

粘性 Fornberg–Whitham 方程式の解の高次漸近形

板坂健太 (Kenta ITASAKA) *

無所属

福田一貴 (Ikki FUKUDA) †

信州大学 工学部 工学基礎部門

1 導入

本稿では、粘性 Fornberg–Whitham 方程式と呼ばれる次の偏微分方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{aligned} u_t + \beta uu_x + \int_{\mathbb{R}} Be^{-b|x-\xi|} u_\xi(\xi, t) d\xi &= \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\beta \neq 0$, $B, b, \mu > 0$ であるとする。また、初期値 $u_0(x)$ に関する詳しい仮定は後述するが、空間遠方で十分早く減衰する状況を考察する。この方程式 (1) は、散逸、分散、移流の 3 つの効果を考慮した水面波のモデル方程式の一種であり、波の散逸効果を表現する粘性項 μu_{xx} 、非局所分散項 $\int_{\mathbb{R}} Be^{-b|x-\xi|} u_\xi(\xi, t) d\xi$ 、及び非線形移流項 βuu_x からなる非線形偏微分方程式である。特に、分散型偏微分方程式の中でも、分散項が非局所的な量み込み積分の形で与えられることが最大の特徴である。一般に、非線形の微分方程式では解を具体的に書き下すことは不可能である。それゆえ、解の具体的な表示を求めて、そこから解の挙動を調べることは期待できない。一方、たとえ解の具体的な表示を得ることができない場合でも、時間無限大での解の挙動については情報を得られることがある。本稿では、時間無限大における解の形状、すなわち解の漸近形を詳しく調べる。具体的には、解の第 1 次漸近形、第 2 次漸近形、第 3 次漸近形を導出することで、解の構造を理論的に理解する。はじめに、この問題を考える背景となる元の問題と、関連する方程式の解の漸近挙動について、既知の結果を紹介しよう。

2 Fornberg–Whitham 方程式

(1) において粘性項を無くした方程式を Fornberg–Whitham 方程式と呼ぶ：

$$\begin{aligned} u_t + \beta uu_x + \int_{\mathbb{R}} Be^{-b|x-\xi|} u_\xi(\xi, t) d\xi &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

(2) は水面波における砕波現象を記述するモデル方程式として、1900 年代初めに Whitham [18], Whitham & Fornberg [2] によって考案された。ここで、砕波が発生するとは、波形の前傾化に伴う微分係数の発散を意味し、より正確には次が成り立つことをいう：ある $0 < T_0 < \infty$ で、

* E-mail: kenta.itasaka@gmail.com

† E-mail: i_fukuda@shinshu-u.ac.jp

2020 Mathematics Subject Classification: 35B40, 35Q53

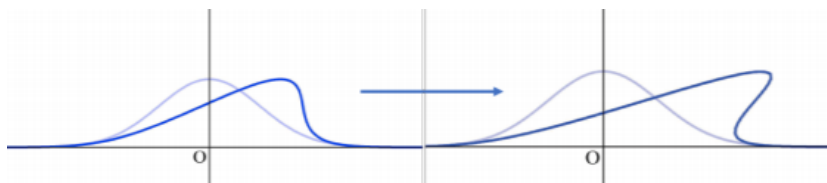


図1 砕波現象

$\sup_{t \in [0, T_0)} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty$ かつ $\limsup_{t \uparrow T_0} \|u_x(t)\|_{L^\infty} = \infty$ となる (cf. 図 1). 防波堤などの構造物に波が当たる場合, 砕波の発生の有無によって加わる衝撃圧の大きさが大きく異なることが知られており, 波の砕波・非砕波は数学の研究としてだけでなく, 工学的にも重要な問題となっている (cf. [17]).

Fornberg-Whitham 方程式の背景には, より一般の非局所分散項を持つ次の偏微分方程式がある:

$$u_t + \beta u u_x + \int_{\mathbb{R}} K(x - \xi) u_\xi(\xi, t) d\xi = 0.$$

ここで, $K(x)$ は実の偶関数とする. この方程式は一般に Whitham 方程式と呼ばれている. Whitham 方程式に対する砕波現象の研究は, Seliger [16] により始まった. そこでは, 形式的な議論により, Whitham 方程式では砕波が発生することが示された. その後, Constantin & Escher [1] により, Whitham 方程式の解が砕波するための十分条件が数学的に厳密な形で与えられた. [14] では, この結果を改善したより一般の十分条件が求められている. これらの結果を (2) に適用すると, 解の砕波条件としてパラメータ B を含む条件が得られる. 実際, B を 0 に近づけると, (2) は形式的に非粘性 Burgers 方程式: $u_t + \beta u u_x = 0$ に近づき, この方程式に対しては砕波が起こるため, このパラメータが砕波の発生に影響するのは自然である. 一方で, b を 0 に近づけた場合にも, (2) は形式的に非粘性 Burgers 方程式に近づくと, 上記の砕波条件にはパラメータ b が含まれていない. この観点から, [8] では二つのパラメータ B と b を共に含む砕波条件が導出されており, B または b を十分小さくしたときに, (2) の解の砕波が保証されている. また, 「形式的に非粘性 Burgers 方程式に近づくと」と述べたが, [8] でこの予想が正しいことが示されている. 具体的には, $B \rightarrow 0$ もしくは $b \rightarrow 0$ としたとき, (2) の解が非粘性 Burgers 方程式の解に収束すること, さらに (2) の解の爆発時刻が非粘性 Burgers 方程式の解の爆発時刻に収束することが示されている. 他方, b を ∞ に近づけた場合も, (2) は形式的には非粘性 Burgers 方程式に近づき, 砕波の発生が予想される. 実際, [17] の数値解析結果では砕波の発生が観測されている. しかしながら, そのような状況を含む砕波条件は未だ導出されていない.

Tanaka [17], Hörmann & Okamoto [7] では, 数値解析を用いて (2) が調べられている. その中で, (2) は初期値 $u_0(x)$ とパラメータ B, b に応じて, 爆発解 (砕波の発生) と大域解の両方を持つことが示唆されている. 上述したとおり, 解の砕波条件については多数の数学的な結果が存在する. 一方で, 解の大域存在を示す数学的な結果は現在のところ得られていない. よく知られているように, 代表的な分散型方程式である KdV 方程式: $u_t + \beta u u_x + u_{xxx} = 0$ では, ある程度滑らかな初期値に対して, 解は常に時間大域的に存在する. これは, 非線形効果と分散効果が釣り合うことで, エネルギーが保存されることによる. この観点から, 非線形効果と分散効果の関係を調べることで, また異なる形の分散項との比較を行うことは, (2) の大域解の存在を示すために重要であると思われる. 今回の対象である (1) は粘性項を付与したことにより, (2) とは解の性質が異なるものの, 散逸効果で解析が容易になるが故に, 詳しい解の振る舞いを知ることができると予想される. よって, 本研究を通して非局所分散項や非線形項の性質を調べることで, 元の問題 (2) を解析するためのヒントが得られると期待できる.

3 Burgers 型方程式

粘性項の効果によって, (1) は Burgers 型の方程式に類似の解構造を持つと期待される. 本節では, 関連する問題の時間大域挙動に関する既知の結果を紹介する. まず, 次の Burgers 方程式を考える:

$$\begin{aligned} u_t + \alpha u_x + \beta u u_x &= \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで, $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $\beta \neq 0, \mu > 0$ とする. $\alpha = 0$ の場合には, 一般の粘性保存則系の場合も含めて多くの結果が知られている (e.g. [11, 13, 15]). 変数変換を行うことで, 一般の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対しそれらの結果を適用することができ, (3) の解は以下で定義される非線形散逸波に漸近することが分かる:

$$\chi_\alpha(x, t) := \frac{1}{\sqrt{1+t}} \chi_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

ここで,

$$\chi_*(x) := \frac{\sqrt{\mu}}{\beta} \frac{(e^{\frac{\beta M}{2\mu}} - 1) e^{-\frac{x^2}{4\mu}}}{\sqrt{\pi} + (e^{\frac{\beta M}{2\mu}} - 1) \int_{x/\sqrt{4\mu}}^{\infty} e^{-y^2} dy}, \quad M := \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx, \quad \beta \neq 0$$

である. 正確には, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$ であり, $\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^1}$ が十分小さいとき, 次が成立する:

$$\|u(\cdot, t) - \chi_\alpha(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1}, \quad t \geq 0. \quad (4)$$

ここで, 重みつき Lebesgue 空間 $L^1_k(\mathbb{R})$ は, $k \geq 0$ に対し $\|u_0\|_{L^1_k} := \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)| (1+|x|)^k dx < \infty$ となる関数の全体である. なお, 非線形散逸波 $\chi_\alpha(x, t)$ は Burgers 方程式

$$\chi_t + \left(\alpha \chi + \frac{\beta}{2} \chi^2 \right)_x = \mu \chi_{xx}, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi(x, t) dx = M$$

の解であり, $\alpha = 0$ とした Burgers 方程式の自己相似解を修正したものである.

続いて, KdV-Burgers 方程式と呼ばれる以下の方程式を考える:

$$\begin{aligned} u_t + \alpha u_x + \beta u u_x + \gamma u_{xxx} &= \mu u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

ここで, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ とし, $\beta \neq 0, \mu > 0$ とする. KdV-Burgers 方程式は, Burgers 方程式 (3) に分散項を加えたもの, または KdV 方程式に粘性項を加えたものと捉えることができる. $\alpha = 0$ の場合の解の漸近挙動については, 多数の結果が知られている (e.g. [3, 6, 9, 10]). Burgers 方程式の場合と同様, 変数変換を行うことで, 一般の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対してそれらの結果を適用することができる. 特に, [3] の結果から, $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^3(\mathbb{R})$ であり, $\|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{H^3}$ が十分小さいとき, 以下が成立する:

$$\|u(\cdot, t) - \chi_\alpha(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1} \log(1+t), \quad t \geq 1, \quad (6)$$

$$\|u(\cdot, t) - \chi_\alpha(\cdot, t) - V_{\alpha, \gamma}(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-1}, \quad t \geq 1. \quad (7)$$

ここで, 関数 $V_{\alpha, \gamma}(x, t)$ は以下で定義される:

$$V_{\alpha, \gamma}(x, t) := -\kappa d V_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right) (1+t)^{-1} \log(1+t).$$

ただし,

$$V_*(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu}} \frac{d}{dx} (\eta_*(x) e^{-\frac{x^2}{4\mu}}), \quad \eta_*(x) := \exp\left(\frac{\beta}{2\mu} \int_{-\infty}^x \chi_*(y) dy\right),$$

$$d := \int_{\mathbb{R}} (\eta_*(y))^{-1} (\chi_*(y))^3 dy, \quad \kappa := \frac{\beta^2 \gamma}{8\mu^2}$$

である. (7) の評価を利用すると, $V_{\alpha,\gamma}(x,t)$ が恒等的に 0 でない場合には, (6) の漸近レートは最適であることが分かる. 実際, 三角不等式より, 十分大きな $t > 0$ に対して次の評価が成立する:

$$C_1(1+t)^{-1} \log(1+t) \leq \|u(\cdot, t) - \chi_\alpha(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq C_2(1+t)^{-1} \log(1+t).$$

ここで, Burgers 方程式 (3) の解の非線形散逸波への漸近レート (4) と, KdV-Burgers 方程式 (5) の解の非線形散逸波への漸近レート (6) を比較すると, $\log(1+t)$ 分だけ KdV-Burgers 方程式の解のほうが散逸波への収束が遅いことが分かる. この理由は, 分散項の存在の有無によると考えられる. このように, 分散項の効果は解の漸近挙動に本質的な影響を与える. それゆえ, 解の漸近挙動を調べ, それらを比較することで, 分散項の性質が浮かび上がることが期待できる.

4 主結果

本節では, 本研究で得られた結果を述べよう. まず, (1) に現れる非局所分散項について, フーリエ変換と畳み込み積分の性質を用いると, 以下が成り立つことがわかる:

$$\int_{\mathbb{R}} B e^{-b|x-\xi|} u_\xi(\xi, t) d\xi = \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{i2Bb\xi}{b^2 + \xi^2} \hat{u}(\xi) \right] (x) = 2Bb(b^2 - \partial_x^2)^{-1} u_x.$$

ここで, $\mathcal{F}^{-1}[g](x)$ は関数 $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ のフーリエ逆変換を表す. 上の項をさらに分解して,

$$2Bb(b^2 - \partial_x^2)^{-1} u_x = \frac{2B}{b} \partial_x u + \frac{2B}{b^3} \partial_x^3 u + \frac{2B}{b^3} (b^2 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^5 u$$

を得る. これを利用すると, (1) は以下の形に書き直せる:

$$u_t + \frac{2B}{b} u_x + \beta u u_x + \frac{2B}{b^3} u_{xxx} + \frac{2B}{b^3} (b^2 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^5 u = \mu u_{xx}. \quad (8)$$

ここで, 熱方程式の解の時間減衰評価を思い出す. まず, 修正熱核を以下で定義する:

$$G_0(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-\alpha t)^2}{4\mu t}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

関数 $G_0(x, t)$ は, 線形の移流熱方程式 $w_t + \alpha w_x = \mu w_{xx}$ の基本解となる. 通常の熱核と同様に, $G_0(x, t)$ に対して, 以下の評価が成り立つ:

$$\|\partial_x^l G_0(\cdot, t)\|_{L^p} \leq C t^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2p} - \frac{l}{2}}, \quad t > 0.$$

ただし, $1 \leq p \leq \infty$, l は非負整数である. この評価から, 修正熱核は空間微分の回数が増す毎に時間減衰が速くなることが分かる. ここで, 初期値が小さい場合には, (8) の解 $u(x, t)$ に対しても同様の減衰評価が成立することに注意する. それゆえ, 低次の漸近形を考える際には, 高次の空間微分の項を

無視できると予想される。そこで、多少天下り的ではあるが、方程式 (8) から 5 次の微分を含む分散項を取り除くことで、以下の KdV–Burgers 方程式が導かれる:

$$u_t + \frac{2B}{b}u_x + \beta uu_x + \frac{2B}{b^3}u_{xxx} = \mu u_{xx}.$$

これは、(5) において、 $\alpha = \frac{2B}{b}$, $\gamma = \frac{2B}{b^3}$ としたものである。よって、低次の漸近形については、粘性 Fornberg–Whitham 方程式と KdV–Burgers 方程式で同一のものが得られるのではないかと予想できる。本研究では、実際にこの予想が正しいことが示せた。以下、 $s \geq 1$, $k \geq 0$ に対して、 $E_{s,k} := \|u_0\|_{H^s} + \|u_0\|_{L^1_k}$ とする。また、 $\chi(x,t) := \chi_{\frac{2B}{b}}(x,t)$, $V(x,t) := V_{\frac{2B}{b}, \frac{2B}{b^3}}(x,t)$ と置く。この記号のもとで、(1) の解の第 1 次漸近形と第 2 次漸近形に関する次の結果が成立する:

Theorem 1 ([5]-Theorem 1.1). $s \geq 1$ とし、 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$ かつ $E_{s,0}$ は十分小さいとする。このとき、(1) は唯一の時間大域解 $u \in C^0([0, \infty); H^s)$ を持つ。更に、 $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$ ならば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次の評価が成立する:

$$\|\partial_x^l(u(\cdot, t) - \chi(\cdot, t))\|_{L^p} \leq CE_{s,1}(1+t)^{-1+\frac{1}{2p}-\frac{l}{2}+\varepsilon}, \quad t \geq 0.$$

ここで、 $2 \leq p \leq \infty$, l は $0 \leq l \leq s-1$ を満たす整数である。

Theorem 2 ([5]-Theorem 1.3). $s \geq 2$ とし、 $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$ かつ $E_{s,0}$ は十分小さいとする。このとき、(1) の解に対して、次の評価が成立する:

$$\|\partial_x^l(u(\cdot, t) - \chi(\cdot, t) - V(\cdot, t))\|_{L^p} \leq CE_{s,1}(1+t)^{-1+\frac{1}{2p}-\frac{l}{2}}, \quad t \geq 1.$$

ここで、 $2 \leq p \leq \infty$, l は $0 \leq l \leq s-2$ を満たす整数である。

これらの結果より、第 1 次漸近形、第 2 次漸近形については、粘性 Fornberg–Whitham 方程式と KdV–Burgers 方程式で本質的に同一のものとなることが分かる。両者を比較すると、5 次の分散項の有無が差異であるが、空間微分回数の増加に伴って解の時間減衰が速くなることから、第 2 次漸近形までは 5 次の分散項の効果が現れなかったと考えられる。他方、より高次の漸近形を考えることは、より時間減衰が速い世界で解の挙動を捉えることに相当し、5 次の分散項の影響により双方の漸近形に差異が生まれることが期待できる。この観点から、我々は (1) の解の第 3 次漸近形を導出した。

解の第 3 次漸近形に関する結果を述べるために、新たな関数 $W(x,t)$ と $\Psi(x,t)$ を導入する。まず、 $W(x,t)$ を以下で定義する:

$$W(x,t) := \theta V_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right) (1+t)^{-1}, \quad \alpha = \frac{2B}{b}.$$

ここで、

$$\theta := \int_{\mathbb{R}} z_0(x) dx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \rho(x,t) dx dt, \quad z_0(x) := \eta(x,0)^{-1} \int_{-\infty}^x (u_0(y) - \chi(y,0)) dy, \quad (9)$$

$$\rho(x,t) := -\eta(x,t)^{-1} \left(\frac{\beta}{2}(u - \chi)^2 + \frac{2B}{b}(b^2 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^2(u - \chi) + \frac{2B}{b^3}(b^2 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^4 \chi \right) (x,t),$$

$$\eta(x,t) := \eta_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right) = \exp \left(\frac{\beta}{2\mu} \int_{-\infty}^x \chi(y,t) dy \right)$$

である。次に、 $\Psi(x, t)$ を以下で定義する：

$$\Psi(x, t) := \Psi_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right) (1+t)^{-1}, \quad \alpha = \frac{2B}{b}. \quad (10)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Psi_*(x) &:= \frac{d}{dx} \left(\eta_*(x) \int_0^1 (G(1-\tau) * F(\tau))(x) d\tau \right), \quad G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{x^2}{4\mu t}}, \\ F(x, \tau) &:= F_* \left(\frac{x}{\sqrt{\tau}} \right) \tau^{-\frac{3}{2}}, \quad F_*(x) := \frac{2B}{b^3} \eta_*(x)^{-1} \chi''(x) - \frac{\kappa d}{\sqrt{4\pi\mu}} e^{-\frac{x^2}{4\mu}}, \quad \kappa := \frac{\beta^2 B}{4b^3 \mu^2} \end{aligned}$$

である。最後に、 $W(x, t)$ と $\Psi(x, t)$ を足し合わせ、

$$Q(x, t) := W(x, t) + \Psi(x, t)$$

と定義する。このとき、この関数 $Q(x, t)$ が (1) の解の第 3 次漸近形となる。実際、以下が成立する：

Theorem 3 ([5]-Theorem 1.6). $s \geq 3$ とする。 $u_0 \in L_1^1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$ かつ $z_0 \in L_1^1(\mathbb{R})$ とし、 $E_{s,0}$ は十分小さいとする。このとき、(1) の解に対して、以下が成立する：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1+t)^{1-\frac{1}{2p}+\frac{l}{2}} \|\partial_x^l (u(\cdot, t) - \chi(\cdot, t) - V(\cdot, t) - Q(\cdot, t))\|_{L^p} = 0.$$

ここで、 $2 \leq p \leq \infty$, l は $0 \leq l \leq s-3$ を満たす整数である。

解の第 3 次漸近形を導出したことで、 $u(x, t) - \chi(x, t) - V(x, t)$ の最適な減衰レートが導出される：

Corollary 4 ([5]-Corollary 1.7). Theorem 3 と同様の仮定のもとで、次が成立する：

$$\|\partial_x^l (u(\cdot, t) - \chi(\cdot, t) - V(\cdot, t))\|_{L^p} = (c_0 + o(1))(1+t)^{-1+\frac{1}{2p}-\frac{l}{2}}, \quad t \rightarrow \infty.$$

ここで、 $2 \leq p \leq \infty$, l は $0 \leq l \leq s-3$ を満たす整数、 $c_0 := \|\partial_x^l (\theta V_* + \Psi_*)\|_{L^p}$ である。

Remark 5. Theorem 3 の証明の手法は、KdV–Burgers 方程式 (5) に対しても応用できる。特に、(5) において、(1) と同じ初期値 $u_0(x)$, $\alpha = \frac{2B}{b}$, (1) と同じ $\beta, \gamma = \frac{2B}{b^3}$ とした場合、すなわち、

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t + \frac{2B}{b} \tilde{u}_x + \beta \tilde{u} \tilde{u}_x + \frac{2B}{b^3} \tilde{u}_{xxx} &= \mu \tilde{u}_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

を考える。このとき、第 1 次漸近形と第 2 次漸近形は、粘性 Fornberg–Whitham 方程式と KdV–Burgers 方程式で完全に一致する。第 3 次漸近形については、粘性 Fornberg–Whitham 方程式では Theorem 3 が成立する。一方、KdV–Burgers 方程式では次が成立する：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1+t)^{1-\frac{1}{2p}+\frac{l}{2}} \|\partial_x^l (\tilde{u}(\cdot, t) - \chi(\cdot, t) - V(\cdot, t) - \tilde{Q}(\cdot, t))\|_{L^p} = 0.$$

ここで、

$$\tilde{Q}(x, t) := \tilde{W}(x, t) + \Psi(x, t)$$

である。なお、 $\Psi(x, t)$ は (10) で定義された関数と同じものであるが、 $\tilde{W}(x, t)$ は以下で定義される:

$$\begin{aligned}\tilde{W}(x, t) &:= \tilde{\theta} V_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right) (1+t)^{-1}, \quad \alpha = \frac{2B}{b}, \\ \tilde{\theta} &:= \int_{\mathbb{R}} z_0(x) dx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \tilde{\rho}(x, t) dx dt, \\ \tilde{\rho}(x, t) &:= -\eta(x, t)^{-1} \left(\frac{\beta}{2} (\tilde{u} - \chi)^2 + \frac{2B}{b^3} \partial_x^2 (\tilde{u} - \chi) \right) (x, t).\end{aligned}$$

$W(x, t)$ と $\tilde{W}(x, t)$ においては、波の振幅を表す θ と $\tilde{\theta}$ に分散項の影響が表れていることが分かる。そして、 θ には 5 次の分散項の効果が現れているが、 $\tilde{\theta}$ には現れていないことに注意する。それゆえ、第 1 次漸近形と第 2 次漸近形が両者で一致するようにパラメータを選んだとしても、第 3 次漸近形が一致するとは限らない。このようにして、第 3 次漸近形において両者に差異が現れることが分かる。

Remark 6. 最後に、粘性 Fornberg–Whitham 方程式 (1) の解のより高次の漸近形について考える。(1) の解の第 3 次漸近形では 5 次の分散項の効果が現れた。それは、(1) の非局所分散項が以下の表現を持つことに由来する:

$$\int_{\mathbb{R}} B e^{-b|x-\xi|} u_\xi(\xi, t) d\xi = 2Bb(b^2 - \partial_x^2)^{-1} u_x = \frac{2B}{b} \partial_x u + \frac{2B}{b^3} \partial_x^3 u + \frac{2B}{b^3} (b^2 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^5 u.$$

Burgers 型方程式では、空間微分に伴い解の時間減衰が速くなる。また、高次漸近形を考えることは、時間減衰が速い世界で解の挙動を捉えることに相当する。第 1 次漸近形、第 2 次漸近形で 5 次の分散項の効果が現れず、第 3 次漸近形で初めてその効果が現れたのはこれらの理由によるものと思われる。(1) の非局所分散項について、より一般の展開を考えよう。以下の形式的な級数展開に注意する:

$$\frac{i2Bb\xi}{b^2 + \xi^2} = \frac{2B}{b} \left\{ i\xi - \frac{i\xi^3}{b^2} + \frac{i\xi^5}{b^4} - \frac{i\xi^7}{b^6} + \dots \right\}.$$

これより、(1) の非局所分散項は形式的に以下のように書き表せる:

$$\int_{\mathbb{R}} B e^{-b|x-\xi|} u_\xi(\xi, t) d\xi = 2Bb(b^2 - \partial_x^2)^{-1} u_x = \frac{2B}{b} \left\{ \partial_x u + \frac{1}{b^2} \partial_x^3 u + \frac{1}{b^4} \partial_x^5 u + \frac{1}{b^6} \partial_x^7 u + \dots \right\}.$$

すなわち、(1) の非局所分散項は任意の高次の奇数階微分を含む。このことから、漸近形が高次になるごとに、高次の微分項の影響が次々と現れてくることが予想できる。

5 Theorem 3 の証明の概略

本節では、主定理である Theorem 3 の証明の概略を述べよう。まずは、次の補助的な問題を考える:

$$\begin{aligned}z_t + \alpha z_x + (\beta \chi z)_x - \mu z_{xx} &= \partial_x \lambda(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ z(x, 0) &= z_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{12}$$

ここで、 $z_0(x)$ 、 $\lambda(x, t)$ は空間遠方で減衰する滑らかな関数とする。今、 $U[h](x, t, \tau)$ を次で定義する:

$$U[h](x, t, \tau) := \int_{\mathbb{R}} \partial_x (G_0(x-y, t-\tau) \eta(x, t)) (\eta(y, \tau))^{-1} \left(\int_{-\infty}^y h(\xi) d\xi \right) dy, \\ x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \tau < t.$$

このとき、Burgers 方程式に対する Hopf–Cole 変換の議論を応用することで、次の公式が得られる:

Lemma 7 ([4]-Lemma 2.6, [12]-Lemma 5.1). 上記の条件下で, (12) の解 $z(x, t)$ は次で与えられる:

$$z(x, t) = U[z_0](x, t, 0) + \int_0^t U[\partial_x \lambda(\tau)](x, t, \tau) d\tau, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

この Lemma 7 は以下の議論において中心的な役割を果たす.

以下, 初期値問題 (1) の解 $u(x, t)$ の第3次漸近形を考える. そのためには, $u(x, t) - \chi(x, t) - V(x, t)$ の漸近形を考えればよい. 以下, $\alpha = \frac{2B}{b}$ とする. まず, $v(x, t)$ を以下の方程式の解として定義する:

$$\begin{aligned} v_t + \alpha v_x + (\beta \chi v)_x - \mu v_{xx} + \frac{2B}{b^3} \chi_{xxx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (13)$$

$u(x, t) - \chi(x, t) - V(x, t) = (u(x, t) - \chi(x, t) - v(x, t)) + (v(x, t) - V(x, t))$ と分解し, 第1項目と第2項目の満たす方程式を個別に解析することで, それぞれの漸近形を求める.

まずは, $u(x, t) - \chi(x, t) - v(x, t)$ の漸近形を考える. $\psi(x, t) := u(x, t) - \chi(x, t)$ と置き, さらに $w(x, t) := u(x, t) - \chi(x, t) - v(x, t) = \psi(x, t) - v(x, t)$ と置く. このとき, 関数 $w(x, t)$ に関する次の初期値問題が得られる:

$$\begin{aligned} w_t + \alpha w_x + (\beta \chi w)_x - \mu w_{xx} \\ = -\alpha (b^2 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^3 \psi - \frac{\alpha}{b^2} (b^2 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^5 \chi - \left(\frac{\beta}{2} \psi^2 \right)_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ w(x, 0) = u_0(x) - \chi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで, Lemma 7 を用いることにより, (14) は以下の積分方程式に書き直せる:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= U[\psi_0](x, t, 0) - \frac{\beta}{2} \int_0^t U[\partial_x(\psi^2)(\tau)](x, t, \tau) d\tau \\ &\quad - \alpha \int_0^t U[(b^2 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^3 \psi(\tau)](x, t, \tau) d\tau - \frac{\alpha}{b^2} \int_0^t U[(b^2 - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^5 \chi(\tau)](x, t, \tau) d\tau \\ &= U[\psi_0](x, t, 0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x(G_0(x-y, t-\tau)\eta(x, t))\rho(y, \tau) dy d\tau \\ &=: U[\psi_0](x, t, 0) + D(x, t). \end{aligned}$$

したがって, $U[\psi_0](x, t, 0)$ と $D(x, t)$ の漸近形を求めればよい. $U[\psi_0](x, t, 0)$ については, Hopf-Cole 変換と熱方程式の解の漸近挙動の観点から, 漸近形について以下の通り予想できる:

$$U[\psi_0](x, t, 0) \sim \theta_0 \partial_x(G_0(\cdot, 1+t)\eta(\cdot, t)).$$

ただし, $\theta_0 := \int_{\mathbb{R}} z_0(x) dx$ であり, $z_0(x)$ は (9) で定義したものである. 実際に, 以下が成立する:

Lemma 8 ([5]-Lemma 6.1). $z_0 \in L^1_1(\mathbb{R})$ とする. このとき, 次の評価が成立する:

$$\|\partial_x^l(U[\psi_0](\cdot, t, 0) - \theta_0 \partial_x(G_0(\cdot, 1+t)\eta(\cdot, t)))\|_{L^p} \leq C \|z_0\|_{L^1_1} (1+t)^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2p} - \frac{l}{2}}, \quad t \geq 1.$$

ここで, $1 \leq p \leq \infty$, l は非負の整数である.

次に, $D(x, t)$ について考える. 平均値の定理と熱核の性質 (空間微分に伴い時間減衰が速くなる) を踏まえると, 漸近形について以下の通り予想が立てられる:

$$\begin{aligned}
D(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x (G_0(x-y, t-\tau)\eta(x, t)) \rho(y, \tau) dy d\tau \\
&\sim \int_0^t \partial_x (G_0(x, t-\tau)\eta(x, t)) \int_{\mathbb{R}} \rho(y, \tau) dy d\tau \sim \partial_x (G_0(x, 1+t)\eta(x, t)) \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \rho(y, \tau) dy d\tau \\
&\sim \partial_x (G_0(x, 1+t)\eta(x, t)) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \rho(y, \tau) dy d\tau =: \theta_1 \partial_x (G_0(x, 1+t)\eta(x, t)).
\end{aligned}$$

ただし, $\theta_1 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \rho(y, \tau) dy d\tau$ である. 実際に, 以下が成立する:

Lemma 9 ([5]-Lemma 6.2). $s \geq 3$ とする. $u_0 \in L_1^1(\mathbb{R}) \cap H^s(\mathbb{R})$ かつ $z_0 \in L_1^1(\mathbb{R})$ であるとし, $E_{s,0}$ は十分小さいとする. このとき, 次が成立する:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1+t)^{1-\frac{1}{2p}+\frac{l}{2}} \|\partial_x^l (D(\cdot, t) - \theta_1 \partial_x (G_0(\cdot, 1+t)\eta(\cdot, t)))\|_{L^p} = 0.$$

ここで, $2 \leq p \leq \infty$, l は $0 \leq l \leq s-3$ を満たす整数である.

最後に, $v(x, t) - V(x, t)$ の漸近形について考える. $V(x, t)$ の定義より,

$$V(x, t) = -\kappa d V_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right) (1+t)^{-1} \log(1+t) = -\kappa d \partial_x (G_0(x, 1+t)\eta(x, t)) \log(1+t)$$

と書き表せる. それゆえ, $V(x, t)$ は以下の方程式を満たすことが分かる:

$$\begin{aligned}
V_t + \alpha V_x + (\beta \chi V)_x - \mu V_{xx} + \kappa d (1+t)^{-2} V_* \left(\frac{x - \alpha(1+t)}{\sqrt{1+t}} \right) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\
V(x, 0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

さらに, $v(x, t)$ が (13) を満たし, $v(x, 0) = V(x, 0) = 0$ であることから, 補題 7 より以下が分かる:

$$\begin{aligned}
v(x, t) - V(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x (G_0(x-y, t-\tau)\eta(x, t)) (\eta(y, \tau))^{-1} \\
&\quad \times \left(\frac{2B}{b^3} \chi_{yy}(y, \tau) - \frac{\kappa d}{\sqrt{4\pi\mu}} (1+\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(y-\alpha(1+\tau))^2}{4\mu(1+\tau)}} \eta(y, \tau) \right) dy d\tau \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x (G_0(x-y, t-\tau)\eta(x, t)) F_* \left(\frac{y - \alpha(1+\tau)}{\sqrt{1+\tau}} \right) (1+\tau)^{-\frac{3}{2}} dy d\tau \\
&= \partial_x \left(\eta(x, t) \int_0^t (1+\tau)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} G_0(x-y, t-\tau) F_* \left(\frac{y - \alpha(1+\tau)}{\sqrt{1+\tau}} \right) dy d\tau \right) \\
&=: \partial_x (\eta(x, t) I(x, t)).
\end{aligned}$$

$\partial_x (\eta(x, t) I(x, t))$ は既知の関数で構成されているため, 後は具体的に計算を進めればよい. 実際, $\int_{\mathbb{R}} F_*(y) dy = 0$ に注意して, 平均値の定理と変数変換を利用し評価することで, 以下を得る:

Lemma 10 ([5]-Proposition 6.4). $|M| \leq 1$ とする. このとき, 次が成立する:

$$\|\partial_x^l (v(\cdot, t) - V(\cdot, t) - \Psi(\cdot, t))\|_{L^p} \leq C |M| (1+t)^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2p}-\frac{l}{2}}, \quad t \geq 1.$$

ここで, $1 \leq p \leq \infty$, l は非負の整数である.

上記で得られた Lemma 8, Lemma 9, Lemma 10 を組み合わせることで, Theorem 3 が示される.

参考文献

- [1] A. Constantin and J. Escher: *Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations*, Acta Math. **181** (1998) 229-243.
- [2] B. Fornberg and G.B. Whitham: *A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **289** (1978) 373-404.
- [3] I. Fukuda: *Asymptotic behavior of solutions to the generalized KdV-Burgers equation*, Osaka J. Math. **56** (2019) 883-906.
- [4] I. Fukuda: *Large time behavior of solutions to a nonlinear hyperbolic relaxation system with slowly decaying data*, Math. Meth. Appl. Sci. **43** (2020) 5532-5563.
- [5] I. Fukuda and K. Itasaka: *Higher-order asymptotic profiles of the solutions to the viscous Fornberg–Whitham equation*, Nonlinear Anal. (2020) 112200 (in press).
- [6] N. Hayashi and P.I. Naumkin: *Asymptotics for the Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Acta Math. Sin. Engl. Ser. **22** (2006) 1441-1456.
- [7] G. Hörmann and H. Okamoto: *Weak periodic solutions and numerical case studies of the Fornberg–Whitham equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **39** (2019) 4455-4469.
- [8] K. Itasaka: *Wave-breaking phenomena and global existence for the generalized Fornberg–Whitham equation*, preprint, arXiv.1802.00641.
- [9] E.I. Kaikina and H.F. Ruiz-Paredes: *Second term of asymptotics for KdVB equation with large initial data*, Osaka J. Math. **42** (2005) 407-420.
- [10] G. Karch: *Self-similar large time behavior of solutions to Korteweg-de Vries-Burgers equation*, Nonlinear Anal. **35** (1999) 199-219.
- [11] M. Kato: *Large time behavior of solutions to the generalized Burgers equations*, Osaka J. Math. **44** (2007) 923-943.
- [12] M. Kato and Y. Ueda: *Asymptotic profile of solutions for the damped wave equation with a nonlinear convection term*, Math. Meth. Appl. Sci. **40** (2017) 7760-7779.
- [13] T.-P. Liu: *Hyperbolic and viscous conservation laws*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **72**, SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [14] F. Ma, Y. Liu and C. Qu: *Wave-breaking phenomena for the nonlocal Whitham-type equations*, J. Differential Equations **261** (2016) 6029-6054.
- [15] 松村昭孝, 西原健二: 非線形微分方程式の大域解-圧縮性粘性流の数学解析-, 日本評論社, 2004.
- [16] R.L. Seliger: *A note on the breaking of waves*, Proc. Roy. Soc. **303** (1968) 493-496.
- [17] 田中光宏: 水面波に関連するあるモデル方程式における砕波現象について, 数理解析研究所講究録 **1847** (2013) 64-72.
- [18] G.B. Whitham: *Variational methods and applications to water waves*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **299** (1967) 6-25.