Another proof of the almost purity theorem for perfectoid valuation rings

日本大学大学院　総合基礎科学研究科　地球情報数理科学専攻
伊城　慎之介 (Shinnosuke Ishiro)

1　導入

本稿は日本大学の下元数馬氏との共同研究に基づく。

概純定理 (Almost purity theorem) は p 進ホッジ理論の基本的な問題を解くために G.Faltings[3] により証明され、P.Scholze[8] によって拡張された。この定理は P.Scholze のパーフェクトイド空間の定式化 [8] や Y.Andre による直和因子予想への応用 [1], [2] など数々の応用を持っており，数論や可換環論において重要な定理の一つである．Scholze はパーフェクトイド空間上の概純定理を証明したが，これは体の場合に帰着させて証明している．そのため特に体の場合が重要である．また体の場合は次の証明が知られている．

- 分岐理論による証明 [8, using ramification theory(P.29)].
- 代数閉体へ帰着させる方法 [8, reducing to the case where $K^\flat$ is algebraically closed(P.29)].

私は下元氏との共同研究で，体の場合に，上述した 2 つの証明より，可換環論的な証明を与えることに成功した．これは Faltings の**正規化された長さ**を用いた証明である．

2　概環論

概純定理は Faltings によって導入された概環論の枠組みで定式化される．この節では概環論の基本を述べる．概環論の基本的な文献として [4] を上げておく．

V を環とする．また $\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ かつ $\mathfrak{m} \otimes_V \mathfrak{m}$ が平坦であるような V のイデアルとする．このとき組 $(V, \mathfrak{m})$ を**基本設定**と呼ぶ.

例 2.1.
1. V を可換環とする．このとき組 (V, V) は基本設定である．この場合，概環論は通常の可換環論として展開される．
2. V を階数 1 の非離散付値環とする．このとき，V とその極大イデアル $\mathfrak{m}_V$ の組 $(V, \mathfrak{m}_V)$ は基本設定である．

以下断りがない限り $(V, \mathfrak{m})$ を基本設定とする.

定義 2.2. V 加群 M が**概零**であるとは，$\mathfrak{m}M = 0$ が成り立つことである.

定義 2.3. R, S を V 代数，M を R 加群とする．

1. M が**概有限生成 (resp. 概有限表示)R 加群**であるとは，任意の $\epsilon \in \mathfrak{m}$ に対してある有限生成 (resp. 有限表示)R 加群と R 準同型写像 $f_\epsilon : M_\epsilon \to M$ が存在して $\epsilon \operatorname{Ker} f_\epsilon = \epsilon \operatorname{Coker} f_\epsilon = 0$ が成り立つ．
2. 環の準同型写像 $R \to S$ が**概有限エタール射**であるとは次の 3 条件を満たすことある：
   (a) S が概有限表示 R 加群である．
   (b) 任意の R 加群 N と任意の正の整数 $i > 0$ に対して $\mathrm{Tor}_i^R(S, N)$ が概零である．
   (c) 任意の $S \otimes_R S$ 加群 N と任意の正の整数 $i > 0$ に対して $\mathrm{Ext}^i_{S\otimes_R S}(S, N)$ が概零である．

V–**Mod** を V 加群の圏，Σ を概零な対象からなる V–**Mod** のセール部分圏とする．このとき V^a–**Mod** $:= V$–**Mod**$/\Sigma$ と定義し，これを**概加群の圏**という．また対象を**概加群**と呼び，M^a と表す．

3 正規化された長さ

正規化された長さは Faltings[3] により定式化され，O.Gabber と L.Ramero[6] により一般化された，振れ加群に対する関数である．本稿では階数 1 の付値環上の振れ加群に対して定義する．一般の付値環やその他の場合は [6] を参照のこと．この節では $(V, \mathfrak{m}_V)$ を階数 1 の付値環とその極大イデアルとする．次に $\mathbf{Mod}_{\{\mathfrak{m}_V\}}$ を台を $\{\mathfrak{m}_V\}$ に持つ V 加群の圏とする．まず $M \in \mathbf{Mod}_{\{\mathfrak{m}_V\}}$ を有限生成加群に対して，0 次 Fitting イデアル $\mathrm{Fitt}_0(M)$ を考える．このとき $\mathrm{Fitt}_0(M)$ が V の単項イデアルであることに注意すると，生成元を V の付値で写すことにより $\mathrm{Fitt}_0(M)$ に対して実数値が定まる．この値は関手 $(-)^a$ をとっても変わらないのでこれを $|\,\mathrm{Fitt}_0(M)^a|$ で表す．したがって関数

$$\lambda_\infty(M) := |\,\mathrm{Fitt}_0(M)^a| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

は well-defined である．次に任意の $M \in \mathbf{Mod}_{\{\mathfrak{m}_V\}}$ に対して

$$\lambda_\infty(M) := \sup\{\lambda_\infty(M_0) \mid M_0 \subseteq M \text{ は有限生成 } V \text{ 加群 }\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

と定義する．この関数を M の**正規化された長さ**と呼ぶ．正規化された長さは次の性質を持つ．

命題 3.1. 以下が成り立つ．

1. $0 \to L \to M \to N \to 0$ を $\{\mathfrak{m}_V\}$ を台に持つ加群の短完全列とする．また $a, b \in \mathfrak{m}_V$ を任意の元とする．このとき次が成り立つ．
   (a) $\lambda_\infty(M) = \lambda_\infty(L) + \lambda_\infty(N)$.
   (b) $\lambda_\infty(abM) \leq \lambda_\infty(aL) + \lambda_\infty(bN)$.
2. $M \in \mathbf{Mod}_{\mathfrak{m}_V}$ に対して，$\lambda_\infty(M) = 0$ であることと M が概零であることは同値である．
3. M が概有限生成 V 加群 $M \in \mathbf{Mod}_{\{\mathfrak{m}_V\}}$ とする．このとき任意の元 $b \in \mathfrak{m}_V$ に対して $\lambda_\infty(bM) < \infty$ である．

証明では次の公式が重要な役割を果たす．

定理 3.2. (Frobenius pull-back formula) V を階数 1 の付値環，$p \in V$ を素数，M を V/pV 加群とする．また $M^{[F]}$ を加法として M の加法，スカラーとして p 乗した元をスカラー倍するように定義する．このとき，

$$\lambda_\infty(M) = \frac{1}{p} \cdot \lambda_\infty(M)$$

が成り立つ．

注意 3.3. 正規化された長さは付値環上の有限表示捩れ加群の構造定理 [4, Lemma 6.1.14.] を用いて定式化することも可能である．この方法で定式化すると具体的に実数値を計算することが可能になるが，上述した性質を証明することが困難になる．これらは [9] に詳しく述べられている．

4 主結果

定義 4.1. V を付値環，ただし $p \in V$ を $pV \neq V$ を満たす素数とする．このとき V が次の 3 条件を満たすとき，V を**パーフェクトイド付値環**と呼ぶ．

1. V の付値は階数 1 の非離散的付値である．
2. V は付値に関する位相で完備である．
3. V のフロベニウス射 $F_V : V/pV \to V/pV$ が全射である．

注意 4.2. K がパーフェクトイド体 [8, Definition 3.1.] であるとは，次の条件を満たすものである．

1. 非離散的な階数 1 の付値 $|\cdot|$ に関して完備な非アルキメデス的体である．
2. K の剰余標数が $p > 0$ である．
3. K° を K の $|\cdot|$ に関する付値環としたとき，K° のフロベニウス射 $F : K^\circ/p \to K^\circ/p; x \mapsto x^p$ が全射である．

つまりパーフェクトイド付値環は K° を意味している．

次の定理は本稿の主結果である．

定理 4.3. V をパーフェクトイド付値環，K をその商体，L/K を有限分離拡大とする．W を V の L 内での整閉包とすると，以下が成り立つ．

1. W はパーフェクトイド付値環である．
2. $V \to W$ は概有限エタール射である．

注意 4.2 より，この定理はパーフェクトイド体の概純定理を意味している．講演では (1) のフロベニウス射の全射性について詳しく解説する．その他の部分は [7] に譲る．

参考文献

[1] Y. André, *Le lemme d'Abhyankar perfectoide*, Publ. Math. I.H.E.S. **127** (2018), 1–70.

[2] Y. André, *La conjecture du facteur direct*, Publ. Math. I.H.E.S. **127** (2018), 71–93.

[3] G. Faltings, *Almost étale extensions*, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II. Astérisque **279** (2002), 185–270.

[4] O. Gabber and L. Ramero, *Almost ring theory*, Lecture Notes in Mathematics **1800**, Springer.

[5] O. Gabber and L. Ramero, *Foundations of p-adic Hodge theory–Second Release*, arXiv:math/0409584v3.

[6] O. Gabber and L. Ramero, *Foundations for almost ring theory*, arXiv:math/0409584.

[7] S. Ishiro and K. Shimomoto, *Another proof of the almost purity theorem for perfectoid valuation rings*, In preparation.

[8] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. de l'IHÉS **116** (2012), 245–313.

[9] P. Scholze, *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, Forum of Mathematics, Pi, 1, e1, 2013.