# Syzygy と $n$ 体問題

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
梶原唯加 (Yuika KAJIHARA)

**概要**

平面上を運動する複数の質点が一直線上に並ぶ現象は syzygy（食）と呼ばれれる．Syzygy を起こすような $n$ 体問題の解（syzygy 解）については様々な結果がある．本講演では，主に 3 体問題の syzygy 解について述べるとともに，それらに関連する $n$ 体問題の結果や組みひもを用いた研究アプローチについても紹介する．

## 1 Syzygy

Syzygy とは，日本語では「食」と訳される現象であり，平面上を運動する複数の質点が一直線上に並ぶ現象を指す．日食，月食を想像すればその意味がよりわかりやすいことと思う．（ただし，日食や月食は英語では solar eclipse，lunar eclipse と呼ばれ，“syzygy” という言葉は使われていない．）Syzygy の意味は幾何的なイメージからすぐに理解できるものではあるが，数学的な定式化をするとすれば，次のようになる．

**定義 1.1** (syzygy)**.** $x_1, .., x_n \in \mathbb{R}^2$ が *syzygy* であるとは，ある直線 $l$ があって，$x_1, ..., x_n$ 全てが $l$ 上にある状態のことである．

続けて，$n$ 体問題も定義しよう：

**定義 1.2** ($n$ 体問題)**.** $\mathbb{R}^d$ 上を互いに万有引力を受けて運動する $n$ 質点 $x_1, ..., x_n$ の振る舞いを調べる問題を $n$ 体問題と呼び，次式で表される常微分方程式で定式化される．（ただし重力定数 $G$ は 1 とする．）

$$\ddot{x}_i = -\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{|x_i - x_j|^3}(x_i - x_j) \quad (i = 1, ..., n)$$

（一応．具体的な方程式まで紹介したものの，ここではこの微分方程式について解析する類の話はほとんどしないことを先に断っておく．）

**Remark 1.** 有名な事実として，$n = 2$ のときはケプラー問題となり，一般解が求められる．$n \geq 3$ のときは解析的に一般解を求めることができないことが知られており，$n$ 体問題の解に関する研究の多くは，どのような解を持ちうるのかを調べたり，具体的に特殊解を構成したりすることに焦点が当てられている．

さて, 用語の定義が終わったところで, 本講演の大まかな内容について述べておこう．以下，syzygy

を起こすような $n$ 体問題の解を単に syzygy 解と呼ぶことにする．$n$ 体問題の解には様々な形状の存在が知られているが，その中でも特に syzygy 解に関する結果を（厚かましくも自分の結果もちゃっかり混ぜながら）紹介する．

## 1.1　Syzygy と 3 体問題

3 体問題の解軌道が syzygy を起こすとき，3 質点の並び方は「中央の質点の添字の数が何であるか」によって分類される．つまり，$1, 2, 3$ を用いて作られる記号列と 3 体問題の syzygy 解との対応を考えることができる．そこで，Montgomery は次のような問題を提示した：

「任意の記号列を実現するような 3 体問題の Syzygy 解はあるだろうか？」

まずは Montgomery と Chenciner によるの 3 体問題の 8 の字解の結果（[1]）について話そう．8 の字解は下図のように運動する解である．

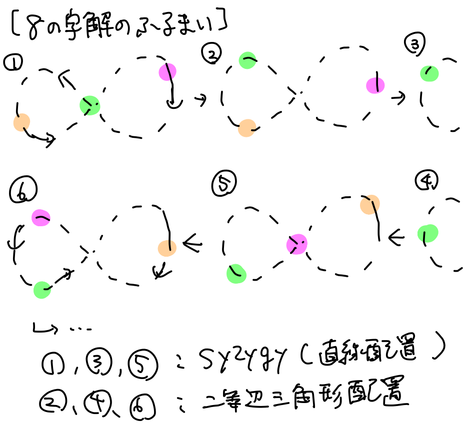


図 1　8 の字解のふるまい

8 の字解の基本的なアイデアのほとんどは Montgomery によって構築されたと言われているが，彼が 8 の字解の構成を試みたひとつの大きな動機は“syzygy”にあった．というのも，少し注意して見ると (...123123123...) という極めて特徴的な記号列を実現する syzygy 解になっている．

**Remark 2.** *Syzygy* に着目するという意味では直線になる瞬間の状態だけが重要なのだが，8 の字解の形状についてもう少し述べておくと，図 1 の中にも記しているように，8 の字解は直線配置（3 つの質点が同一直線上に並んだ状態）と二等辺三角形配置（3 つの質点が二等辺三角形を成している状態）を交互に繰り返す軌道として特徴付けられる．一般に $n$ 体問題は変分構造を持ち，8 の字解の存在証明は変分法によってなされる．幾何的特性を反映した関数空間のもとでの汎関数の最小値を解析することで 8 の字解が得られる．変分法を用いた $n$ 体問題の周期解の構成法については [*11*] に詳しく書かれている．

また，Montgomery は 8 の字解の論文を発表した数年後に，次のような結果も示している．

**定理 1.3** ([7])**.** 3 体問題の解が次の 3 つの条件を満たすとする：

(1) 有界である，(2) 角運動量が 0 である，(3) 三体衝突をしない．

このとき，　解は無限回 *syzygy* を起こす．

もちろん，仮定されている解の集合が空であれば，定理の主張は意味のないものになってしまうのだが，少なくとも 8 の字解は (1)〜(3) の条件を満たすような解である．また，上で述べた 8 の字解の存在や定理の証明には shape sphere という概念が用いられている．これは，とても大雑把な説明をすれば，うまく方程式を reduction することによって 3 体問題の解の情報を 3 次元空間を動く一点の動きに集約させたものである．さらに，スケール変換によって，その一点の長さが 1 になるようにスケール変換すると，下図のような対応関係が得られる．

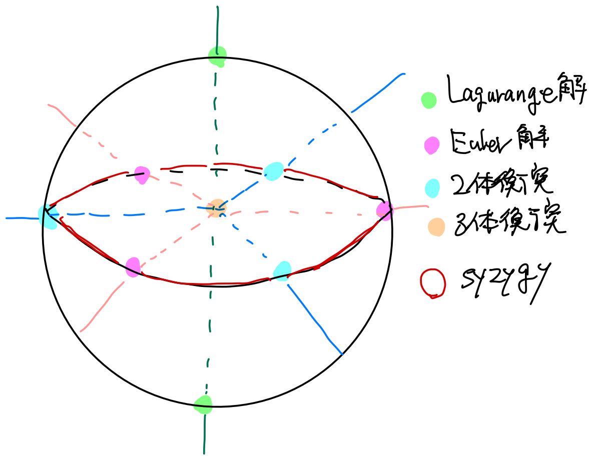


図 2　Shape sphere

この図が意味することをもう少し説明しよう．3 体衝突は 0 に対応し，スケール変換しても 0 のままだから，常に原点にある．つまり shape sphere 上の原点を通る軌道は 3 体衝突している．Euler 解と Lagurange 解は 3 体問題の特殊解である．特に，Euler 解は常に直線配置を保って運動する軌道である．（つまり syzygy 解である．）その Euler 解がのっている赤道上が syzygy に対応する．先に述べたようにこれは半径 1 になるようにスケール変換（3 次元上の点を球面に射影）したものだから，実際には $z = 1$ なる平面が syzygy を表す．3 次元に落ちた軌道が shape sphere と呼ばれる球のどの領域を通過するかによって，どのような syzygy を起こすのかを調べることができるのである．

**Remark 3.** 少し前に「三体」という *SF* 小説がブームになった．（ブームになったと書いたけど，私は読んだことがないのでよく知らない．）その頃に，科学雑誌の日経サイエンスで 3 体問題特集が組まれたことがあり，*Montgomery* の記事の日本語訳 [*10*] が載っているので，もし興味がある方がいらっしゃったらお手にとっていただければと思う．

## 1.2 Syzygy と $n$ 中心問題

3 体問題のときほど特徴的ではないのだが，3 体問題以外の場合でも知られている結果がいくつかある．その前にひとつ言葉の定義を述べておこう．

**定義 1.4** ($n$ 中心問題)**.** $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$ は定ベクトル. とし，

$$\ddot{x} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{|x - a_k|^3}(x - a_k) \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

で与えられる微分方程式によって振る舞いが決定される問題を $n$ 中心問題という．

$n$ 中心問題は $n+1$ 体問題のひとつであることに注意していただきたい．要するに，$n$ 中心問題は $n$ 個の固定された質点から万有引力を受けて運動するとき，どのような振る舞いをするのかを調べる問題である．特に，2 中心問題は 3 体問題のひとつではあるのだが，2 中心問題は解析的に「解ける」問題（つまり可積分な問題）である．ただし，それは単に十分な数の第一積分が存在するというだけであって，ケプラー問題のときのように一般解が綺麗に書けるという意味ではない．

まずは平面 2 中心問題を考えよう．固定される 2 質点が $x$ 軸上にあるとしても一般性を失わない．したがって．運動する質点が $x$ 軸を通過するときにどの質点が真ん中にあるかによって，sygyzy 列の対応をみることができる．2 中心問題の syzygy 解についても Montgomery は Dullin との共同研究の中で次のような結果を残している．

**定理 1.5** (Dullin & Montgomery, [3])**.** 平面 2 中心問題は次のような *syzygy* 解を持つ．

- ....121212...
- ...$(13)^{n_1}(23)^{n_2}(13)^{n_3}2$...
- ...$(13)^{n_1}(13)^{n_2}(13)^{n_3}1$...
- ...$(23)^{n_1}(23)^{n_2}(23)^{n_3}2$...

また，上の結果とは別に (...111...) という syzygy 解の存在もわかっている（[4]）．

$n \geq 3$ の場合の $n$ 中心問題は，固定される $n$ 質点が全て同一直線上に乗っているという，syzygy 解を考えるにあたっては都合のいい仮定をしたもとでは，Chen と Yu による次の結果が知られている．（ただし，ここでは $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ を同一視している．）

**定理 1.6** ([2])**.** 固定される質点が全て実軸上にある $n$ 中心問題を考える．このとき，$\boldsymbol{s} = (s_1, ..., s_l) \in \{0, 1, ..., n\}^l$ $(l \geq 2)$ が $|s_i - s_{i+1}| \geq 2$ かつ，$\max |s_i - s_j| \geq 3$ ならば，$\boldsymbol{s}$ に対応する *syzygy* 解が存在する．

3 体問題の場合は syzygy を起こす瞬間にどの質点が中央にあるかによって番号を決めていたが，上の定理では，$n$ 個の質点が固定されている区間は質点によって $n+1$ 個の区間に分けられるから，運動する質点がどの区間を通過するかによって，syzygy 列との対応を定めている．

**Remark 4.** 定理 1.6 で得られる *syzygy* 解は $x$ 軸に対して垂直に交わる．$x$ 軸に対して折り返した軌道と滑らかにつなげることにより，解は周期解になる．

また，定理の仮定にある「$|s_i - s_{i+1}| \geq 2$ かつ，$\max |s_i - s_j| \geq 3$」というかなり技巧的に思える仮定が気になる方がおられるかもしれない．これは衝突する（つまり，ある瞬間に軌道の位置が固定されている質点のいずれかと一致してしまう）ことを省くための十分条件である．ここでは詳しくは述べないが，$n$ 体問題は微分方程式に特異性があるため．syzygy 解を構成するときに衝突しないことを示す必要がある．

## 1.3　Syzygy と制限 3 体問題

2 中心問題の一般化としては $n$ 中心問題以外にもうひとつの方向性として，制限 3 体問題がある．

**定義 1.7** (制限 3 体問題)．$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$ は 2 体問題の解軌道とする．このとき

$$\ddot{x_3} = \sum_{i=1}^{2} -\frac{m_i}{|x_3 - x_i|^3}(x_3 - x_i)$$

で定まる $x_3$ の振る舞いを調べる問題を制限 3 体問題と呼ぶ.

制限 3 体問題は上の定義式からも分かるように，3 体問題において，3 質点のうちのひとつの質量 $m_3$ が $m_1, m_2$ に比べて 0 とみなせるくらい極めて小さいと仮定したもとでの $x_3$ 振る舞いを調べる問題である．質点 $x_1, x_2$ は $x_3$ に影響を及ぼすが，2 中心問題と同様に $x_1, x_2$ は $x_3$ から影響を受けない．また付加される条件として，$x_1, x_2$ は互いに引力を及ぼしあい，2 体問題の解の振る舞いをする．特に，$x_1, x_2$ が円運動をするとすると，これは円制限 3 体問題と呼ばれ，平面円制限 3 体問題は回転座標系を用いて変数変換することで，$x_1, x_2$ が $x$ 軸座標上に静止しているような微分方程式に書き換えることができる．

平面円制限 3 体問題を $x_1, x_2$ が静止してみえる座標系で考えたとき，次の図で示すような周期解の存在が知られている（[5]）．$\mu$ は $m_1, m_2$ の比によって決まる値なのだが，今回は関係ないので無視してもらって構わない．ここで注目したいのはこの解もまた syzygy が起こっているということである．（図の中の軌道の番号づけが 3 から 6 なのは，私がちょっとした修正をめんどくさがってしまっただけで，深い意味はないので気にしないでください．）

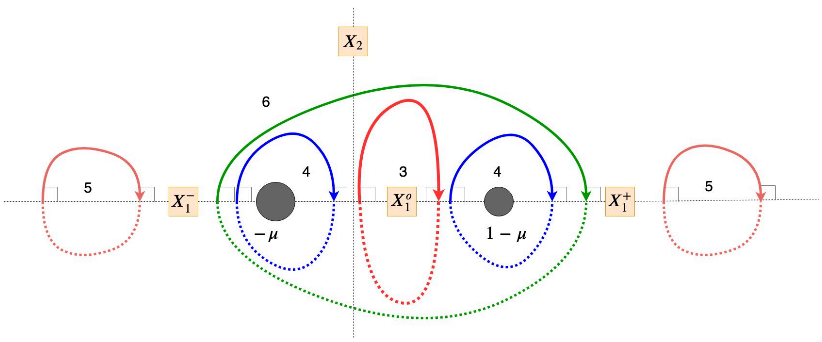


図 3　Type 3 - 6

しかしながら，実は上図には一部「うそ」の情報が含まれている．というのも，例えば，番号 6 と添字のついた緑色の軌道は一見すると (1212...) に対応する syzygy 解に見えるのだが，ここで存在が

示されている $T$-周期解について保証されていることは「時刻 $T/2$ ごとに $x$ 軸を垂直に横切る」ということだけである．したがって，例えば $t=0$ に $x$ 軸を横切ったとすると，$t \in (0, T/2)$ の間にどのような振る舞いをしているかはわからない．したがって，制限 3 体問題がどのような syzygy 解を持つのかはまだ未解決のままである．

**Remark 5.** 平面円制限 3 体問題の場合，回転座標系用いて質量の大きな 2 質点が静止しているような系で運動を考えることはよく行われる．ただし他の一般的な $n$ 体問題と大きく異なる点は，微分方程式に遠心力の項が加わり，もちろん変分問題を考えたときに現れる汎関数にも反映される．*Remark* 2 でも少し触れたように，$n$ 体問題の特殊解の構成には汎関数の最小化が広く用いられているが，平面円制限 3 体問題では，「たくさん動けば動くほど作用積分値が大きくなる」と言う直感が通用しない．この辺りの議論に関しては，[*9*] の中で詳しく述べているのでよければ参考にしていただきたい．

## 1.4 Syzygy と braid

再び話を 8 の字解に戻そう．3 体問題の 8 の字解の存在証明は変分法を用いてなされており，解の具体的な関数の形が分かっているわけではない．しかしながら，8 の字を描く関数として，よく知られているものにリサージュ曲線がある．リサージュ曲線とは，一般に

$$L(t) = A\sin(nt) + iB\sin(mt)$$

と表現される．（正確には，$L(t) = A\sin(at+\delta) + iB\sin(bt)$ で表現されるものであるようだが，紹介する論文結果に合わせて，前者をリサージュ曲線と呼ぶことにする．）これは $(n, m) = (1, -2)$ のとき，$L(t)$ は 8 の字を描く．

最近，このリサージュ曲線と 3 体問題に着目した結果（[6]）について知る機会があり，syzygy とも少しばかり関係があるように感じたので，せっかくなのでここで紹介しよう．

この論文の主結果のひとつは，ざっくり言ってしまえばリサージュ曲線上の 3 点

$$a(t) = L(t-1/3),\ b(t) = L(t),\ c(t) = L(t+1/3)$$

から作られる braid（組みひも）の構造を明らかにした，ということにある．組みひもとは複数のリサージュ曲線から braid を作るとはどういうことかと言うと，$\{(t, a(t))\}$ を考えることでひとつの「紐」を表すグラフができる．$\{(t, b(t))\}, \{(t, c(t))\}$ についても同様に考えることで，その 3 本の紐からなる 3-braid を構成できる．（私は braid について，かなり素人な人間で，こんなぼんやりとした説明を組みひもを専門としている方が読んだら怒られてしまうかもしれないが，今回はご容赦いただきたい．）

もちろん 3-braid を構成するにあたっては braid が満たすべき性質をいくつか明確にしとかなければいけない．特に，紐同士が重なってはいけない，という条件は，$n$ 体問題における「衝突」の概念とよく似ている．リサージュ曲線の式の形から $n, m$ が互いに素である場合は 3 体衝突（braid を作ったときに 3 本がひとつの点で重なる）は起こり得ないことがわかる．2 体衝突が起こらない条件は少し計算が煩雑になるのでここでは割愛する．

衝突しないように適切な条件を $n, m$ に付加したもとで，リサージュ曲線からできる braid の構造を調べる際の操作は shape sphere と似ている．$a, b, c$ からできる三角形の情報を複素平面上の 1 点に集約させる．用いる複素平面は下図のように 6 つの領域 $1^{\pm}, 2^{\pm}, 3^{\pm}$ に分割されている．

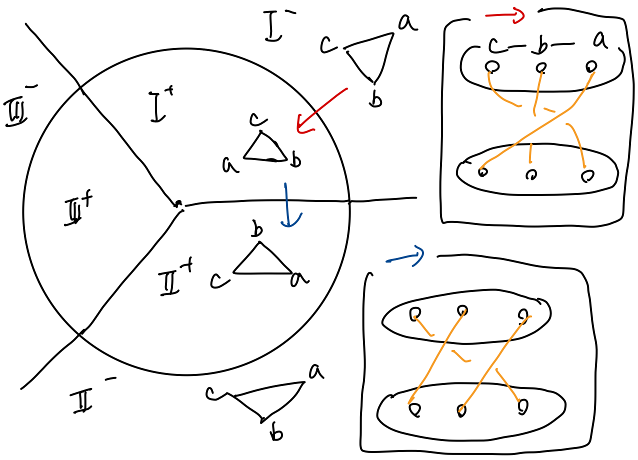

図 4　Type 3 - 6

図の見方を説明しよう．リサージュ曲線から作られる braid は，図の複素平面上を点がどの領域を通過していくかによって決定される．同じ番号がついた領域同士の $\pm$ 間での行き来（赤い矢印）は右上に書いた braid に対応する．$1^+$ から $2^+$ への移動（$2^+$ から $3^+$ への移動，$3^+$ から $1^+$ への移動も同様）は左下に書いた brad に対応する．これまで述べてきた syzygy は，ここでは三角形が潰れる（degenerate）ことに対応し，三角形が degenerate している点は複素平面上では $|z| = 1$ に対応している．（この $z$ は複素数であり，さきの shape sphere で出てきた $z$（この $z$ は 3 次元空間の $(x, y, z)$ の $z$ である．）とは意味が違うことに注意されたい．）また，原点は 3 体衝突に，$\omega^3 = 1$ なる 3 点 $\{1, \omega, \omega^2\}$ は 2 体衝突に対応する．そして，複素平面上をどの領域を順番に通るかが $n, m$ によって決定され，braid の構造を決定することができるのである．

## 2　空間上の"syzygy"

さて，この章ではおまけとして，空間上の"Syzygy"を考えた結果を紹介しよう．これは空間上で質点が一直線上に並ぶ，という意味ではなく，3 次元上を運動していたものが 2 次元に落ちる，という意味で使っている．そうなると，もはや日食や月食を連想させる「食 (Syzygy)」という言葉を使うのはあまり適切ではないのかもしれない．Montgomery はこの現象を単に coplanar と呼んで，次のような結果を示している．

**定理 2.1** ([8])**.** 角運動量が 0 であるような 4 体問題の有界な解は必ず無限回 *coplanar* になる．

さて，Montgomry は 1.1 節で述べたように，彼の一つの研究テーマとして，「多体問題の解と対応

する記号列との関係」があった．3 体問題と違って，4 体問題の場合，coplanar を生じさせる解と記号列との対応はより複雑になってしまう．定理 2.1 から coplanar が何度も起こるような解が存在することはわかるが，具体的には 7 通りのパターンが考えられる．（三角形で真ん中に一点がある場合が 4 つ，四角形をなす場合が 3 つ．）$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ で作られる記号列との対応はどのようなものが考えられるか，そもそも 7 つのパターンは全て起こり得るのかどうかなどは open problem として残っている．

## 3　おわりに

ここでは一貫して証明の細部に立ち入るということは避けた．証明についての詳細が気になる人は参照している論文を参考していただきたく思う．

最後に少し私の個人的なエピソードを記させていただきたい．以前ある研究会に参加したときのことである．それはこの北海道大学の研究集会と同様に大学院生主体のもので，数学の異分野間での情報交換をひとつの目的としていたように思う．講演の中で先行研究として，8 の字解について軽く触れたのだが，その後の懇親会で，講演を聞いてくださった方から「Montgomery って，Richard Montgomery ですか」と聞かれた．その方はエンゲル多様体というものについて研究しているらしく，Montgomery はエンゲル多様体についても結果を残しているとのことだった．正直，私の中で Montgomery は「$n$ 体問題の人」という印象で．それ以外の分野での活躍を私は何も知らなかった．そして，私同様，尋ねてくれた彼も Montgomery は「エンゲル多様体の人」という印象で，$n$ 体問題の結果について知らなかったそうで，予想外の発見にお互いがとても驚いたのを覚えている．

私がここで書いたことに興味を持ってくださる方がおられるのかはよくわからないのだが，あのときのように，誰かの中に少しでも何らかの新しい発見があれば幸いである．またお気づきのこと，疑問点などあれば，こちらのメール（cajihara@amp.i.kyoto-u.ac.jp）に一報いただきたい．

## 参考文献


[1] A. Chenciner & R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Annals of Mathematics*, **152** (2000), 881–901.

[2] K. -C. Chen & G. Yu, Syzygy sequences of the N-center problem, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **38** (2018), 566–582.

[3] H. R. Dullin & R. Montgomery, Syzygies in the two center problem, *Nonlinearity* **29** (2016), 1212–1237.

[4] Y. Kajihara & M. Shibayama, Variational proof of the existence of brake orbits in the planar 2-center problem, *Discrete Contin. Dyn. Syst*. **39** (2019), 5785–5797.

[5] Y. Kajihara & M. Shibayama, Variational existence proof for multiple periodic orbits in the planar circular restricted three-body problem, submitted.

[6] E. Kin, H. Nakamura & H. Ogawa, Lissajous 3-braids, https://arxiv.org/abs/2008.00585.

[7] R. Montgomery, Infinitely many syzygies. *Arch. Ration. Mech. Anal*. **164** (2002), 311–340.

[8] R. Montgomery, Oscillating about coplanarity in the 4-body problem, *Invent. Math*. **218**

(2019), 113–144.

[9] 梶原唯加，制限 3 体問題のいくつかの周期解，*HokkaidoUniversityTechnicalReport Series in Mathematics* = 北海道大学数学講究録, (2020), 521–529.

[10] R. モンゴメリー，三体問題に進展 周期解に新たな予想，日経サイエンス, 2020 年 3 月号, 36–47.

[11] 柴山允瑠，特別講義 解析学 A「$n$ 体問題の周期解の変分解析」，神戸大学集中講義，https://sites.google.com/view/mitsurushibayama/.