0 \leq i(p) \leq m$ があり $(x_1, \cdots x_n) \mapsto \Sigma_{j=n}^{m-i(p)} {x_j}^2 - \Sigma_{j=m-i(p)+1}^{m} {x_j}^2 + f(p)$ という形で表せるとき、 f は Morse 関数であるという。

Definition 2. 前の写像 f で、多様体 M は閉多様体で各特異点 p で、適切な座標とある整数 $0 \leq i(p) \leq \frac{m-n+1}{2}$ があり $(x_1, \cdots x_n) \mapsto (x_1, \cdots, x_{n-1}, \Sigma_{j=n}^{m-i(p)} {x_j}^2 - \Sigma_{j=m-i(p)+1}^{m} {x_j}^2)$ という形で表せるとき、 f は折り目写像であるという。

折り目写像で $n=1$ の場合が他ならぬ閉多様体上の Morse 関数の場合である。

Proposition 2. Definition 1 で各特異点において特異値のまわりでもとの値域の実数全体の空間における大小で定まる順序を保つように座標がとれ、さらにそれで考えた場合 $i(p)$ は一意。さらに特異点は離散的に現れる。そして、Definition 2 で $i(p)$ は一意で、決まった指数の特異点全体の集合は $n-1$ 次元の境界のない閉部分多様体でそこへ制限するとはめ込みになる。

これら一意に定まる $i(p)$ を p の指数とよぶ。図 1 で簡単な Morse 関数の例、図 2 で折り目写像の例を挙げた (後者はいずれも後ほど定義される special generic 写像である)。Morse 関数について今後も随時説明するが詳細は例えば [19]、[20]、[28] 等を参照のこと。折り目写像については、 いわゆる一般的な可微分写像の特異点の理論に関する有名な教科書である [7] や、後で述べる具体的な折り目写像の多様体の位相や可微分構造の関係に関する研究が推進されだしたといえる 1990 年代の、初期の論文 [23] 等を参照のこと。

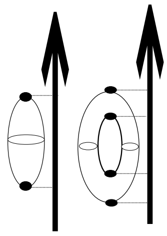

図 1　単位球面の高さを考えて得られる Morse 関数と円周 2 個の直積 (2 次元トーラス) の高さを考えて得られる Morse 関数 (黒い点は特異点を示す)。

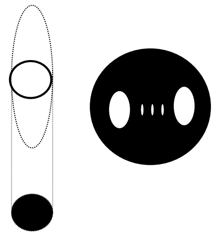

図 2　左は単位球面の自然な射影 (赤道が特異点集合で 2 次元の球面の平面への射影を示しているが定義域値域の次元対を一般化することもできる)。右は平面への後の Example 2 の折り目写像の像。

3　可微分多様体の位相や可微分構造。

(可微分) 多様体が同相であるか微分同相であるかどうかを法とし分類するという問題が自然に生まれる。これについて知られている事実を簡単に述べる。C^0 多様体をしばしば位相多様体とも呼ぶ。

Fact 1.

1. 3 次元以下の C^0 級の多様体は局所座標系をうまく制限して一意的に滑らかな多様体にできる。また、一般的な事実として C^r $(r \geq 1)$ 級の多様体は同様に一意に C^∞ 級にできる。

2. 1 次元の多様体は連結なものは直線か円周か半閉区間か閉区間に微分同相となる。

3. 2 次元の連結な閉多様体は、いわゆる向きが入るものは種数という穴の数を表す非負の整数できまる。向きが入らないものも同様である。

4. 3 次元以上の場合は一般に連結な閉多様体に制限しても難しい。S^3 を基本群という群が自明になるようなつまり単連結な閉多様体として特徴づけられるかという 3 次元の Poincaré 予想の解決に時間がかかったことなどは有名な話であろう。

5. 5 次元以上の場合単連結な閉 (可微分) 多様体の分類は、次元の高さからくる自由さがあり代数的な道具を介してある程度はできている。また Milnor により 7 次元の球面の可微分構造で単位球面のそれとは異なるものが発見されたことにはじまり可微分構造が一意になるとは限らないことが分かっている ([18] やさらに進み [4] 等): ただし 5 次元以上のコンパクト多様体の場合異なる可微分構造は有限個となる。また後の 4 次元を含め可微分構造の入らない位相多様体もある。なお連結閉位相多様体の可微分構造の個数について等もある意味で分かっている。ちなみに 5、6 次元では連結閉位相多様体の可微分構造は (せいぜい) 一意であることにも触れておく ([1] や [30] 等を参照のこと)。

6. 4 次元の場合は、球面の可微分構造で単位球面と異なるものがあるかがまだわかっていないとか、一つの位相多様体でどれだけ可微分構造があるかわかっているコンパクト多様体がまだ知られていないという状況である等、難しい。

7. $\mathbb{R}^n$ について、 $n = 4$ の時は非可算無限種類の可微分構造の存在は分かっているが、他は一意である。

多様体の位相や可微分構造について、完璧に理解するのは難しい。そこで同相であったり微分同相ならば変わらないような量である不変量が重要となる。今回、初歩的なものとして、j を非負整数として穴を可換群で代数的に表現する位相空間 X の j 次のホモロジー群 $H_j(X;A)$ やその双対としてでてくるコホモロジー群 $H^j(X;A)$ 等はよく使う (A は可換環で基本的には整数環 $\mathbb{Z}$ または $k > 0$ を整数として k 次巡回群 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ や有理数体 $\mathbb{Q}$ である)。詳しくは紙面などの都合で省略するが、ホモロジー群は例えば $A := \mathbb{Z}$ で $j = 0$ のときは X の連結成分数と等しい階数の自由可換群となる。基本群とは 1 次のホモロジー群より深く非可換な情

報をもつ群で適切に割って可換化すると 1 次のホモロジー群 $H_1(X;\mathbb{Z})$ となる。先程 Fact 1 で少し説明した単連結な空間とはこれが消えている (連結な) 空間のことである。コホモロジー群は、ホモロジー群の双対であり例えばホモロジー群が自由ならコホモロジー群はホモロジー群と同型である (A が前のような可換環やより一般に零元とは異なる単位元を有する単項イデアル整域の場合)。次数の異なるものも集めて自然に次数付き加群としさらに次数付き代数 (コホモロジー環) $H^*(X;A)$ とすることができる。閉多様体 X のオイラー数は、$\Sigma_{j=0}^{\dim X}(-1)^j \mathrm{rank} H_j(X;\mathbb{Z})$ で定義される。これはオイラーの多面体定理 (頂点数)-(辺数)+(面数)=2 の 2 を自然に一般化したものである。

Example 1. X が S^k $(k \geq 1)$ と同相な時、 $H_j(X;\mathbb{Z})$ は $j=0,k$ で $\mathbb{Z}$ と同型で他の場合は自明。X が円周の直積つまりトーラスと同相な場合、 $H_j(X;\mathbb{Z})$ は $j=0,2$ で $\mathbb{Z}$ と同型で、 $j=1$ で $\mathbb{Z}^2$ と同型で他の場合は自明。 後者の場合 $H^1(X;\mathbb{Z})$ の基底として、適当な $\mathbb{Z}^2$ との同一視のもと $\{(1,0),(0,1)\}$ がとれて、 $(1,0)$ と $(0,1)$ 同士の積は $H^2(X;\mathbb{Z})$ の零元となり、 $(1,0)$ と $(0,1)$ の積は $H^2(X;\mathbb{Z})$ の生成元となる。

$A := \mathbb{Z}$ のときホモロジー群 (コホモロジー環) を整係数ホモロジー群 (整係数コホモロジー環)と呼ぶ。一例として、 3 次元より先に解決した 4 次元以上の Poincaré 予想は、単連結で整係数ホモロジー群が球面のそれと同型な閉位相多様体が球面と同相になることを示す予想である。

4 Morse 関数折り目写像と多様体の位相。

Fact 2. 各特異点で値の異なる Morse 関数は、可微分多様体に可微分関数の空間に (適切な位相が入っているという状況のもと) 稠密に存在する。

Fact 3 (Reeb の定理 ([22])。)**.** 4 次元でない閉多様体が特異点を丁度 2 個有する Morse 関数を許容するのはそれが球面に同相であるときかつその時に限る。4 次元の時は”球面に同相”が”単位球面に微分同相”となる。

Fact 4. 多様体の j 次の整係数ホモロジー群の階数は、 Morse 関数の値域の順序も考慮した場合の指数 j の特異点の個数で上から評価できる。 また単連結で整係数ホモロジー群が自由なものなどある程度単純なものはこれら特異点の個数が整係数ホモロジー群の階数と一致するようにできる。

例えば球面とトーラスの Morse 関数の例を見直してみるとよい (円周やトーラスは単連結ではないが後半の良い性質は成立する)。

以下値域が一般次元のユークリッド空間の場合の折り目写像の存在について少しだけ触れる。閉多様体が平面への折り目写像を許容するための必要十分条件は、オイラー数が偶数であることである ([29] や [33] 等)。一般的な研究としては [5]、 [6] 等が有名であるがここでは省略する。

5 Special generic 写像と同心円形折り目写像。

5.1 Special generic 写像と多様体の位相や可微分構造。

Definition 3. 特異点の指数が 0 であるような折り目写像を special generic 写像と呼ぶ。

Reeb の定理の Morse 関数や単位球面の射影を自然に含むクラスとなる。

Fact 5 ([2]、 [24]、[25]、[34]。)**.** 次元が 2 以上の球面と同相な可微分多様体で 4 次元でないものまたは 4 次元の単位球面は、平面への special generic 写像を有する。さらに特異点集合に制限すると円周の埋め込みとなり像が 2 次元の球体となるようなものとできる。次元が 4 以上の単位球面と同相だが微分同相でない多

様体は自身より $k=1,2,3$ 次元低いユークリッド空間への special generic 写像を許容しない。また 7 次元の向きの入った球面と同相な可微分多様体は向きを保つ微分同相写像の存在を法として 28 種類あるが、そのうち 14 種類のものは $\mathbb{R}^3$ への special generic 写像を許容しない。

以下数行は多様体の幾何学の基本的概念に慣れている方は飛ばしてよいが、一応(境界) 連結和と束について触れる。二つの次元 $k>0$ の連結閉可微分多様体の連結和とは、二つの多様体から埋め込みの像となっている k 次元の単位球体の内部を取り除いて現れる単位球面と微分同相な境界の間の自然な微分同相写像で貼り合わせて新たに連結閉可微分多様体を得る操作である。二つの次元 $k>0$ の連結コンパクト可微分多様体について、境界連結和とは、内部への埋め込みの像となっている k 次元単位球体を自然な微分同相写像で同一視して新たに連結コンパクト可微分多様体を得る操作である。一般の正の整数個の場合にも帰納的に定義できる。また可微分多様体 X 上の (コンパクト) 可微分多様体 F をファイバーとする束とは、直積 $X\times F$ とその X への射影の組の一般化とみなせるもので (直積の場合自明な束であるといい)、今回は例えば正則値の逆像が F と微分同相であるような X への全射で特異点を持たない可微分写像の定義域の可微分多様体 (例えば全空間等と呼ぶがそれ) とその写像の組とでも考えるのが良いだろう。早速次の例を挙げておく。

Example 2. 整数 $m>n\geq 2$、$l>0$、l 個の整数 $1\leq k_j\leq n-1$ $(1\leq j\leq l\ )$ が与えられているとする。単位球面と微分同相な球面の直積 j 個 $S^{k_j}\times S^{m-k_j}$ の連結和で得られる多様体は、単位球面 S^{k_j} と単位球体 D^{n-k_j} の直積 j 個の境界連結和で得られる多様体と微分同相な多様体を像とする、特異点集合に制限すると埋め込みでその像が境界であるような $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像を許容する。

Fact 6.
1. ([23]。) 円周上の、special generic 関数を許容するような多様体をファイバーとする束の全空間の連結和として得られる多様体は、平面への special generic 写像を許容する多様体として特徴づけられる。
2. ([26]、[27]。) 4 次元の同相な連結閉多様体の組で次を満たすものがある。
   (a) 二つの多様体は $\mathbb{R}^3$ への折り目写像を許容する。
   (b) 二つの多様体の丁度一個が $\mathbb{R}^3$ への special generic 写像を許容する。

Fact 5 と 6 は、値域の次元が一般の場合 special generic 写像が多様体の位相や可微分構造に強い制限を与えることを具体的に示す。講演者は多様体のコホモロジー環に着目し、以下のような概念や結果に辿り着いた。

Theorem 1 ([15]。)**.** 整数 $m>n\geq 1$ とし、M を m 次元連結閉多様体で $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像を許容するものとする。このとき $m-n$ 次以下の M のコホモロジー環の元有限個の積は、次数が n 以上になれば 0 となる。

Corollary 1 ([15]。)**.** 一般次元のトーラスや実射影空間は、自身より次元の低いユークリッド空間への special generic 写像を許容しない。

Definition 4 ([15]。)*.* A を可換環とし整数 $m>k\geq 0$ とする。位相空間 X について長さ $l>0$ の $0\leq k_j\leq m-k$ を満たす整数の列 $\{k_j\}_{j=1}^{l}$ と元 $a_j\in H^{k_j}(X;A)$ からなる長さ l の列で積をとると次数が k 以上であり、かつ 0 にならないようなものがあるとき、X は$\mathrm{Coh}_{A,m.k}$ を満たすという。

Definition 5 ([15]。)*.* 整数 $m>n_0\geq 1$ とする。m 次元連結閉多様体が各整数 $n_0\leq n<m$ について、 $\mathbb{R}^n$ への special generic 写像を許容するとき、 M は $\mathrm{Sp}_{\geq n_0}$ を満たすという。

Theorem 2 ([15]。)**.** 整数 $m>n\geq 1$ とする。A を零元と異なる単位元を有する単項イデアル整域とする。

1. m 次元連結閉多様体 M_1、 M_2 が $\mathrm{Coh}_{A,m,n-1}$ と $\mathrm{Sp}_{\geq n}$ を満たせばそれらの連結和で得られる多様体

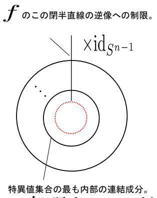

図 3　大域的に自明なモノドロミーを持つ折り目写像の像や構造。

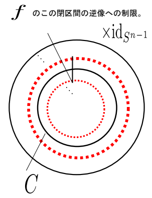

図 4　特異値集合の連結成分ごとに自明なモノドロミーを持つ折り目写像の像や構造 (C は任意の特異値集合の連結成分で赤の点線で作られた二つの円で囲まれた領域が $\{x \in \mathbb{R}^n \mid j-\frac{1}{2} \leq ||x|| \leq j+\frac{1}{2}\}$ である)。

も同様。

2. m 次元連結閉多様体 M が $\mathrm{Coh}_{A,m,n-1}$ と $\mathrm{Sp}_{\geq n}$ を満たし、次を満たす連結閉多様体 F そして $F \times D^n$ から $\mathbb{R}^{n+\dim F}$ へのはめ込みが存在すると仮定する。
   (a) $H_j(F;A)$ は A 上自由。
   (b) 長さ $l > 0$ の $0 \leq k_j \leq m-n+1$ を満たす整数の列 $\{k_j\}_{j=1}^{l}$ と元 $a_j \in H^{k_j}(X;A)$ からなる長さ l の列で、積をとると $\dim F$ 次で 0 でないようなものが取れる。

   このとき $M \times F$ は $\mathrm{Coh}_{A,m+\dim F,n+\dim F-1}$ と $\mathrm{Sp}_{\geq n+\dim F}$ を満たす。

この Theorem、Example 2 を参考に、単位球面からはじめて連結和や直積を繰り返してよい例が作れることを確かめてみるとよい。

5.2　同心円形折り目写像。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^k$ 上の点 p について $||p||$ で原点からの距離を表す (標準的な距離を考える)。

Definition 6 ([9]、[10]。). 折り目写像 $f: M \to \mathbb{R}^n$ が次のいずれかを満たすとき、同心円形であるという。

1. $n=1$ で $f|_{S(f)}$ は埋め込みで f の正則値 a と微分同相写像の組 $(\Phi: f^{-1}((-\infty,a]) \to f^{-1}([a,+\infty)), \phi: (-\infty,a] \to [a,+\infty))$ で $f|_{f^{-1}([a,+\infty))} \circ \Phi = \phi \circ f|_{f^{-1}((-\infty,a])}$ を満たすものが存在する。
2. $n \geq 2$ で $f|_{S(f)}$ は埋め込みで正の整数 l と微分同相写像 $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ があり $(\phi \circ f)(S(f)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \in \mathbb{N}, 1 \leq ||x|| \leq l\}$ とできる。

Definition 7. 同心円形折り目写像 $f: M \to \mathbb{R}^n$ を考える。

1. $n=1$ であるか、$n \geq 2$ で Definition 6 において $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \geq \frac{1}{2}\}$ の $\phi \circ f$ による逆像への制限と $x \mapsto \frac{1}{||x||}x$ で与えられる写像の合成で定まる写像が自明な束を与えるとき、f は大域的に自明なモノドロミーを持つという。
2. $n=1$ であるか、 $n \geq 2$ で Definition 6 において $\{x \in \mathbb{R}^n \mid j-\frac{1}{2} \leq ||x|| \leq j+\frac{1}{2}\}$ の $\phi \circ f$ による逆像への制限と $x \mapsto \frac{1}{||x||}x$ で与えられる写像の合成で定まる写像が各整数 $1 \leq j \leq l$ で自明な束を与えるとき、 f は特異値集合の連結成分ごとに自明なモノドロミーを持つという。

図 3 と 4 で Definition 7 の写像の像や構造を説明した (実は関数と球面上の恒等写像の直積になるという部分はより強い条件である： 深入りすると大変難しい部分であり本稿では ” 関数と球面上の恒等写像の直積になる” という表現で自明性を扱って問題ない)。同心円形折り目写像の具体的な構成に挑み例えば以下を得た。

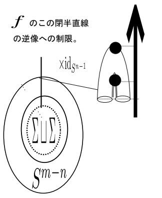

図 5　Theorem 3 の写像の像と逆像や構造 (閉半直線の逆像への制限は $\Sigma \times [-1, 1]$ 上の特異点を丁度 2 個有する Morse 関数)。

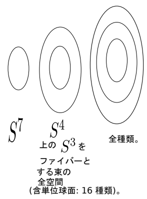

図 6　Corollary 2 の写像と定義域の球面 (円周で特異値集合の連結成分に出る S^3 に微分同相な球面を表す: 正則値の逆像は S^3 の非交和に微分同相で値域で中心部へ行くほど連結成分数が増える)。

Theorem 3 ([8]、[9]、[11]。). $m > n$ とし、 Σ を $m - n$ 次元の特異点を丁度 2 個有する Morse 関数を許容する球面とする。 m 次元連結閉多様体 M について次は同値。

1. M は S^n 上の Σ をファイバーとする束の全空間。
2. M は $n = 1$ で特異点が丁度 4 個有するか $n \geq 2$ で特異点集合の連結成分が 2 個であるような大域的に自明なモノドロミーを持つ同心円形折り目写像 $f : M \to \mathbb{R}^n$ で、Definition 6 における $\phi \circ f$ による正則値 a ($n = 1$ の場合) か 0 ($n \geq 2$ の場合) の逆像が $\Sigma \sqcup \Sigma$ と微分同相であるようなものを許容する。

Theorem 4 ([8]、[9]。). $m > n$ とし、 m 次元連結閉多様体 M を S^{m-n} をファイバーとする S^n 上の束の全空間の連結和として得られる多様体とする。M は特異値集合の連結成分ごとに自明なモノドロミーを持つ同心円形折り目写像 $f : M \to \mathbb{R}^n$ で次を満たすものを許容する。

1. $n = 1$ で特異点を丁度 $2(l + 1)$ 個有するか $n \geq 2$ で特異点集合の連結成分が $l + 1$ 個。また特異点の指数は 0 か 1。
2. 正則値の逆像が単位球面と微分同相な多様体の非交和で、Definition 6 における $\phi \circ f$ による正則値 a ($n = 1$ の場合) か 0 ($n \geq 2$ の場合) の逆像の連結成分数が $l + 1$ 個。

Corollary 2 ([8]。). 7 次元の球面と微分同相な多様体は $\mathbb{R}^4$ への、Theorem 4 の条件を満たすような写像を許容する。特に特異点集合の連結成分数を 1 個のものを許容するのは、単位球面と微分同相なもののみで、2 個のものを許容するのは (向きを保つ微分同相写像を法として考えた場合) 単位球面を含む 16 種類のもののみである。そして全ての 7 次元の球面と微分同相な多様体は、 $\mathbb{R}^4$ への特異点集合の連結成分数が $l \geq 3$ 個のものを許容する。

一般に具体的な多様体に具体的な可微分写像を構成するのは存在を知ることと違った難しさがあり、また簡単な多様体上の構成でも難しい中、今回いくらか構成に成功したわけである。また最後の Corollary は special generic 写像の Fact 5 や 6 にあたるようなものを新たな折り目写像のクラスで発見したことを意味する。

6　高次元単連結閉多様体の上の折り目写像。

一般の高次元特に次元が 7 以上の単連結閉多様体を得られるかという問題について考えたい。その前に一つ補足する。[1] によれば 5 次元の単連結閉位相多様体は完全に可微分構造まで込めて分類されている。[21] がこれらに対しユークリッド空間への special generic 写像の存在非存在を完全に決定している。6 次元の場合も重要で分類に関してはやや複雑だが [30] 等ある程度知られた結果はある。そして頑張れば [21] の続きとい

うべき感じの結果は出せそうであるが、ある種の難しさがある他、さらに可微分構造が単位球面のそれとは異なるような可微分多様体としての球面が発見された最低次元であることや、後にあるように 7 次元単連結閉多様体を具体的な代数的位相幾何学を用いて理解しようという流れが最近でもいくらかあること等を考慮し、 7 次元以上に取り組んでいるという状況である。話を戻すと、高次元の単連結閉多様体は、ホモトピー論、[31] で解説されている手術理論など高度な代数的抽象的な道具を介しある意味完全な分類がなされている。また 7 次元に関しては、最近でもいわゆる多様体が次元が 1 大きい多様体の境界になっているかを代数的に調べようとするコボルディズム理論等を具体的に駆使して [3] や [16] や [32] 等で進められている。一方これらをより幾何的構成的に理解することは大変難しい。このような状況で、講演者は具体的に折り目写像を構成し、多様体の無限族も得た。

Theorem 5 ([12]、[13]。). $A := \mathbb{Z}^a$, $B := \mathbb{Z}^b$, $C := \mathbb{Z}^c$ とし $\{a_{i,j}\}_{j=1}^{a}$ を b 個の整数列とする ($1 \leq i \leq b$: 整数)。$\{h_{i,j}\}$ を (i,j) 成分が整数 $h_{i,j}$ で対角成分が 0 である b 次正方行列とする。このとき 7 次元単連結閉多様体 M と折り目写像 $f : M \to \mathbb{R}^4$ があり次を満たす。

1. コホモロジー群は最後の群と適切に同一視して $H_2(M;\mathbb{Z}) \cong H^2(M;\mathbb{Z}) \cong A \oplus B$, $H_4(M;\mathbb{Z}) \cong H^4(M;\mathbb{Z}) \cong B \oplus C$ という同型があり以下が成立。
   (a) $A \oplus \{0\} \subset H^2(M;\mathbb{Z})$ の元同士の積は 0。適切な $A \oplus \{0\} \subset H^2(M;\mathbb{Z})$ の基底 $\{({a_j}^*, 0)\}_{j=1}^{a}$ と $\{0\} \oplus B \subset H^2(M;\mathbb{Z})$ の基底 $\{(0, {b_j}^*)\}_{j=1}^{b}$ があり、 $({a_{j_1}}^*, 0)$ と $(0, {b_{j_2}}^*)$ の積は $(a_{j_2,j_1}{b_{j_2}}^*, 0) \in B \oplus \{0\} \subset H^4(M;\mathbb{Z})$ で $(0, {b_{j_1}}^*)$ と $(0, {b_{j_2}}^*)$ の積は $(h_{j_1,j_2}{b_{j_2}}^* + h_{j_2,j_1}{b_{j_1}}^*, 0) \in B \oplus \{0\}$ となる。
2. f の特異点の指数は 0 か 1 で、正則値の逆像は空集合か S^3 3 個以下の非交和。特に h が零行列の時 f の特異点集合への制限は埋め込みで、正則値の逆像は空集合か S^3 2 個以下の非交和になるようにできる。さらに h が零行列ではない時にはこの零行列の場合には得られない 7 次元の多様体が得られる。

定義域値域の次元対やコホモロジー群の次元が一般の場合も、適切な状況で同様の定理ができる。

Theorem 6 ([14]。). X を 4 次元の連結な向き付け可能閉多様体で $j = 0, 2, 4$ で $H^j(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ で $j \neq 0, 2, 4$ で $H^j(X;\mathbb{Z})$ が自明であるようなものとする。

1. 整係数コホモロジー環が $X \times S^3$ のそれと同型。
2. $\mathbb{R}^4$ への大域的に自明なモノドロミーを持つような同心円形折り目写像を許容する。

という性質を満たすような 7 次元単連結閉多様体の可算無限族 $\{M_j\}$ で、 $j_1 \neq j_2$ であれば M_{j_1} と M_{j_2} は同相でないようなものがある。さらに Theorem 3–5 ではこれらの多様体は定義域になり得ない。

前定理の X は例えばいわゆる複素射影曲面(いわゆる複素次元 2 の複素射影空間) と考えられる。M_j は X 上の S^3 をファイバーとする滑らかな束の全空間として得られている ([32] の内容)。

7 今後のための問題。

具体的な折り目写像を介して高次元多様体のいくつかをみてきた。しかしこれでも高次元多様体を幾何的構成的にみる試みは始まったばかりである。今後の問題を挙げておく。

Problem 1. より広いクラスの (高次元単連結閉) 多様体を、具体的に低次元空間への折り目写像より一般の良い可微分写像を構成して得られるか？

Problem 2. 前の問題に関連して、一般的に、強力な、折り目写像やより広いクラス可微分写像そして多様体

の構成方法を見つけ出せるか？

最後に、講演では、本稿にはないような進んだ内容も時間の許す範囲で述べる。例えば定理などを本稿とは異なる形で説明することもあるかもしれないことを添えておく。

8 謝辞。

改めて講演の機会を下さりシングルセッションに選んで下さった世話人の皆様、また日頃から研究を支えて下さっている、ホスト教員の佐伯修教授他先生方や同僚さらには研究生活をあらゆる意味でサポートして下さっている家族友人にも感謝申し上げたい。

新型コロナウイルス感染症の猛威はなかなか収まらないが、それでも皆前へ進んできていることは確かであり、しばらく大変なことは身の周りから世界レベルまであろうが、きっと打ち克っていけると信じてやまない。その中で今回、以前にも数回北海道大学に行き参加させて頂いたこの数学や周辺に関わる学際的な研究集会がオンラインで開催できる見込みとなったこと、そして約 7 年ぶりに参加できる見込みであること、大変喜ばしいことと思う。

著者は Grant-in-Aid for Scientific Research (S) (JP17H06128 Principal Investigator: Osamu Saeki) ”Innovative research of geometric topology and singularities of differentiable mappings” より給与そしてそれとは別に補助を受けていて、さらに紹介してきた研究結果の多くは主にこれらとは独立に「2020 年度笹川科学研究助成」 (2020-2002) のもと実施した研究に関するものである。

参考文献

[1] D. Barden, *Simply Connected Five-Manifolds*, Ann. of Math. (3) 82 (1965), 365–385.

[2] E. Calabi, Quasi-surjective mappings and a generation of Morse theory, Proc. U.S.-Japan Seminar in Differential Geometry, Kyoto, 1965, pp. 13–16.

[3] D. Crowley and J. Nordström, *The classification of* 2*-connected* 7*-manifolds*, Proc. London. Math. Soc. 119 (2019), 1–54, arxiv:1406.2226.

[4] J. J. Eells and N. H. Kuiper, *An invariant for certain smooth manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. 60 (1962), 93–110.

[5] Y. Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. 4 (1970). 1119–1134.

[6] Y. Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. 6 (1972). 1302–1326.

[7] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics (14), Springer-Verlag (1974).

[8] N. Kitazawa, *On round fold maps* (in Japanese), RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), 45–59.

[9] N. Kitazawa, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Doctoral Dissertation, Tokyo Institute of Technology (2014).

[10] N. Kitazawa, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Hokkaido Mathematical Journal Vol.43, No.3 (2014), 327–359.

[11] N. Kitazawa, *Round fold maps and the topologies and the differentiable structures of manifolds admitting explicit ones*, submitted to a refereed journal, arXiv:1304.0618 (the title has changed).

[12] N. Kitazawa *Notes on explicit smooth maps on 7-dimensional manifolds into the 4-dimensional Euclidean space*, submitted to a refereed journal, arxiv:1911.11274.

[13] N. Kitazawa *Explicit fold maps on 7-dimensional closed and simply-connected manifolds of new*

classes, arxiv:2005.05281.

[14] N. Kitazawa, *7-dimensional simply-connected spin manifolds whose integral cohomology rings are isomorphic to that of* $\mathbb{C}P^2 \times S^3$ *admit round fold maps*, submitted to a refereed journal, arxiv:2007.03474.

[15] N. Kitazawa *Closed manifolds admitting no special generic map whose codimension is negative and their cohomology rings*, submitted to a refereed journal, arxiv:2008.04226.

[16] M. Kreck, *On the classification of* 1*-connected* 7*-manifolds with torsion free second homology*, to appear in the Journal of Topology, arxiv:1805.02391.

[17] 松本 幸夫, 多様体の基礎 (基礎数学 *5*), 1988/9/25, 東京大学出版会.

[18] J. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the* 7*-sphere*, Ann. of Math. (2) 64 (1956), 399–405.

[19] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematic Studies AM-51, Princeton University Press; 1st Edition (1963.5.1).

[20] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1965.

[21] M. Nishioka, *Special generic maps of* 5*-dimensional manifolds*, Revue Roumaine de Math‘ematiques Pures et Appliquèes, Volume LX No.4 (2015), 507–517.

[22] G. Reeb, *Sur les points singuliers d´une forme de Pfaff complétement intègrable ou d´une fonction numérique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de I´Académie des Sciences 222 (1946), 847–849.

[23] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan Volume 44, Number 3 (1992),551–566.

[24] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293.

[25] O. Saeki, *Topology of special generic maps into* $\mathbb{R}^3$, Workshop on Real and Complex Singularities (Sao Carlos, 1992), Mat. Contemp. 5 (1993), 161–186.

[26] O. Saeki and K. Sakuma, *On special generic maps into* $\mathbb{R}^3$, Pacific J. Math. 184 (1998), 175–193.

[27] O. Saeki and K. Sakuma, *Special generic maps of* 4*-manifolds and compact complex analytic surfaces*, Math. Ann. 313, 617–633, 1999.

[28] 田村 一郎, 微分位相幾何学, 岩波オンデマンドブックス, 2015/7/10, 岩波書店.

[29] R. Thom, *Les singularites des applications differentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1955-56), 43–87.

[30] C. T. C. Wall, *Classification problems in differential topology. V. On certain* 6*-manifolds*, Invent. Math. 1 (1966), 355–374.

[31] C. T. C. Wall, *Surgery On Compact Manifolds.* Second Edition, Edited by A. A. Ranicki, http://www.math.uchicago.edu/s̃hmuel/tom-readings/Wall,%20Surgery%20on%20Compact%20Manifolds.pdf.

[32] X. Wang *On the classification of certain* 1*-connected* 7*-manifolds and related problems*, arXiv:1810.08474.

[33] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean spaces: I, mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math. 62 (1955), 374–410.

[34] D. J. Wrazidlo, *Standard special generic maps of homotopy spheres into Eucidean spaces*, Topology Appl. 234 (2018), 348–358, arxiv:1707.08646.