

非局所反応拡散方程式における 定常フロント解同士の相互作用*

石井宙志[†]

1 はじめに

反応拡散方程式は物質間の「反応」と物質の「拡散」の効果を持つ方程式であり、生物や化学の数理解モデルとしてよく現れる。アラン・チューリングによって1952年に提唱された、2成分以上の反応拡散方程式に現れる性質であるチューリング不安定性は、自然界に現れる様々な時空間パターンを再現するための理論的手法として、パターン形成問題の分野で良く用いられてきた [12, 13, 16].

その一方、近年では反応拡散方程式の拡張として、対象からの距離によって働きを変える「非局所効果」を時間発展方程式に加えた、非局所反応拡散方程式が様々な分野の数理解モデルとして提案されている。例えば、局所拡散方程式 $u_t = u_{xx}$ をより一般化した、以下のような非局所拡散方程式が提案されている [1].

$$u_t = K * u - \alpha u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

ここで、 $u = u(t, x) \in \mathbb{R}$ ($t > 0, x \in \mathbb{R}$) は時刻 t , 位置 x における物質の濃度とし、 u の添え字にある t と x はそれぞれ t と x に関する偏微分を表すものとする。さらに、 $K \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ は非負の偶関数であり、 $\alpha := \int_{\mathbb{R}} K(y) dy$ と定め、

$$(K * u)(t, x) = \int_{\mathbb{R}} K(y) u(t, x - y) dy$$

とする。 $\alpha = 1$ のとき、 $K(x - y)$ は単位時間に物質が位置 y から位置 x に移動する確率密度を表しており、 $(K * u)(t, x)$ は単位時間にすべての位置から位置 x に移動してきた物質の濃度を表している。非局所拡散方程式は、局所拡散方程式や分数べき拡散方程式との関係性も知られており、これらの方程式の一般化した拡散方程式であると考えられる [1, 3]. さらに、反応拡散方程式の局所拡散項を非局所拡散項に変えた

$$u_t = K * u - \alpha u + f(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

も近年盛んに解析されている [4, 5, 10, 17].

* 本研究は栄伸一郎教授（北海道大学）との共同研究に基づく [8]

[†] Hiroshi ISHII, 北海道大学大学院 理学院 数学専攻, E-mail : hiroshi-ishii@eis.hokudai.ac.jp

非局所拡散方程式では、非負の積分核関数 $K(x)$ を扱っているが、負の部分を持つ積分核関数を有する数理モデルも存在する。本稿では、2017年に近藤によって提唱されたKTモデル (Kernel-based Turing model) について紹介する [11] :

$$u_t = f(K * u) - \alpha u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ u, & u \in [0, R], \\ R, & u > R. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、積分核関数 K は負の部分を持つものとする。[11] では2次元平面上で数値計算を行っており、方程式 (1.1) の積分核関数 K の形状を変えることによって、動物や魚の表皮に表れるストライプやスポット、迷路パターンが再現できることを報告している。積分核関数 K が負の部分を持つことの重要性を簡単に紹介する。 $u(t, x)$ と $K(x)$ の空間方向におけるフーリエ変換をそれぞれ $\hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-ix\xi} dx$, $\hat{K}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} K(x) e^{-ix\xi} dx$ とおく。 $f(u)$ は部分的に線形であるので、 $f(u)$ を外した方程式を考え、その方程式にフーリエ変換を行うと、形式的に

$$\hat{u}_t = (\hat{K}(\xi) - \alpha)\hat{u}, \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

が導かれる。このとき、 $K(x)$ が連続な非負の関数であれば、 $\hat{K}(\xi) < \alpha$ ($\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) となるため、 $\xi \neq 0$ のときには $\hat{u}(t, \xi)$ は時間とともに減衰していくことがわかる。しかし、負の部分を持つような $K(x)$ であれば、特定の波数 ξ_0 で $\hat{K}(\xi_0) > \alpha$ となるような状況が起こりうるため、そのような状況では特定の波数で不安定化が起こり、自発的に空間パターンが生成される。したがって、積分核が負の部分を持つような状況では、チューリング不安定性が起こりうる。多成分の反応拡散方程式で現れる性質であるチューリング不安定性が、単独の方程式であっても現れるのは、非局所反応拡散方程式の特徴の1つである。

非局所反応拡散方程式におけるパターン形成問題を考察するために、多成分線形反応拡散方程式による積分核関数の近似手法 [14] や反応拡散ネットワークからパターンを決定する本質的積分核の導出 [9] などの研究がなされている。これらの研究により、多成分反応拡散方程式と単独の非局所反応拡散方程式の関係性は明らかになりつつある。さらには数値計算により、積分核関数の形状に依存して複雑な空間パターンが生成されること、進行波解の形状が変化することが報告されている [11, 15]。しかし、非局所反応拡散方程式の積分核関数の形状がパターンの形成過程において、どのような影響を与えているかは明らかにされていなかった。

本研究では、非局所反応拡散方程式における空間パターンの形成過程の理解のために、安定な局在パターンが存在すると仮定した上で、複数の局在パターンが配置されたときの局在パターン間に生じる相互作用について解析を行った。特に本研究では、局在パターンの性質と積分核関数から決まる量によって、複数の局在パターンの相互作用により生じる位置の時間変化を解析する手法を構築した。本稿では、定常フロント解に生じる相互作用に関する解析結果を紹介する。以降は問題設定を紹介し、主結果を述べた後に応用例を示す。

2 問題設定

本研究では、次の非局所反応拡散方程式について考える：

$$u_t = du_{xx} + f(u, K * g(u)), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

ここで、 $u = u(t, x) \in \mathbb{R}$, $d > 0$, $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ と $g(u) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は十分なめらかな非線形関数とし、 $*$ は空間方向の畳み込み積分

$$(K * g(u))(t, x) := \int_{\mathbb{R}} K(y)g(u(t, x - y))dy,$$

を表しており、積分核関数 K は

$$\begin{cases} K \in L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}), \quad K(-x) = K(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} |K(y)|e^{\lambda y} dy < \infty \end{cases}$$

をみたすものとする。 $K(x)$ の典型例は $K(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-x^2/4}$ である。 また、 $\tilde{K}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} K(y)e^{\lambda y} dy$ とおく。 さらに、本稿を通して次の仮定を課す：

仮定 2.1 方程式 (2.1) は次をみたすものとする。

(H1) [安定な平衡点の存在]

方程式 (2.1) は線形安定な 2 つの平衡点 ± 1 を持つ。

(H2) [定常フロント解の存在]

次をみたす正定数 α, β と関数 $p(x)$ が存在する：

$$\begin{cases} 0 = dp_{xx} + f(p, K * g(p)), \quad x \in \mathbb{R}, \\ |p(x) - 1| \leq O(e^{-\alpha x}) \quad (x \rightarrow +\infty), \\ |p(x) + 1| \leq O(e^{\beta x}) \quad (x \rightarrow -\infty). \end{cases}$$

(H3) [定常フロント解の線形安定性]

L を定常フロント解 $p(x)$ を中心とした線形化作用素、すなわち $v \in H^2(\mathbb{R})$ に対して

$$Lv := dv_{xx} + \eta(x)v + \zeta(x)[K * (g'(p)v)]$$

と定める。ここで、 $\eta(x) := f_u(p(x), K * g(p(x)))$, $\zeta(x) := f_v(p(x), K * g(p(x)))$ とおいた。このとき、 L のスペクトル $\Sigma(L)$ は $\Sigma(L) = \Sigma_0 \cup \{0\}$ と分解ができ、 0 は固有関数 p_x に対応する単純固有値であり、 Σ_0 はある定数 $\rho_0 > 0$ に対して $\Sigma_0 \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < -\rho_0\}$ をみたすものとする。

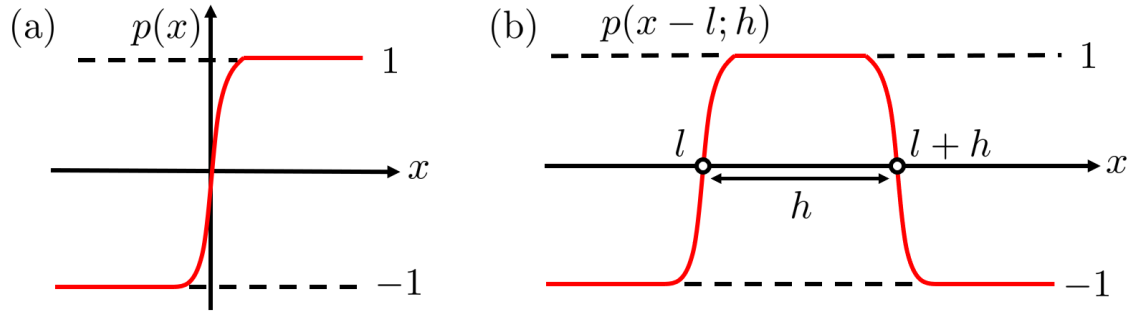


図1 (a) フロント解 $p(x)$ のイメージ図. (b) $p(x-l; h)$ のイメージ図. l は左側のフロント解の位置, h は2つのフロント解の距離を表している.

3 主結果

主結果の前に, いくつか記号を導入する. $p(x)$ を (2.1) の安定な定常フロント解とする. $p(-x)$ もまた 1 から -1 をつなぐ (2.1) の安定な定常フロント解であることに注意する. このとき, 2つのフロント解を重ね合わせた関数として $p(x, h)$ を

$$p(x; h) = p(x) + p(-(x-h)) - 1$$

とおき, 2つのフロント解を重ね合わせた関数の集合を

$$M(h^*) = \{p(x-l; h) \mid l \in \mathbb{R}, h > h^*\},$$

とおく. また, (2.1) の右辺を $\mathcal{L}(u) := du_{xx} + f(u, K * g(u))$ とおき,

$$\delta(h) := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(p(x; h))|$$

と定める. さらに仮定 2.1 の (H3) から, L の共役作用素 L^* に対して, 0 固有値に対応する固有関数 φ^* が $\langle p_x, \varphi^* \rangle = 1$ をみたすように存在する. この φ^* に対して, $H(h)$ を以下のように定める:

$$H(h) = \langle \mathcal{L}(p(\cdot; h)), \varphi^* \rangle_{L^2}.$$

このとき, 栄 ([7]) により構築された中心多様体縮約理論と同様な議論から, 次の結果が得られる:

定理 3.1 ([7, 8]) ある正定数 h^* と C_0 , $M(h^*)$ に対する $H^2(\mathbb{R})$ の近傍 $U = U(h^*)$ が存在して, もし $u(0, \cdot) \in U$ であれば関数 $l(t), h(t) \in \mathbb{R}$ が存在して, $h(t) > h^*$ である限り

$$\|u(t, \cdot) - p(\cdot - l(t); h(t))\|_{L^\infty} \leq C_0 \delta(h(t))$$

をみたす. ここで, $u(t, x)$ は (2.1) の解である. また $l(t), h(t) \in \mathbb{R}$ は,

$$\dot{h} = 2H(h) + O(\delta^2), \tag{3.1}$$

$$\dot{l} = -H(h) + O(\delta^2), \tag{3.2}$$

をみたす. ここで $\delta = \delta(h(t))$ である.

注意 3.2 $\mathcal{L}(p(\pm x)) = 0$ と $\mathcal{L}(\pm 1) = 0$ が成り立つことから, $h \rightarrow +\infty$ のときには $\delta(h) \rightarrow 0$ となる. したがって, h が十分大きいとき, $\delta(h)$ は小さい値をとる.

この定理より, 定数 $l(0)$, $h(0)$ に対して $p(x - l(0); h(0))$ に近い初期値 $u(0, x)$ を与えたとき, フロント間の距離が十分大きい限り, (2.1) の解 $u(t, x)$ は $p(x - l(t); h(t))$ の形で近似ができることを意味している. また, 2つのフロント解の距離は常微分方程式を解析することにより, その挙動を調べることができる.

さて, フロント解同士の相互作用による挙動を見るために $H(h)$ の性質を解析したいが, 直接的に解析をするのは困難である. 本研究では, $p(x)$ と $\varphi^*(x)$ に対して指数減衰を仮定した上で, $H(h)$ の近似式を求めた.

定理 3.3 ([7, 8]) ある正定数 α, γ と 0 ではない定数 a^+ が存在して, $p(x)$ は

$$p(x) - 1 = e^{-\alpha x}(a^+ + O(e^{-\gamma x})) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

をみたすと仮定する. また, φ^* も 0 ではない定数 b^+ が存在して,

$$\varphi^*(x) = e^{-\alpha x}(b^+ + O(e^{-\gamma x})) \quad (x \rightarrow +\infty)$$

をみたすと仮定する. このとき, ある定数 $\gamma' > 0$ が存在して, $H(h)$ は

$$H(h) = M^+ e^{-\alpha h}(1 + O(e^{-\gamma' h}))$$

と表すことができる. ここで,

$$M^+ = [2\alpha d + f_v(1, \tilde{K}(0)g(1))g'(1)\tilde{K}'(\alpha)]a^+b^+$$

であり, $\tilde{K}'(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} yK(y)e^{\lambda y} dy$ とおいた.

この定理より, 左側のフロント解の位置 l と 2つのフロント解の距離 h の時間発展は近似的に,

$$\dot{h} \simeq 2M^+ e^{-\alpha h}, \quad \dot{l} \simeq -M^+ e^{-\alpha h}$$

と表される. したがって, M^+ の符号が決まれば, それぞれのフロント解の動きを理解することができる.

4 応用例

以降は応用例として, 次の非局所反応拡散方程式を考える:

$$u_t = du_{xx} + K * u + f(u), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

この非局所反応拡散方程式は, 物質科学 [2, 4] や生物の分散現象 [10] などの数理モデルとして現れる. 本節では, 積分核関数 K は非負であり, $\int_{\mathbb{R}} K(y)dy = 1$ をみたすものとし, 非線形項 $f(u)$ は

十分なめらかな関数であり, $\tilde{f}(u) := u + f(u)$ とおいたとき, ある定数 $a, r_1, r_2 \in (-1, 1)$, $r_1 < r_2$ が存在して,

$$\begin{cases} \tilde{f}(\pm 1) = \tilde{f}(a) = 0, \tilde{f}'(\pm 1) < 0 < \tilde{f}'(a), \int_{-1}^1 \tilde{f}(u) du = 0, \\ \tilde{f} < 0 \text{ in } (-1, a) \cup (1, \infty), \tilde{f} > 0 \text{ in } (-\infty, 0) \cup (a, 1), \\ \tilde{f}' \geq 0 \text{ in } [r_1, r_2], \tilde{f}' \leq 0 \text{ in } [-1, 1] \setminus [r_1, r_2] \end{cases}$$

をみたすものと仮定する. f の典型例として, $f(u) = -u^3$ が挙げられる.

このとき, 単調増加である定常フロント解が存在すること [4, 5], 線形安定であること [17] および無限遠方で指数減衰すること [17] が報告されている. さらに, このときの線形化作用素は

$$Lv := dv_{xx} + K * v + f'(p(x))v \quad (v \in H^2(\mathbb{R}))$$

となり, 自己共役である. したがって, $\varphi^*(x) = \frac{1}{\|p_x\|^2} p_x(x)$ とおけばよい.

このときの2つのフロント解の相互作用について解析をする. ある正定数 α と0ではない定数 a^+ が存在して, $p(x)$ は

$$p(x) - 1 = e^{-\alpha x} a^+ \quad (x \rightarrow +\infty)$$

をみたすと仮定する. この状況では $b^+ = -\frac{\alpha}{\|p_x\|^2} a^+$ であることに注意すると, 定理 3.3 における M^+ は

$$M^+ = -\frac{\alpha}{\|p_x\|^2} (2\alpha d + \tilde{K}'(\alpha))(a^+)^2$$

と表される. さらに, $\tilde{K}'(\lambda)$ は $\lambda > 0$ の範囲で正になることに注意すれば, $M^+ < 0$ を得る. したがって, 2つのフロント解が十分離れている限り, 左側のフロント解の位置 l と2つのフロント解の間の距離 h の時間発展は近似的に,

$$\dot{h} \simeq 2M^+ e^{-\alpha h} < 0, \quad \dot{l} \simeq -M^+ e^{-\alpha h} > 0$$

と表される. これは2つのフロント解が時間経過とともに, 互いにゆっくりと近づいていくことを意味している.

5 まとめ

本研究では, 2つのフロント解に生じる弱い相互作用について解析を行い, それぞれのフロントの位置の時間発展を近似式で表すことができた. この結果は2つ以上のフロント解の相互作用まで拡張可能である [8]. また現在は, 各種の数値モデルに対して M^+ の符号を解析している. 発表では, その解析結果についても紹介する予定である.

今後はパルス解の相互作用の解析と多成分反応拡散方程式の解析への応用を視野に入れて, 研究を行う予定である.

参考文献

- [1] F. Andreu-Vaillo, J. Mazón, J. D. Rossi, J. J. Toledo-Melero, *Nonlocal diffusion problems*, Math. Surveys Monogr. **165**, AMS, Providence, RI, 2010.
- [2] P. Bates, *On some nonlocal evolution equations arising in materials science*, In: Nonlinear dynamics and evolution equations (Ed. by H. Brunner, X. Zhao and X. Zou), Fields Inst. Commun., AMS, Providence, **48** (2006), 13-52.
- [3] P. W. Bates, X. Chen, A. Chmaj, *Heteroclinic solutions of a van der Waals model with indefinite nonlocal interactions*, Calc. Var., **24** (2005), 261-281.
- [4] P. W. Bates, P. C. Fife, X. Ren, X. Wang, *Traveling waves in a convolution model for phase transitions*, Arch. Ration. Mech. Anal., **138** (1997), 105-136.
- [5] X. Chen, *Existence, uniqueness and asymptotic stability of traveling waves in nonlocal evolution equations*, Adv. Differential Equations, **2** no.1, (1997), 125-160.
- [6] A. J. J. Chmaj, X. Ren, *Homoclinic solutions of an integral equation: existence and stability*, J. Differential Equations, **155** no.1, (1999), 17-43.
- [7] S.-I. Ei, *The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems*, J. Dynam. Diff. Eqns. **14** no.1, (2002), 85-137.
- [8] S.-I. Ei, H. Ishii, *The motion of weakly interacting localized patterns for reaction-diffusion systems with nonlocal effect*, Discrete and Continuous Dynamical System-B, **26** no.1, (2021), 173-190.
- [9] S.-I. Ei, H. Ishii, S. Kondo, T. Miura, Y. Tanaka, *Effective nonlocal kernels on reaction-diffusion networks*, Journal of Theoretical Biology, **509** (2021), 110496.
- [10] V. Hutson, S. Martinez, K. Mischaikow, G.T. Vickers, *The evolution of dispersal*, J. Math. Biol., **47** (2003), 483-517.
- [11] S. Kondo, *An updated kernel-based Turing model for studying the mechanisms of biological pattern formation*, J. Theoretical Biology, **414** (2017), 120-127.
- [12] S. Kondo, T. Miura, *Reaction-diffusion model as a framework for understanding biological pattern formation*, Science, **329** (2010), 1616-1620.
- [13] J. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [14] H. Ninomiya, Y. Tanaka, H. Yamamoto, *Reaction, diffusion and non-local interaction*, J. Math. Biol. **75** (2017), 1203-1233.
- [15] J. Siebert, E. Schöll, *Front and turing patterns induced by mexican-hat-like nonlocal feedback*, Europhys. Lett., **109** no.4, 40014, (2015).
- [16] A. M. Turing, *The chemical basis of morphogenesis*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. B, **237** (1953), 37-72.
- [17] G. Zhao, S. Ruan, *The decay rates of traveling waves and spectral analysis for a class of nonlocal evolution equations*, Math. Model. Nat. Phenom., **10** no.6, (2015), 142-162.