Ibukiyama's Shimura type conjecture

京都大学大学院 理学研究科 数学教室
石本宙 (Hiroshi ISHIMOTO)

概要

志村による重さ半整数の保型形式から重さ整数の保型形式への対応の構成及び，Kohnen による plus space の導入と志村対応の定式化はよく知られている．伊吹山はこれに似た形の対応を次数 2 のベクトル値ジーゲル保型形式において予想した．この対応を，最近発表された Arthur や Gan と市野による保型表現の重複度公式を用いて，表現論からのアプローチによって証明することができる．

1 導入

保型形式は数論的な情報を多く含むため，整数論において重要な研究対象となっている．例えば，テータ級数は二次形式の解の個数を教えてくれる．本稿では，それらの中でも扱いやすいカスプ形式を考える．

まず導入として 1 変数で重さ整数のいわゆる '普通の' 保型形式の復習をしよう．虚部が正である複素数全体の集合を $\mathfrak{H}$ と書く．複素数平面の上半分にあたるので，これを上半平面と呼ぶ．実数係数の 2 次正方行列のうち行列式が正であるもの全体のなす群を $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ とおくと，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ は $z \mapsto gz = (az+b)/(cz+d)$ によって $\mathfrak{H}$ に作用する．また，保型因子を $j(g,z) = (cz+d)$ とおく．すると上半平面上の複素数値関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ に対して $g \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ による重さ k の右からの作用が

$$[f|_k g](z) = (\det g)^{\frac{k}{2}} j(g,z)^{-k} f(gz)$$

によって定義される．ここで $(\det g)^{\frac{k}{2}}$ はスカラー行列が自明に作用するようにするためのものである．このとき関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ は，次の 3 つを満たすとき重さ k でレベル $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のカスプ形式であるという：

- f は $\mathfrak{H}$ 上正則；
- （保型性）任意の $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して $f|_k\gamma = f$；
- （カスプ条件）f は以下のフーリエ展開をもつ：

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} a(n) e^{2\pi i n z}.$$

このような f の集合を $S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ と書く．これは $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間となる．さらにこの空間にはヘッケ作用素が以下のように定義されるのであった．素数 p に対して次のような両側剰

余類及びそれを左から割った代表系 $\{g_t\}$ を考える：

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\begin{pmatrix}1&\\&p\end{pmatrix}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})=\bigsqcup_t \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})g_t.$$

すると p におけるヘッケ作用素 $T(p)$ は

$$f|_kT(p)=p^{\frac{k}{2}-1}\sum_t f|_k g_t$$

で定義される．f の保型性（定義の２つ目の条件）より，これは代表系 $\{g_t\}$ の取り方によらない．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ による剰余を考えるのはこれが f のレベルだからである．$S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ には，ヘッケ作用素がエルミート作用素になるような内積を定義できることが知られている．また，各素数におけるヘッケ作用素はすべて可換であることもわかるので，$S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ は全てのヘッケ作用素の固有ベクトルからなる基底がある．全てのヘッケ作用素の固有ベクトルとなるような $S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ の零でない元をヘッケ固有形式と呼ぼう．ヘッケ固有形式 f に対して $T(p)$ の固有値を λ_p とおくと，その L 関数は

$$L(s,f)=\prod_p(1-\lambda_p p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1}$$

というオイラー積で定義される．以上が ‘普通の’ 保型形式の理論であった．

1973 年の志村による論文 [6] は重さ半整数のカスプ形式を調べ重さ整数の保型形式との対応を記した．Kohnen [5] はそれを受けて plus space を定義し，L 関数を保つ線形同型

$$S^+_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))\cong S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \tag{1}$$

を示した．ここで左辺のレベル $\Gamma_0(4)$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のうち $(2,1)$ 成分が 4 の倍数であるようなもの全体のなす部分群で，$+$ は plus space を表す．重さ半整数の保型形式はレベルを $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ にはできないが，plus space とはそれに相当するものを考えるために導入されたものである．重さ半整数や plus space の定義はここでは省略するが，後に述べる次数２での定義はその類似となっている．

2　主定理

この節では，ベクトル値の次数２のジーゲル保型形式の定義と，本稿の主定理である伊吹山予想の主張を述べる．まず，次数２のジーゲル上半平面 $\mathfrak{H}_2$ は以下で定義される：

$$\mathfrak{H}_2=\left\{\,Z=X+iY\in\mathrm{M}_2(\mathbb{C})\;\middle|\;X={}^{\mathrm{t}}X,Y={}^{\mathrm{t}}Y\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ Y>0\,\right\}.$$

ここで，$Y>0$ は実対称行列 Y が正定値であることを表す．４次の反対称行列 $J_2=\begin{pmatrix}&1_2\\-1_2&\end{pmatrix}$ によって，2 次のシンプレクティック similitude 群を $\mathrm{GSp}_4=\{\,g\in\mathrm{GL}_4\mid {}^{\mathrm{t}}gJ_2g=\nu(g)J_2,\ \exists\nu(g)\in\mathrm{GL}_1\,\}$ と定める．このときシンプレクティック群 Sp_4 は similitude ノルム ν が 1 である元全体のなす部分群として与えられる．$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ のうち $\nu>0$ なるもののなす部分群を $\mathrm{GSp}_4^+(\mathbb{R})$ とすると，これは前節での $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ に対応しており，ジーゲル上半平面 $\mathfrak{H}_2$ に $gZ=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ で作用する．また，保型因子を $J(g,Z)=CZ+D$ とおく．次に，非負整数 j に対して $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の次数 j

の対称テンソル表現を (Sym_j, V_j) とする．つまり V_j は $j+1$ 次元の $\mathbb{C}$ ベクトル空間であり，これを２変数 j 次斉次多項式全体と見做せば作用は $[\mathrm{Sym}_j(g)P](x,y) = P((x,y)g)$ と表示される．このとき V_j に値をとる $\mathfrak{H}_2$ 上の関数 $F(Z)$ に対して $g \in \mathrm{GSp}_4^+(\mathbb{R})$ による重さ (k,j) の作用を

$$[F|_{k,j}g](Z) = \nu(g)^{k+\frac{j}{2}} \det(J(g,Z))^{-k} \mathrm{Sym}_j(J(g,Z))^{-1} F(gZ)$$

によって定義する．つまり重さ (k,j) は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の表現 $\det^k \otimes \mathrm{Sym}_j$ を意味している．関数 $F : \mathfrak{H}_2 \to V_j$ は次の３つを満たすとき重さ (k,j) でレベル $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ のジーゲルカスプ形式であるという：

- F は $\mathfrak{H}_2$ 上正則;
- 任意の $\gamma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ に対して $F|_{k,j}\gamma = F$;
- F は以下のフーリエ展開をもつ:

$$F(Z) = \sum_{T \in L_2^*,\ T>0} A(T) e^{2\pi i\, \mathrm{tr}(TZ)}.$$

  ここで，L_2^* は次数２の対称行列であって対角成分が半整数または整数で他の成分が整数のもの全体の集合とする．

このような F の集合を $S_{k,j}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ と書く．

次にヘッケ作用素と L 関数の定義を記しておく．一般にジーゲル保型形式の L 関数にはいくつか種類があるのだが，今回は spinor L 関数と呼ばれるものを扱う．素数べき p^m に対して $X(p^m)$ を $\nu(g) = p^m$ を満たす $g \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ であって成分がすべて整数であるものの集合とする．これを

$$X(p^m) = \bigsqcup_t \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) g_t$$

と分解するとヘッケ作用素は

$$F|_{k,j}T(p^m) = p^{m(k+\frac{j}{2}-3)} \sum_t F|_{k,j} g_t$$

と定義される．一変数のときと同様に $S_{k,j}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ にはヘッケ固有形式からなる基底が存在し，ヘッケ固有形式 $F \in S_{k,j}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ に対して $T(p^m)$ の固有値を $\lambda(p^m)$ とおくと，その spinor L 関数は

$$L(s,F,\mathrm{spin}) = \prod_p \left(1 - \lambda(p)p^{-s} + (\lambda(p)^2 - \lambda(p^2) - p^{\mu-1})p^{-2s} - \lambda(p)p^{\mu-3s} + p^{2\mu-4s}\right)^{-1}$$

というオイラー積で定義される．ただし，$\mu = 2k+j-3$ とおいた．

次に重さ半整数のベクトル値ジーゲル保型形式を定義する．重さ $(k-\frac{1}{2}, j)$ つまり $\det^{k-\frac{1}{2}} \otimes \mathrm{Sym}_j$ のものを考えたいので，$\det J(g,Z)$ の平方根が必要である．しかし複素数の平方根を適当にとるわけにはいかないので，以下の手順を踏む．まず $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(4)$ と $\mathfrak{H}_2$ 上のテータ級数 $\theta(Z)$ を

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) \;\middle|\; C \equiv 0 \mod 4 \right\},$$
$$\theta(Z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i\, {}^t x Z x}, \quad Z \in \mathfrak{H}_2,$$

で定める．すると任意の $\gamma \in \Gamma_0(4)$ に対して

$$\left(\frac{\theta(\gamma Z)}{\theta(Z)}\right)^4 = \det J(\gamma, Z)^2 \tag{2}$$

であることが知られている．なので，４重被覆群 $\widetilde{\mathrm{GSp}_4^+}(\mathbb{R})$ を $\mathrm{GSp}_4^+(\mathbb{R})$ の元 g と $\mathfrak{H}_2$ 上の $\mathbb{C}$ 値正則関数 $\phi(Z)$ であって $\phi(Z)^4 = \det J(g,Z)^2/\det g$ を満たすものの組 $(g, \phi(Z))$ からなる集合に積

$$(g_1, \phi_1(Z))(g_2, \phi_2(Z)) = (g_1 g_2, \phi_1(g_2 Z)\phi_2(Z))$$

を入れた群とすれば，$\Gamma_0(4)$ は $\gamma \mapsto (\gamma, \theta(\gamma Z)/\theta(Z))$ によって $\widetilde{\mathrm{GSp}_4^+}(\mathbb{R})$ の部分群となり，関数 $F : \mathfrak{H}_2 \to V_j$ に対して $(g, \phi(Z)) \in \widetilde{\mathrm{GSp}_4^+}(\mathbb{R})$ の重さ $(k - \frac{1}{2}, j)$ の作用が

$$\left[F|_{k-\frac{1}{2},j}(g, \phi(Z))\right](Z) = \nu(g)^{\frac{j}{2}} \phi(Z)^{-2k+1} \operatorname{Sym}_j(J(g,Z))^{-1} F(gZ)$$

によって定義される．

$\Gamma_0(4)$ の二次指標 $\Gamma_0(4) \ni \gamma \mapsto \left(\frac{-1}{\gamma}\right)$ を，$\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ に対して $\det D \equiv \pm 1 \mod 4$ のとき ± 1 （複号同順）をとるものとする．このとき関数 $F : \mathfrak{H}_2 \to V_j$ は次の３つを満たすとき重さ $(k - \frac{1}{2}, j)$ でレベル $\Gamma_0(4)$ で指標 $\left(\frac{-1}{\cdot}\right)$ つきのジーゲルカスプ形式であるという：

- F は $\mathfrak{H}_2$ 上正則;
- 任意の $\gamma \in \Gamma_0(4)$ に対して $F|_{k-\frac{1}{2},j}\gamma = \left(\frac{-1}{\gamma}\right) F$;
- F は以下のフーリエ展開をもつ:

$$F(Z) = \sum_{T \in L_2^*,\ T > 0} A(T) e^{2\pi i \operatorname{tr}(TZ)}.$$

このような F の集合を $S_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$ と書く．さらに $F \in S_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$ であって，ある $r \in \mathbb{Z}^2$ に対して $T \equiv (-1)^k r\, {}^{\mathrm{t}}r \mod 4$ が成り立つ T についてのみ $A(T) \neq 0$ なるようなものから成る部分空間を $S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$ とし，これを plus space と呼ぶ．レベルを $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ にできないのは，式 (2) が $\gamma \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ では成り立たないためである．

次にヘッケ作用素と L 関数の定義を述べる．素数 p と $s = 0, 1$ に対して

$$K_s(p^2) = \begin{pmatrix} 1_{2-s} & & & \\ & p1_s & & \\ & & p^2 1_{2-s} & \\ & & & p1_s \end{pmatrix}$$

とおく．$\Gamma_0(4)$ は $\widetilde{\mathrm{GSp}_4^+}(\mathbb{R})$ の部分群と見做していたことに注意して，レベルによる剰余類分解

$$\Gamma_0(4)(K_s(p^2), p^{1-\frac{s}{2}})\Gamma_0(4) = \bigsqcup_t \Gamma_0(4)\widetilde{g}_{s,t}$$

をとると，p が奇素数のときのヘッケ作用素は

$$F|_{k-\frac{1}{2},j} T_s(p) = \sum_t \left(\frac{-1}{g_{s,t}}\right) F|_{k-\frac{1}{2},j} \widetilde{g}_{s,t}$$

と定義される．ここで $g_{s,t}$ は $\widetilde{g}_{s,t}$ の $\widetilde{\mathrm{GSp}_4^+}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GSp}_4^+(\mathbb{R})$ による像．$p=2$ の場合には次節で述べるようにヤコビ形式を使ってヘッケ作用素 $T_s(2)$ を定義する．扱いが変わってしまうのは，レベルである $\Gamma_0(4)$ の 4 が 2 と互いに素でないことに起因する．やはりこの場合も，$S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4),\left(\frac{-1}{\cdot}\right))$ にはヘッケ固有形式からなる基底が存在し，ヘッケ固有形式 $F \in S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4),\left(\frac{-1}{\cdot}\right))$ に対して $T_1(p)$ と $T_0(p)$ の固有値をそれぞれ $\eta(p)$，$\omega(p)$ とし，$\eta^*(p) = \left(\frac{-1}{p}\right) p^{k+j-\frac{7}{2}}\eta(p)$, $\omega^*(p) = p^{2k+2j-7}\omega(p)$ とおくと，F の L 関数は

$$L(s,F) = \prod_p \left(1 - \eta^*(p)p^{-s} + (p\omega^*(p) + p^{\nu-2}(1+p^2))p^{-2s} - \eta^*(p)p^{\nu-3s} + p^{2\nu-4s}\right)^{-1}$$

で定義される．ただし，$\nu = 2k+2j-3$ とおいた．

主定理である伊吹山 [3] による志村型の予想の主張は次の通りである．

定理 1 (主定理)**.** 任意の整数 $k \geq 3$ 及び偶数 $j \geq 0$ に対して，線形同型

$$\rho : S^+_{k-\frac{1}{2},j}\left(\Gamma_0(4),\left(\frac{-1}{\cdot}\right)\right) \longrightarrow S_{j+3,2k-6}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$$

であって，ヘッケ固有形式 $F \in S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4),\left(\frac{-1}{\cdot}\right))$ の像 $\rho(F) \in S_{j+3,2k-6}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ もまたヘッケ固有形式であり

$$L(s,F) = L(s,\rho(F),\mathrm{spin})$$

を満たすようなものが存在する．

これは 2000 年代に伊吹山 [3] によって提出されたものである．すでに知られていた Kohnen [5] に示された L 関数を保つ同型 (1) はしばしば志村対応と呼ばれるが，この予想は志村対応に似ているため伊吹山は志村型予想と呼んでいた．

3　ヤコビ形式

本節ではヤコビ形式とそれを用いた $p=2$ における plus space のヘッケ作用素の定義を述べる．まずヤコビ群を思い出しておく．1 をもつ可換環 R に対して $\mathcal{H}_2(R)$ を R 上の次数 2 の Heisenberg 群とする．すなわち，

$$\mathcal{H}_2(R) = \left\{\, ([\lambda,\mu],\kappa) \;\middle|\; \lambda,\mu \in R^2,\ \kappa \in R \,\right\}$$

であって群の演算が

$$([\lambda_1,\mu_1],\kappa_1)\cdot([\lambda_2,\mu_2],\kappa_2) = ([\lambda_1+\lambda_2,\mu_1+\mu_2],\kappa_1+\kappa_2+{}^{\mathrm{t}}\lambda_1\mu_2-{}^{\mathrm{t}}\mu_1\lambda_2)$$

で与えられる．そして，ふたつの群の埋め込み

$$\mathrm{Sp}_4(R) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_6(R), \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & A & & B \\ & & 1 & \\ & C & & D \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{H}_2(R) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_6(R), \qquad ([\lambda,\mu],\kappa) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & {}^{\mathrm{t}}\lambda & \kappa & {}^{\mathrm{t}}\mu \\ & 1_2 & \mu & \\ & & 1 & \\ & & -\lambda & 1_2 \end{pmatrix}$$

によって R 上の次数 2 のヤコビ群は $\mathrm{Sp}_6(R)$ の部分群 $\mathrm{Sp}_4^J(R) = \mathrm{Sp}_4(R) \ltimes \mathcal{H}_2(R)$ で定義される．このとき V_j に値をとる $(Z,w) \in \mathfrak{H}_2 \times \mathbb{C}^2$ 上の関数 $F(Z,w)$ に対して $\mathrm{Sp}_4^J(\mathbb{R})$ による重さ (k,j) の作用を

$$\left[F|_{k,j}^J([\lambda,\mu],\kappa)\right](Z,w) = e^{2\pi i({}^{\mathrm{t}}\lambda Z\lambda + 2\,{}^{\mathrm{t}}\lambda w + {}^{\mathrm{t}}\lambda\mu + \kappa)} F(Z, w + Z\lambda + \mu),$$

$$\left[F|_{k,j}^J g\right](Z,w) = e^{2\pi i(-\,{}^{\mathrm{t}}wJ(g,Z)^{-1}Cw)} \det(J(g,Z))^{-k} \operatorname{Sym}_j(J(g,Z))^{-1} F(gZ, {}^{\mathrm{t}}J(g,Z)^{-1}w)$$

によって定義する．ここで，g 及び C は $g = \begin{pmatrix} * & * \\ C & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$．関数 $F : \mathfrak{H}_2 \times \mathbb{C}^2 \to V_j$ は次の 3 つを満たすとき重さ (k,j) でレベル $\mathrm{Sp}_4^J(\mathbb{Z})$ のヤコビカスプ形式であるという：

- F は $\mathfrak{H}_2 \times \mathbb{C}^2$ 上正則;
- 任意の $\gamma \in \mathrm{Sp}_4^J(\mathbb{Z})$ に対して $F|_{k,j}^J \gamma = F$;
- F は以下のフーリエ展開をもつ:

$$F(Z,w) = \sum_{\substack{(N,r) \in L_2^* \times \mathbb{Z}^2 \\ 4N - r\,{}^{\mathrm{t}}r > 0}} A(N,r) e^{2\pi i(\mathrm{tr}(NZ) + {}^{\mathrm{t}}rw)}.$$

このような F の集合を $J_{k,j}^{\mathrm{cusp}}$ と書く．

次にヘッケ作用素を定義したい．関数 $F : \mathfrak{H}_2 \times \mathbb{C}^2 \to V_j$ に対して $g \in \mathrm{GSp}_4^+(\mathbb{R})$ による作用を

$$\left[F|_{k,j}^J g\right](Z,w) = \nu(g)^{k+\frac{j}{2}} e^{2\pi i(-\,{}^{\mathrm{t}}wJ(g,Z)^{-1}Cw)} \det(J(g,Z))^{-k} \operatorname{Sym}_j(J(g,Z))^{-1} F(gZ, \nu(g)^{\frac{1}{2}}\,{}^{\mathrm{t}}J(g,Z)^{-1}w)$$

と定める．これは $g \in \mathrm{Sp}_4(\mathbb{R})$ のとき上で定義した作用に一致している．素数 p と $s = 0,\,1$ に対してレベルによる剰余類分解

$$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) K_s(p^2) \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_t \mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}) g_{s,t}$$

をとると，ヘッケ作用素 $T_s^J(p)$ は

$$F|_{k,j}^J T_s^J(p) = \sum_{\lambda,\mu \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2} \sum_t F|_{k,j}^J g_{s,t}|_{k,j}^J([\lambda,\mu],0)$$

と定義される．このとき plus space $S_{k-\frac{1}{2},j}^+(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$ とヤコビカスプ形式の空間 $J_{k,j}^{\mathrm{cusp}}$ の間には次のような関係が知られている．

定理 2. 任意の整数 $j \geq 0$ 及び奇数 $k \geq 3$ に対して，線形同型

$$\sigma : J_{k,j}^{\mathrm{cusp}} \xrightarrow{\simeq} S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$$

であって，任意の奇素数 $p \neq 2$ において

$$F|_{k,j}^J T_s^J(p) = p^{3+\frac{s}{2}} \left(\frac{-1}{p}\right)^{(k+\delta)s} \sigma(F)|_{k-\frac{1}{2},j} T_s(p) \tag{3}$$

なるものが存在する．ここで $\left(\frac{-1}{p}\right)$ は *Legendre* 記号．

この同型 σ は具体的に構成できる．また簡単のためここでは省略するが，上で定義した正則なヤコビ形式とは対照的に，skew-holomorphic なヤコビ形式というものも定義される．k が偶数のときは plus space と skew-holomorphic なヤコビカスプ形式の空間との間に同様の同型が構成される．詳細は [3, Theorem 5.1].

$p = 2$ における $S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$ のヘッケ作用素 $T_s(2)$ は，関係式 (3) が $p = 2$ でも成立するように定義する．

4 重複度公式

この章では主定理の証明で重要な道具となる重複度公式の概説をしたい．$\mathbb{Q}$ 上の連結半単純代数群 G に対して $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ を考える．この L^2 空間は $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の右移動による左作用 $[g \cdot \varphi](x) = \varphi(xg)$ で $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の表現空間である．この部分商表現を保型表現と呼ぶが，Arthur [1] や Gan-市野 [2] らによる重複度公式は部分表現に現れる既約な保型表現に注目している．そこで $L^2(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ の部分空間であって既約部分表現の直和に分解できるもののうち最大のものを離散スペクトルと呼び $L^2_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ と書く．$G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ は $G(\mathbb{Q}_v)$ の制限直積であるから，全く非自明ではあるが，$G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の既約な保型表現 π は $G(\mathbb{Q}_v)$ の表現 π_v によって $\pi = \otimes_v \pi_v$ と適切な意味でテンソル積に分解できる．

Arthur [1] は G がシンプレクティック群や準分裂直交群のケースで $L^2_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ の既約部分表現の，A パラメータによる分類を与えた．ここでは証明に使う $G = \mathrm{SO}_5$ に限って紹介する．

定義 3. SO_5 の A パラメータとは，形式的有限直和

$$\phi = \bigoplus_i \phi_i \boxtimes S_{d_i}$$

のこと．ここで ϕ_i は $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の既約カスプ表現，S_{d_i} は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の d_i 次元既約表現であり次を満たすもの：

- d_i が奇数（偶数）ならば ϕ_i はシンプレクティック（直交）表現；
- $i \neq j$ ならば $(\phi_i, d_i) \neq (\phi_j, d_j)$；
- $\sum_i n_i d_i = 4$.

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の既約カスプ表現とは，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の既約保型表現であってカスプ条件を満たすものである．定義は省くが，ここでいうカスプ条件とは保型形式のカスプ条件に由来するものである．

各 A パラメータ ϕ に対して付随する有限群 S_ϕ，局所化 ϕ_v とそれに付随する有限群 S_{ϕ_v} が定義される．S_{ϕ_v} は有限群なので離散位相を入れ，$S_{\phi,\mathbb{A}} = \prod_v S_{\phi_v}$ とおく．S_ϕ から S_{ϕ_v} へは自然な準同型が知られているので積をとって連続準同型 $\Delta : S_\phi \to S_{\phi,\mathbb{A}}$ が定義される．また，$\hat{S}_{\phi,\mathbb{A}}$ を $S_{\phi,\mathbb{A}} = \prod_v S_{\phi_v}$ の連続指標群とする．Arthur [1] は有限群 S_{ϕ_v} の指標でパラメータ付けされた $\mathrm{SO}_5(\mathbb{Q}_v)$ の表現の集合 $\Pi_{\phi_v}(\mathrm{SO}_5(\mathbb{Q}_v)) = \{\sigma_{\eta_v} | \eta_v \in \hat{S}_{\phi_v}\}$ と，各 A パラメータに対して S_ϕ の指標 ϵ_ϕ を定義した．Arthur の重複度公式は次のように述べられる．

定理 4 ([1, Theorem 1.5.2])**.** 離散スペクトル $L^2_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_5(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{SO}_5(\mathbb{A}_\mathbb{Q}))$ は

$$L^2_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_5(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{SO}_5(\mathbb{A}_\mathbb{Q})) = \bigoplus_{\phi} \bigoplus_{\substack{\eta \in \hat{S}_{\phi,\mathbb{A}} \\ \eta\circ\Delta = \epsilon_\phi}} \sigma_\eta$$

と直和分解される．ここで $\eta = \otimes_v \eta_v \in \hat{S}_{\phi,\mathbb{A}}$ に対して $\sigma_\eta = \otimes_v \sigma_{\eta_v}$ と書いた．

一言で雑にいうと，既約な保型表現を A パラメータ ϕ と指標 $\eta \in \hat{S}_{\phi,\mathbb{A}}$ で分類するものである．σ_{η_v} は既約とは限らないので重複度 1 を主張するものではないことに注意.

Gan-市野 [2] はメタプレクティック群 Mp_4 に対して同様の定理を証明した．メタプレクティック群とは，シンプレクティック群の非自明な二重被覆群であり，分裂しない短完全列

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathrm{Mp}_4(R) \to \mathrm{Sp}_4(R) \to 1$$

（R はアデール環 $\mathbb{A}_\mathbb{Q}$ や局所体 $\mathbb{Q}_v$）をもつ．これは正確には代数群ですらないものだが，整数論で重要な群であり代数群同様の表現論が認められている．ただしその定義から，Mp_4 の表現には Sp_4 の表現からくるものも含まれてしまう．これは Sp_4 の表現として扱われるべきものであるから，本稿では単に Mp_4 の表現といえばそうでないものを指す．離散スペクトルのうち Sp_4 からこない部分を $L^2_{\mathrm{disc}}(\mathrm{Mp}_4)$ とおく．Gan-市野 [2] は $\mathrm{Mp}_4(\mathbb{Q}_v)$ の表現の集合 $\Pi_{\phi_v}(\mathrm{Mp}_4(\mathbb{Q}_v)) = \{\pi_{\eta_v} | \eta_v \in \hat{S}_{\phi_v}\}$ と，各 A パラメータに対して S_ϕ の指標 $\tilde{\epsilon}_\phi$ を定義した．ここで，Mp_4 の A パラメータは SO_5 のそれらと同じものとして定義する．

定理 5 ([2, Theorem 2.1])**.** 離散スペクトル $L^2_{\mathrm{disc}}(\mathrm{Mp}_4)$ は

$$L^2_{\mathrm{disc}}(\mathrm{Mp}_4) = \bigoplus_{\phi} \bigoplus_{\substack{\eta \in \hat{S}_{\phi,\mathbb{A}} \\ \eta\circ\Delta = \tilde{\epsilon}_\phi}} \pi_\eta$$

と直和分解される．

5 証明

最後に，プレプリント [4] に書きとめた証明を簡単に紹介する．前節末に述べたことから，k の偶奇で状況が少し異なる．以降では簡単のため k を奇数とする．まず重さ整数の側からみる．ヘッケ固有形式 $f \in S_{j+3,2k-6}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ をひとつとり，そのアデール持ち上げ Φ_f を考える．$\mathbb{Q}$ 上の代数群 Sp_4 の強近似定理から GSp_4 の強近似定理が従う： $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q})\,\mathrm{GSp}_4^+(\mathbb{R})\,\mathrm{GSp}_4(\hat{\mathbb{Z}})$.

ここで，$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ のアデール環，$\hat{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}$ の副有限完備化 $\prod_p \mathbb{Z}_p$ とする．アデール持ち上げ Φ_f とは $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 上の V_{2k-6} に値をとる関数であり，$g \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ に対して

$$\Phi_f(g) = [f|_{j+3,2k-6}g_\infty](i1_2) \qquad g = \gamma g_\infty \kappa, \quad \gamma \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}),\ g_\infty \in \mathrm{GSp}_4^+(\mathbb{R}),\ \kappa \in \mathrm{GSp}_4(\hat{\mathbb{Z}})$$

で定まるものである．分解 $g = \gamma g_\infty \kappa$ は一意ではないが，f の保型性により Φ_f は well-defined である．特にこれは左 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q})$ 不変で右 $\mathrm{GSp}_4(\hat{\mathbb{Z}})$ 不変．また，$\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の中心でも不変：

$$\Phi_f(\gamma g \kappa z) = \Phi_f(g), \qquad \forall g \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}),\ \gamma \in \mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q}),\ \kappa \in \mathrm{GSp}_4(\hat{\mathbb{Z}}),\ z \in Z(\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})).$$

なので $\mathrm{PGSp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 上の関数とみなせる．さらに $\mathrm{PGSp}_4 \simeq \mathrm{SO}_5$ なので $\mathrm{SO}_5(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ 上の関数になる．V_{2k-6} の双対空間 $V_{2k-6}^\vee$ から 0 でない元 v をひとつとって $\varphi_f = \langle \Phi_f, v\rangle : \mathrm{SO}_5(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{C}$ とおき，φ_f の生成する表現 $\mathrm{SO}_5(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の表現を σ_f とすると，f のカスプ条件より σ_f は既約で $\sigma_f \subset L^2_{\mathrm{disc}}(\mathrm{SO}_5(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{SO}_5(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$ であることがわかる．このとき Arthur の重複度公式によってこの σ_f の A パラメータを調べる．$\sigma_f = \otimes_v \sigma_{f,v}$ と分解すると，実素点において $\sigma_{f,\infty}$ は f のウェイト $(j+3, 2k-6)$ から一意に定まり，有限素点において $\sigma_{f,p}$ は f のヘッケ固有値つまり L 関数から定まる．これらを使えば σ_f の A パラメータは GL_4 のシンプレクティックカスプ表現 τ であって k, j に依存した条件を満たすものを用いて $\tau \boxtimes S_1$ とかけることがわかる．さらにそのような τ の集合を T とおくと，上の捜査の逆を辿ることで $\tau \in T$ からヘッケ固有形式 $f \in S_{j+3,2k-6}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ を構成できる．これによって $S_{j+3,2k-6}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ のヘッケ固有形式からなる基底と T との間に全単射が構成される．

次に重さ半整数の側をみる．先と同様にヘッケ固有形式 $F \in S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$ のアデール持ち上げ π_F を考える．これは $L^2_{\mathrm{disc}}(\mathrm{Mp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$ の部分表現となるため Gan-市野の重複度公式を用いて上のように A パラメータを特定したいが，F のレベルが $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ という『最も大きい』群ではなく $\Gamma_0(4)$ という『少し小さい』群であるためにこれができない．そこで，定理 2 の同型

$$J^{\mathrm{cusp}}_{k,j} \xrightarrow{\simeq} S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$$

によって F に対応するヤコビ形式 F^J をとって，F^J のアデール持ち上げ π_{F^J} を考える．これはヤコビ群 $\mathrm{Sp}_4^J(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の離散スペクトルで，F^J のレベルは $\mathrm{Sp}_4^J(\mathbb{Z})$ という『最も大きい』群だから π_{F^J} は比較的容易に調べることができる．$L^2_{\mathrm{disc}}(\mathrm{Sp}_4^J(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{Sp}_4^J(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}))$ の重複度公式は特にないが，実はヤコビ群とメタプレクティック群の表現の間には canonical な全単射があるので，その全単射で π_{F^J} に対応する $\mathrm{Mp}_4(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の既約保型表現を π'_F をとることができる．π_{F^J} について調べたことから π'_F もよくわかっており，Gan-市野の重複度公式を用いて上のように A パラメータを特定することができる．ついでに $\pi_F = \pi'_F$ であることもわかる．あとは重さ整数の側と同じように $S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$ のヘッケ固有形式からなる基底と T との間に全単射が構成される．重さ半整数のときに保型形式を単にアデール持ち上げするのではなく，ヤコビ形式とヤコビ群の表現を経ることがこの証明の特色であろう．

最後に T を介して $S^+_{k-\frac{1}{2},j}(\Gamma_0(4), \left(\frac{-1}{\cdot}\right))$ と $S_{j+3,2k-6}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ のヘッケ固有基底の全単射，即ち線形同型が構成される．L 関数は A パラメータで特徴づけられるので，L 関数の一致も従う．

参考文献

[1] J. Arthur, *The endoscopic classification of representations: orthogonal and symplectic groups*, American Mathematical Society Colloquium Publications, **61**, (2013).

[2] W. T. Gan, A. Ichino, *The automorphic discrete spectrum of* Mp_4, Int. Math. Res. Not., rnaa 121, (2020).

[3] T. Ibukiyama, *A conjecture on a Shimura type correspondence for Siegel modular forms, and Harder's conjecture on congruences*, Modular Forms on Schiermonnikoog Edited by Bas Edixhoven, Gerard van der Geer and Ben Moonen, Cambridge University Press, pp. 107-144, (2008).

[4] H. Ishimoto, *A proof of Ibukiyama's Shimura type conjecture on Siegel modular forms of half-integral weight and of degree 2*, arXiv:2010.08736.

[5] W. Kohnen, *Modular forms of half integral weight on* $\Gamma_0(4)$, Math. Ann., **248**, pp. 249-266, (1980).

[6] G. Shimura, *On modular forms of half integral weight*, Ann. of Math. (2) **97**, pp. 440–481, (1973).