超平面配置の補空間の球面束について

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
石橋卓 (Suguru ISHIBASHI)

概要

「超平面配置の補空間から得られる位相幾何学的な情報がどれほど組合せ論的に記述できるだろうか」というのは超平面配置の基本的な問題意識の一つである. しかし,「補空間の被覆空間の位相幾何学的構造がどれほど組合せ論的に記述できるか」という問題については進展がなく, ましてや被覆空間のコホモロジーの環構造すら未だよく知られていないのが現状であるが, 最近 [1] によって補空間の二重被覆空間の $\mathbb{Z}_2$ 係数ベッチ数が組合せ論的に記述できることが指摘された. 本研究はその結果の類似の考察として, 補空間の被覆空間や球面束を考えた場合にそのコホモロジーの情報を組合せ論的に記述することを目的としている. そこで本稿では, 補空間の S^1 束のコホモロジーの底空間のコホモロジー環上の加群としての構造が組合せ論的に記述できることがわかったのでこれを紹介する.

1 導入

Definition 1.1. $\mathbb{C}^l$ の超平面 H_i の有限集合 $A = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ を超平面配置と呼ぶ. これに対して, $M(A) = \mathbb{C}^l \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ と定める. この $M(A)$ に関する位相幾何学的構造が興味の対象である.

以下, 位相空間のコホモロジーは係数を明示していない場合は複素数体 $\mathbb{C}$ を係数にするものとする.

Definition 1.2. $\mathbb{C}^l$ 上の超平面配置 A を考える. 各 $H \in A$ に対して定まる形式的な記号 e_H を用いて, $E(A) = \bigoplus_{H \in A} \mathbb{C} e_H$ と定める.

Example 1.3. $A = \{H_1, \ldots, H_l\}$ を $H_i = \{(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{C}^l \mid x_i = 0\}$ で定まる超平面配置とする. このとき

$$\begin{aligned} M(A) &= \{(x_1, \ldots, x_l) \mid x_1 \neq 0, \ldots, x_l \neq 0\} \\ &= (\mathbb{C}^\times)^l \\ &\simeq (S^1)^l \end{aligned}$$

より, $M(A)$ のコホモロジー環は

$$H^*(M(A)) = H^*(S^1) \otimes \cdots \otimes H^*(S^1) \cong \bigwedge E(A)$$

となる. ただし $\bigwedge E(A)$ は $E(A)$ の外積代数である.

一般に, 超平面配置 A に関する $M(A)$ のコホモロジー環は, $\bigwedge E(A)$ のある組合せ論的なデータから得られるイデアル $I(A)$ を用いて $H^*(M(A)) \cong (\bigwedge E(A))/I(A)$ と表すことができる. つまり超平面配置の補空間のコホモロジー環は組合せ論的に表示されるのである. 詳しくは [3] を参照されたい.

$M(A)$ の球面束のコホモロジーを調べるために, 次の定理を用いる.

Theorem 1.4. 向き付け可能な球面束 $S^m \to E \to B$ に対して, オイラー類と呼ばれるコホモロジー類 $e(p) \in H^{m+1}(B)$ と, *Gysin* 長完全列と呼ばれる次の長完全列が存在する.

$$\to H^*(B) \xrightarrow{p^*} H^*(E) \to H^{*-m}(B) \xrightarrow{l_{e(p)}} H^{*+1}(B) \to$$

ここで, $l_{e(p)}$ は $e(p)$ を左からかける写像である. さらに, 次の $H^*(B)$-加群の短完全列が存在する.

$$0 \to H^*(B)/(e(p)H^*(B)[m+1]) \to H^*(E) \to Ann_{H^*(B)}(e(p))[m] \to 0$$

ここで, $Ann_{H^*(B)}(e(p)) = \{x \in H^*(B) \mid e(p)x = 0\}$ である.

この短完全列が分裂すれば全空間 E の底空間 B のコホモロジー環上の加群の構造が, オイラー類と底空間の情報で決定されることがわかる. また, 次の定理により $H^2(B:\mathbb{Z})$ の元を選ぶことと, 向き付け可能な S^1 束を選ぶことが同一視できる.

Theorem 1.5. C^∞ 多様体 M に対して, M 上の向き付け可能な S^1 束の同型類のなす集合を $S(M)$ と置いたとき, 次の全単射がある.

$$S(M) \to H^2(M:\mathbb{Z}), \quad [p] \mapsto e(p)$$

2 球面束と Hochschild コホモロジーとの関係

上でみた短完全列が分裂するかどうかは, 底空間から得られるチェイン複体から定まる Hochschild コホモロジー類で記述できることが知られている.

k を体, R を k-代数, M を両側 R-加群とする. R の M 係数 Hochschild コホモロジーとは次で定める余鎖複体 $(CH^*(R,M), \delta^\bullet)$ のコホモロジーである. $l \in \mathbb{Z}$ に対して

$$CH^l(R,M) = \begin{cases} M & (n=0) \\ Hom_k(R^{\otimes l}, M) & (n \geq 1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

として,　微分作用素 $\delta^l : CH^l(R,M) \to CH^{l+1}(R,M)$ を

$l=0$ のとき

$$\delta(x)(r) = rx - xr$$

$l=1$ のとき

$$(\delta a)(x_1 \otimes x_2) = x_1 a(x_2) - a(x_1 x_2) + a(x_1)x_2$$

$l \geq 2$ のとき

$$(\delta a)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{l+1}) = x_1 a(x_2 \otimes \cdots \otimes x_{l+1}) + \sum_{i=1}^{l}(-1)^i a(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_{l+1}) \\ + (-1)^{l+1} a(x_1 \otimes \cdots \otimes x_l) x_{l+1}$$

として定める.

$C^* = (C^\bullet, d^\bullet)$ を体 k 上の次数付き微分加群 (dg-algebra) とする．つまり $C^\bullet$ は次数付き k 代数 $C^\bullet = \oplus_{i \geq 0} C^i$ であって

$$d(xy) = d(x)y + (-1)^{|x|} x d(y), \quad d \circ d = 0$$

を満たす次数 1 の k-線形写像（微分作用素)$d\colon C^\bullet \to C^\bullet$ を備えているものとする.

Remark 2.1. *dg-algebra* $C^* = (C^\bullet, d^\bullet)$ *において，* $Ker(d)$ *は* $C^\bullet$ *の部分代数であり，* $Im(d)$ *は* $Ker(d)$ *の (両側) イデアルである．従って，* C^* *のコホモロジー* $H^*(C) = Ker(d)/Im(d)$ *も自然に* k*-代数の構造を持つ*

dg-algebra C^* に対して, 次のような二つの (k-ベクトル空間の) 短完全列を考えることができる.

$$0 \longrightarrow Im(d) \longrightarrow Ker(d) \xrightarrow{\pi} H^*(C) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Ker(d) \longrightarrow C^\bullet \xrightarrow{d} Im(d)[-1] \longrightarrow 0$$

このとき, π の k-線形 section s と, d の k-線形 section q_0 をとることができる．ここで, π は k-代数の射なので $x, y \in H^*(C)$ に対して $\pi(s(x)s(y) - s(xy)) = 0$ となり, $s(x)s(y) - s(xy) \in Ker(\pi) = Im(d)$ を得ることに注意すると, 次の写像が定義できる.

$$q\colon H^*(C)^{\otimes 2} \to C, \quad q(x \otimes y) = q_0(s(x)s(y) - s(xy))$$

さらに写像

$$\Theta\colon H^*(C)^{\otimes 3} \to Ker(d)$$

を

$$\Theta(x \otimes y \otimes z) = (-1)^{|x|} s(x) q(y \otimes z) - q((xy) \otimes z) + q(x \otimes (yz)) - q(x \otimes y) s(z)$$

で定めると well-defined である．これを用いて次の写像が定められる.

$$\theta = \pi \circ \Theta\colon H^*(C)^{\otimes 3} \to H^*(C)$$

Proposition 2.2. コホモロジー類 $[\theta] \in HH^3(H^*(C), \overline{H^*(C)[1]})$ は s, q_0 の取り方によらない.

さて, $H^*(C)$ に右作用をコホモロジー環としての通常の積, 左作用を $x * y = (-1)^{|x|}xy$ で定め, 両側 $H^*(C)$-加群とみて $\overline{H^*(C)}$ と書く.

Proposition 2.3. 上で定めた $\theta = \pi \circ \Theta\colon H^*(C)^{\otimes 3} \to H^*(C)$ は *Hochschild 3-cocycle* である. つまり

$$[\theta] \in HH^3(H^*(C), \overline{H^*(C)[1]})$$

である.

従って, 位相空間 X に対して, その $\mathbb{C}$ 係数特異コチェイン複体のなす $\mathbb{C}$-代数を考えれば, Hochschild 3-cocycle $\theta(X)$ が定まる.

Theorem 2.4. 向き付け可能な球面束 $S^{n-1} \to E \to B$ に対して定まる短完全列

$$0 \to H^*(B)/(e(p)H^*(B)[n]) \to H^*(E) \to Ann_{H^*(B)}(e(p))[n-1] \to 0$$

の同型類を η と書くとき, ある準同型写像

$$\Psi\colon HH^3(H^*(B), \overline{H^*(B)[1]}) \to Ext^1_{H^*(B)}(Ann_{H^*(B)}(c)[|c|-1], H^*(B)/(cH^*(B)))$$

があって, $\Psi([\theta(B)]) = \eta$ となる. 特に $[\theta(B)] = 0$ であれば $\eta = 0$ となり, 上の短完全列は分裂していることがわかる.

3 主結果

Theorem 3.1. 超平面配置 $A = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ を考える. このとき $[\theta(M(A))] = 0$ となる. つまり $M(A)$ の球面束 $S^{n-1} \to E \to M(A)$ に対して定まる, $H^*(M(A))$-加群の短完全列

$$0 \to H^*(M(A))/(e(p)H^*(M(A))[n]) \to H^*(E) \to Ann_{H^*(M(A))}(e(p))[n-1] \to 0$$

は分裂する.

また, 向きづけ可能な S^1 束の同型類と, 底空間の 2 次のコホモロジー類は 1 対 1 に対応していたことより次が従う.

Corollary 3.2. 超平面配置 $A = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ を考える. このとき $M(A)$ の球面束 $S^1 \to E \to M(A)$ に関して, $H^*(E)$ の $H^*(M(A))$ 上の加群としての構造は組合せ論的に決定される.

また (1.4) を応用することで次のことがわかる.

Proposition 3.3. $\mathbb{C}^2$ 上の超平面配置 A に関して, 0 でない $H^2(M(A))$ の元をオイラー類に持つ $M(A)$ の球面束 $S^1 \to E \to M(A)$ を考える. このとき

$$H^0(E) \cong H^0(M(A)) \cong \mathbb{C}$$
$$H^1(E) \cong H^1(M(A)) \cong E(A)$$
$$H^3(E) \cong H^2(M(A))$$

であり，さらに

$$\dim H^2(E) = \dim H^2(M(A)) + \dim H^1(M(A)) - 1$$

となる．従って，$\mathbb{C}^2$ の超平面配置の補空間 $M(A)$ の S^1 束のベッチ数は，底空間 $M(A)$ の情報のみで決定される．

Example 3.4. $\mathbb{C}^2$ 上の超平面配置 $A = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ が全て *1* 点で交わるとする．このとき，$M(A)$ のベッチ数を考えると $\dim H^0(M(A)) = 1, \dim H^1(M(A)) = n, \dim H^2(M(A)) = n-1$ であることがわかるので $M(A)$ の S^1 束 $S^1 \to E \to B$ を考えたとき

$$\dim H^0(E) = 1$$
$$\dim H^1(E) = \dim H^1(M(A)) = n$$
$$\dim H^2(E) = \dim H^2(M(A)) + \dim H^1(M(A)) - 1 = 2n-2$$
$$\dim H^3(E) = \dim H^2(M(A)) = n-1$$

となる．

参考文献

[1] M. Yoshinaga, Double coverings of arrangement complements and 2-torsion in Milnor fiber homology. European Journal of Mathematics (2019).

[2] A. J. Berrick , A. A. Davydov , Splitting of Gysin extensions. Algebraic and Geometric Topology 1 (2001), 743 - 762.

[3] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 300. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[4] A. Hatcher, Algebraic Topology. Cambridge University Press, Cambridge (2002)