ある概アーベルリー群上の左不変リッチソリトン計量

広島大学大学院　理学研究科　数学専攻
川又将大 (Masahiro KAWAMATA) *

概要

リー群 G 上の左不変リーマン計量全体の集合 $\mathfrak{M}$ には，0 でない実数と G 上の自己同型群の生成する群 $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ が自然に作用する．このような視点で左不変リーマン計量を捉えた場合，特別な計量は特別な軌道と対応することが期待される．本講演では，群 $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への作用が余等質性 1 作用である単連結概アーベルリー群 G において，G 上の左不変リーマン計量がリッチソリトン計量であることと，対応する $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$-軌道が孤立軌道になることが同値であることを紹介する．尚，本講演の内容は大阪市立大学の田丸博士氏との共同研究に基づく．

1　導入

リー群が与えられたとき，その上の左不変リッチソリトン計量などの特別な計量を構成・分類するということは古くから考えられてきた重要な問題であり，今なお盛んに研究されている．

この問題を考えるためのひとつの方法として，リー群 G 上の左不変リーマン計量全体の集合 $\mathfrak{M}$ に，0 でない実数と G 上の自己同型が生成する群 $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ を作用させて調べるというものがある ([4])．この群作用は，$\mathfrak{M}$ に "0 でない定数倍と自己同型を除いて同値" という同値関係を定める．

これにより，特別な左不変リーマン計量の構成・分類といった問題を群作用の視点から考察することが可能になる．このような観点から見ると，特別な左不変リーマン計量は特別な軌道と対応することが期待される．ここで特別な軌道の例として，孤立軌道がある．孤立軌道は，自身の十分近くには "同じ型" の軌道がないような軌道のことである．特別な計量と特別な軌道の対応を示唆する例として，以下の定理が知られている．

定理 1.1 ([5])**.** G を単連結リー群とする．G 上の左不変リーマン計量 $\langle , \rangle$ について，$\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G).\langle , \rangle$ が孤立軌道なら $\langle , \rangle$ はリッチソリトン計量である．

定理 1.1 の逆に関しては，一般には成り立たない ([1, 5]) が特別なリー群であれば成り立つことが知られている．実際，3 次元単連結可解リー群や $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への作用が推移的ならば定理 1.1 の逆は成り立つ．さらに今までに知られている $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への作用が余等質性 1 作用になるリー群 G においては定理 1.1 の逆が成り立っていた．よって以下の予想が考えられる．

予想 1.2. 群 $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への作用が余等質性 1 作用である単連結リー群 G においては定理 1.1 の逆が成り立つ．

* email: masahiro-kawamata@hiroshima-u.ac.jp, URL: https://sites.google.com/site/masahirokawamata3152/

本講演では，群 $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への作用が余等質性 1 作用になる単連結概アーベルリー群において予想 1.2 が正しいことを紹介する．

2　余等質性 1 作用，孤立軌道

G を単連結リー群とする．群 $\mathbb{R}^{\times}$ と G 上の微分同相群 $\mathrm{Diff}(G)$ は，G 上のリーマン計量全体の集合に自然に作用する．よってこの作用の制限として，群

$$\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G) = \{c\varphi \mid c \in \mathbb{R}^{\times},\ \varphi \in \mathrm{Aut}(G)\}$$

を G 上の左不変リーマン計量全体の集合 $\mathfrak{M}$ に作用させる．これが実際に定義されることについては，$\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ は $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Diff}(G)$ の部分群であり，$\mathbb{R}^{\times}$ と $\mathrm{Aut}(G)$ は G 上のリーマン計量の左不変性を保つことから従う．この群作用の定義をより詳しく述べると，$\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への作用は以下の式で定義される: $c\varphi \in \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$, $\langle , \rangle \in \mathfrak{M}$ に対して

$$((c\varphi).\langle , \rangle)_x(u, v) := \langle c^{-1}d(\varphi^{-1})_x(u), c^{-1}d(\varphi^{-1})_x(v)\rangle_{\varphi^{-1}(x)}\ (x \in G,\ u, v \in T_xG).$$

次に余等質性 1 作用について定義する．

定義 2.1. $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への群作用に関して，$\max\{\dim(\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G).\langle , \rangle) \mid \langle , \rangle \in \mathfrak{M}\} = \dim \mathfrak{M} - 1$ であるとき，この作用は**余等質性 1 作用**であるという．

最後に $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への群作用の孤立軌道について述べる．$H := \mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ とおく．軌道空間 $H\backslash\mathfrak{M}$ 内の 2 点 $H.\langle , \rangle_1, H.\langle , \rangle_2$ が**同じ軌道型を持つ**とは，$\langle , \rangle_1, \langle , \rangle_2$ それぞれの固定部分群 $H_{\langle , \rangle_1}, H_{\langle , \rangle_2}$ が共役であることと定義する．このとき，この同値関係による $H.\langle , \rangle_1$ の同値類を $[H.\langle , \rangle_1]$ と書くことにする．一方 $n = \dim G$ とするとき，$\mathfrak{M}$ はリー群 G のリー代数 $\mathfrak{g}$ 上の正定値内積全体と同一視できるため，リーマン対称空間 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ とみれる．よって以下では，$\mathfrak{M}$ に $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ の多様体構造をいれ，$H\backslash\mathfrak{M}$ を H 作用と $\mathfrak{M}$ の位相から定まる自然な商位相による位相空間と見る[*1]．

定義 2.2. $\langle , \rangle \in \mathfrak{M}$ に対して，$H.\langle , \rangle$ が**孤立軌道**であるとは開集合 $U \subset H \backslash \mathfrak{M}$ が存在して $U \cap [H.\langle , \rangle] = \{H.\langle , \rangle\}$ となることと定める．

3　概アーベルリー群

群 $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への作用が余等質性 1 作用になるようなリー群 G の多くは，概アーベルリー群とよばれる特別なリー群になることが知られている．まず概アーベルリー群の定義を述べる．

定義 3.1. 余次元 1 の可換イデアルをもつリー代数を**概アーベルリー代数**とよぶ．また，付随するリー代数が概アーベルになるリー群を**概アーベルリー群**とよぶ．

[*1] 一般に軌道空間 $\mathbb{R}^{\times}\mathrm{Aut}(G)\backslash\mathfrak{M}$ は特異点付き多様体になる．

概アーベルリー代数は可解リー代数であることが定義から直ちに示される．よって概アーベルリー群は可解リー群である．

例 3.2. 概アーベルリー代数の例をいくつか述べる．

(1) n 次元ベクトル空間 $\mathfrak{g} = \mathrm{Span}\{v, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ に以下のようにして括弧積を定義する:

$$[v, x_i] = x_i, \ (1 \leq i \leq n-1)$$

このとき，この括弧積により $\mathfrak{g}$ はリー代数になり，$\mathrm{Span}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ はその余次元 1 の可換イデアルである．なお $\mathfrak{g}$ は n 次元実双曲空間のリー代数とよばれている．

(2) 3 次元可解リー代数は全て概アーベルリー代数である．つまり，3 次元リー代数においては可解性と概アーベル性は同値になる．

次に，概アーベルリー代数は行列から作られることを紹介する．

命題 3.3. V を n 次元ベクトル空間とし $\{v, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ をその基底とする．また $(a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}(n-1, \mathbb{R})$ とする．このとき

$$[v, x_i] := \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j$$

によって V 上の括弧積を定義するとき，$(V, [,])$ は n 次元概アーベルリー代数になる．

以後，行列 A に対して命題 3.3 で得られる概アーベルリー代数を $\mathfrak{g}_A$ と書くことにする．

上記命題により，行列が与えられれば概アーベルリー代数が構成できることが分かる．しかし，違う行列が与えられた場合であっても，それらから作られる概アーベルリー代数は同型であることは多々ある．次の命題は，どのような場合に 2 つの行列が同型な概アーベルリー代数を定めるかを示した命題である．

命題 3.4. $A, B \in \mathrm{M}(n-1, \mathbb{R})$ に対して，$\mathfrak{g}_A \simeq \mathfrak{g}_B$ であるための必要十分条件は，$\alpha \in \mathbb{R}^\times$ と $P \in \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{R})$ が存在して $A = \alpha P^{-1} B P$ となることである．

注意 3.5. 行列 A, B が命題 3.4 の条件を満たすことを $A \sim B$ と書いたり，A と B は定数倍の違いを除いて共役であると書いたりする．特に，この関係は同値関係を成すことに注意しておく．

上記の命題 3.3，命題 3.4 により，次の写像が全単射であることが従う:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}(n-1, \mathbb{R})/\sim & \longrightarrow & \{n \text{ 次元概アーベルリー代数 }\}/\simeq \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ A & \longmapsto & \mathfrak{g}_A \end{array}$$

これによって，概アーベルリー代数を考えることは行列を考えることとほぼ等しいということがわかった．

4　主結果

次の定理が本講演の主結果である．

定理 4.1 ([3])**.** 単連結概アーベルリー群については予想 1.2 は正しい．即ち，G を $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への作用が余等質性 1 作用になる単連結概アーベルリー群とするとき，G 上の左不変リーマン計量 $\langle , \rangle$ が左不変リッチソリトン計量であるための必要十分条件は，$\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(G).\langle , \rangle$ が孤立軌道になることである．

以下，定理 4.1 の証明の概略を述べる．条件の十分性は定理 1.1 で述べられているため必要性についてのみ記す．まず我々は，左不変リーマン計量が 1 次元になる単連結概アーベルリー群を分類した．

命題 4.2 ([3])**.** G を n 次元単連結概アーベルリー群とする．群 $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への作用が余等質性 1 作用であるための必要十分条件は，G のリー代数が次のいずれかの行列から定まる概アーベルリー代数と同型になることである:

$$(1)\ \begin{pmatrix} \alpha I_{n-1} & \\ & \beta \end{pmatrix} \ (\alpha \neq \beta,\ n \geq 3), \qquad (2)\ \begin{pmatrix} I_{n-3} & \\ & J_2(1) \end{pmatrix} \ (n \geq 3),$$

$$(3) \begin{pmatrix} \gamma & 1 \\ -1 & \gamma \end{pmatrix} \ (\gamma \geq 0), \qquad (4)\ \begin{pmatrix} O_{n-5} & & \\ & J_2(0) & \\ & & J_2(0) \end{pmatrix} \ (n \geq 5).$$

ここで I_n, O_n はそれぞれ単位行列，零行列であり，$J_2(\lambda)$ は固有値が λ の 2 次ジョルダンブロックである．

ここで，命題 4.2 にある (1), (2), (3), (4) に対応する単連結概アーベルリー群について，その上の左不変リッチソリトン計量を $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(G)$ 作用の下で分類する．その結果，(1), (3), (4) についてはただ 1 つの左不変リッチソリトン計量が存在し，(2) については左不変リッチソリトン計量は存在しなかった．また (1), (3), (4) のリー群上の左不変リッチソリトン計量に対応する軌道は孤立軌道であった．以上により定理 4.1 が証明されることがわかる．

本節の最後に単連結概アーベルリー群 (1), (2), (3), (4) それぞれの $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への作用の軌道空間 $\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(G) \backslash \mathfrak{M}$ について述べる．左不変リッチソリトン計量が実際に存在する単連結概アーベルリー群は (1), (3), (4) に対応するものであると先ほど述べた．このとき，$\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(G) \backslash \mathfrak{M}$ は半直線 $[0, \infty)$ (図 1) に同相であり，端点 0 に対応する計量が左不変リッチソリトン計量を表す．一方，左不変リッチソリトン計量が存在しない (2) については，$\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(G) \backslash \mathfrak{M}$ は直線 $(-\infty, \infty)$ (図 2) に同相であった．

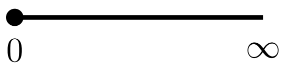

図 1　半直線 $[0, \infty)$

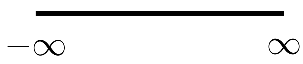

図 2　直線 $(-\infty, \infty)$

5　展望

本講演では，$\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(G)$ の $\mathfrak{M}$ への作用が余等質性 1 作用になる単連結リー群 G に “概アーベル” という仮定を付ければ予想 1.2 が肯定的に解決されることを述べた．それでは概アーベルリー群以外に，このような性質を持つ単連結リー群が存在するかが気になるが，これについては次で定義する 5 次元ハイゼンベルグリー群がその例になっている．

定義 5.1. 5 次元ベクトル空間 $\mathfrak{h}_5 = \mathrm{Span}\{x_1, x_2, y_1, y_2, z\}$ に以下のようにして括弧積を定義する:

$$[x_1, y_1] = z, \ \ [x_2, y_2] = z.$$

$\mathfrak{h}_5$ はこの括弧積に関してリー代数をなす．このリー代数を **5 次元ハイゼンベルグリー代数**とよび，対応する単連結リー群 H_5 を **5 次元ハイゼンベルグリー群**とよぶ．

5 次元ハイゼンベルグリー群 H_5 は概アーベルリー群ではないが，$\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(H_5)$ の $\mathfrak{M}$ への作用は余等質性 1 作用になる．さらに H_5 について以下の定理が成り立つことが知られている:

命題 5.2. 5 次元ハイゼンベルグリー群 H_5 について予想 1.2 は正しい．即ち，H_5 上の左不変リーマン計量 $\langle , \rangle$ が左不変リッチソリトン計量であるための必要十分条件は，$\mathbb{R}^\times \mathrm{Aut}(H_5).\langle , \rangle$ が孤立軌道になることである．

これにより概アーベルでないリー群として，少なくとも 5 次元ハイゼンベルグリー群 H_5 においては予想 1.2 が正しいことがわかった．今後は一般のリー群について予想 1.2 の解決を目指したい．

参考文献

[1] Hashinaga, T.: On the minimality of the corresponding submanifolds to four-dimensional solvsolitons, Hiroshima Math. J. **44** (2014), no. 2, 173–191.

[2] Hashinaga, T., Tamaru, H.: Three-dimensional solsolitons and minimality of the corresponding submanifolds, Internat. J. Math. **28** (2017), no. 6, 1750048, 31 pp.

[3] Kawamata, M., Tamaru, H.: A classification of almost abelian Lie groups whose moduli spaces of left-invariant Riemmanian metrics are one-dimensional, in preparation.

[4] Kodama, H., Takahara, A., Tamaru, H.: The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling, Manuscripta Math. **135** (2011), 229–243.

[5] Taketomi, Y.: On a Riemannian submanifold whose slice representation has no nonzero fixed points, Hiroshima Math. J. **48**, no. 1, 1–20 (2018).