非対角成分に時間遅れを伴う非整数階遅延微分方程式系の安定性解析

入澤直矢 (Naoya IRISAWA)*
北海道大学 大学院理学院 数学専攻

福田一貴 (Ikki FUKUDA)†
信州大学 工学部 工学基礎部門

1 導入

本稿では, 非対角成分に時間遅れの項を持つ以下の非整数階遅延微分方程式系について考える:

$$\begin{cases} \mathrm{D}^\alpha x_1(t) = ax_1(t) + bx_2(t-\tau), \\ \mathrm{D}^\alpha x_2(t) = cx_1(t-\tau) + ax_2(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで, $x(t) = (x_1, x_2)^T(t)$ は $t \geq 0$ に対する未知関数を表し, 各成分 $x_1(t)$, $x_2(t)$ は実数値関数であるとする. さらに, $0 < \alpha < 1$, $a \in \mathbb{R}$, $b, c \neq 0$, $\tau > 0$ とする. 特に, τ は時間遅れを表すことに注意する. また, 方程式系の左辺の D^α は Caputo の非整数階微分を表す (厳密な定義については次節で述べる). この方程式系 (1.1) は通常の微分方程式と比べて, “時間遅れ” と “非整数階微分” という二つの大きな効果を含むのが特徴である. 時間遅れをもつ微分方程式とは, 過去の状況が現在の時間変化率に影響を及ぼすことを方程式に組み込んだもので, 遅延微分方程式と呼ばれる. 通常の微分方程式系を利用した数理モデルと比べて, 時間遅れを考慮した微分方程式系は, より現実の現象に即した数理モデルとして, Lotka-Volterra 型の生態系モデルや競争系モデル, ニューラルネットワークモデル, 交通流など, 科学の様々な分野において現れ, 数学としても応用としても研究が進んでいる (e.g. [2, 12, 13, 16, 19, 20]). 一方, 非整数階微分方程式は, その名の通り通常の微分方程式における整数階の微分を非整数値の階数に拡張したものである. 非整数階微分は過去の履歴を用いた積分により定義されるため, 履歴性や遺伝特性を持つ現象をモデル化する際に有効な手段であると考えられており, 近年物理や工学の様々な分野で注目されている (e.g. [14, 15, 17, 18]). 最近では, 時間遅れと非整数階微分の両効果を含む, 非整数階遅延微分方程式系の研究も盛んに行われており, 数学・応用ともに重要視されている (e.g. [10, 11, 21]). 本研究では, 非整数階遅延微分方程式系の研究の一種として, 2×2 の方程式系 (1.1) の数学解析を行う. 特に, 上記の形の具体的な方程式系を研究の対象とする理由については, この節の後半にて解説する.

非整数階遅延微分方程式の解の存在と一意性については, 単独方程式の場合だけでなく, (1.1) をより一般化した $n \times n$ の連立系の場合も含めて, 既に詳しく解析されている (cf. [6, 8, 9, 23]). 実際, 適切な初期関数を与えることにより, 方程式系 (1.1) に対する初期値問題の時間大域解の一意存在を示すことができる. そこで, それに続く研究として, 本研究では方程式系 (1.1) の解の漸近挙動について考える. 特に, (1.1) の零解が漸近安定となるための必要十分条件を得ることを本研究の目的とする.

本研究の主結果を述べる前に, 非整数階遅延微分方程式の安定性解析に関する先行研究を紹介する. はじめに, 単独方程式について, Čermák-Došlá-Kisela [3] は次の非整数階遅延微分方程式を研究した:

$$\mathrm{D}^\alpha x(t) = ax(t) + bx(t-\tau), \quad t > 0. \tag{1.2}$$

---

* E-mail: s193004@math.sci.hokudai.ac.jp
† E-mail: i_fukuda@shinshu-u.ac.jp
2020 Mathematics Subject Classification: 34K37, 34K20, 34K25, 93D15

ここで, $x(t)$ は $t \geq 0$ に対するスカラー値の未知関数を表し, $0 < \alpha < 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ であるとする. 彼らは上記の単独方程式 (1.2) の零解が漸近安定となるための, パラメータ α, a, b, τ に関する必要十分条件を導出した. [3] で導出された条件は, (1.2) で $\alpha \to 1$ として得られる通常の単独遅延微分方程式に関する安定性条件 (cf. [7]) を拡張した結果であり, 時間遅れ τ が解の安定性に及ぼす影響を明確にしたものとなっている. さらに, [3] ではより正確な解の漸近挙動として, (1.2) の全ての解の時間減衰評価も導出されている. 簡潔に言えば, 通常の遅延微分方程式の解が指数的なオーダーで時間減衰することと比較して, (1.2) の解は多項式的なオーダーで時間減衰することが示されている. なお, (1.2) の解の漸近安定性に関連する他の研究結果としては, [1, 8] 等も挙げられる.

次に連立系の問題を考える. 未知関数をベクトル値関数 $x(t) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T(t)$ として, 以下の非整数階遅延微分方程式系の零解の漸近安定性について考える:

$$\mathrm{D}^\alpha x(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \quad t > 0. \tag{1.3}$$

ここで, A, B は $n \times n$ 実定数行列である. 連立系 (1.3) の零解の漸近安定性については, まず $A = 0$ の場合, Čermák-Horníček-Kisela [4] によって必要十分条件が得られている. 特に, 時間遅れを持つ項の係数行列 B の固有値の複素平面上での分布によって, 解の漸近安定性が特徴付けられている. より一般の連立系 (1.3) については, Thanh-Trinh-Phat [22] により, ラプラス変換と Mittag-Leffler 関数を応用することで, 陽的な解の表示が得られており, それを利用して, 解が漸近安定となるための十分条件が得られている. しかし, [22] で得られた条件は対応する特性方程式に関する抽象的な十分条件であり, 一般の連立系 (1.3) の零解の漸近安定性に関して, 係数行列 A, B によって安定性を特徴づける具体的な必要十分条件は知られていない. 一般の系に対する零解の漸近安定性については, (1.3) で $\alpha \to 1$ として得られる通常の遅延微分方程式系の場合でさえ, 対応する特性方程式が非常に複雑になるが故に, 完全な解決には至っていない. そこで, (1.3) の特別な場合として, ここでは 2×2 の方程式系について考える. はじめに, 係数行列 A, B を以下の形で定義する:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

このとき, $n = 2$ として, 連立系 (1.3) は以下の形に書き換えられる:

$$\begin{cases} \mathrm{D}^\alpha x_1(t) = ax_1(t-\tau) + bx_2(t), \\ \mathrm{D}^\alpha x_2(t) = cx_1(t) + ax_2(t-\tau). \end{cases} \tag{1.4}$$

この方程式系 (1.4) については, Čermák-Kisela [5] により, [3] で構築された単独方程式 (1.2) に対する解析手法を用いることで, 零解が漸近安定となるためのパラメータ α, a, b, c, τ に関する必要十分条件が導出されている. 特に, [5] で得られた (1.4) の零解の安定性条件においては, 時間遅れ τ を連続的に変化させたときに, 零解の安定性が安定・不安定と交互に切り替わる "stability switches" という現象が起こることが示されている. これは (1.4) において $\alpha \to 1$ として得られる通常の遅延微分方程式系に関する結果 (cf. [13]) に対応するものであり, "stability switches" の性質も同様に現れることに注意する. 次に, $n = 2$ の連立系 (1.3) において, 係数行列 A, B を以下の形で定義する:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

このとき, 連立系 (1.3) は今回の研究対象である冒頭の方程式系 (1.1) となる:

$$\begin{cases} \mathrm{D}^\alpha x_1(t) = ax_1(t) + bx_2(t-\tau), \\ \mathrm{D}^\alpha x_2(t) = cx_1(t-\tau) + ax_2(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

方程式系 (1.1) と (1.4) を比較すると, それぞれを (1.3) の形で考えたとき, 時間遅れを持つ項に関して, 対角成分に時間遅れを持つか, 非対角成分に時間遅れを持つかの違いがあり, この違いが解の安定性に及ぼす影響が一つの疑問となる. なお, (1.1) において $\alpha \to 1$ として得られる通常の遅延微分方程式系については, Suzuki-Matsunaga [20] により, 一般の $n \times n$ の連立遅延微分方程式系の場合も含めて既に詳しい解析が行われており, 零解が漸近安定となるためのパラメータ a, b, c, τ に関する必要十分条件として, "stability switches" を含まない条件が得られている. この結果を考慮すると, 対応する非整数階遅延微分方程式系 (1.1) に対しても, "stability switches" は起こらないかと予想されるが, (1.1) の零解の漸近安定性条件については, これまで知られていなかった.

上記の研究の流れを踏まえて, 本研究では, 方程式系 (1.1) の零解が漸近安定となるパラメータ α, a, b, c, τ に関する必要十分条件を導出することを目的とする. 特に, 対角成分に時間遅れを持つ場合の方程式系 (1.4) と比較しつつ, 時間遅れ τ が零解の漸近安定性に及ぼす影響等について考察する.

2 主結果

本研究では, 非対角成分に時間遅れの項を持つ非整数階遅延微分方程式系 (1.1) の零解が漸近安定となるための, パラメータ α, a, b, c, τ に関する必要十分条件が得られた. 以下が本研究の主結果である:

定理 2.1. *$0 < \alpha < 1$, $a \in \mathbb{R}$, $bc > 0$, $\tau > 0$ とする. このとき, 方程式系 (1.1) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は, 次が成り立つことである:*

$$a + \sqrt{bc} < 0. \tag{C1}$$

定理 2.2. *$0 < \alpha < 1$, $a \in \mathbb{R}$, $bc < 0$, $\tau > 0$ とする. このとき, 方程式系 (1.1) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は, 次の (C2), (C3) のいずれかが成り立つことである:*

$$a + \sqrt{-bc} \leq 0. \tag{C2}$$

$$-\sqrt{-bc} < a < \sqrt{-bc}\cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad 0 < \tau < \tau_0(\alpha, a, \sqrt{-bc}). \tag{C3}$$

ここで, $\tau_0(\alpha, a, \sqrt{-bc})$ は以下で定義された定数である.

$$\tau_0(\alpha, a, \sqrt{-bc}) := \frac{\arccos\left((a/\sqrt{-bc})\sin(\alpha\pi/2)\right) - \alpha\pi/2}{\left(a\cos(\alpha\pi/2) + \sqrt{-bc - a^2\sin^2(\alpha\pi/2)}\right)^{1/\alpha}}. \tag{2.1}$$

注意 2.3. パラメータ a, b, c が条件 (C1) または (C2) を満たすとき, (1.1) の零解は, 任意の時間遅れ $\tau > 0$ で漸近安定となる. このような場合, 零解は特に "絶対安定" であると呼ばれる (cf. Ruan [19]).

注意 2.4. 方程式系 (1.1) において, 形式的に $\alpha \to 1$ とすると, 以下の通常の遅延微分方程式系を得る:

$$\begin{cases} x_1'(t) = ax_1(t) + bx_2(t-\tau), \\ x_2'(t) = cx_1(t-\tau) + ax_2(t). \end{cases} \tag{2.2}$$

この微分方程式系 (2.2) に対しては, 第 1 節でも述べた様に, Suzuki-Matsunaga [20] によって, 零解が漸近安定となるためのパラメータ a, b, c, τ に関する必要十分条件が得られている. 一方, 上記の条件 (C1)-(C3) において $\alpha \to 1$ とすると, [20] で得られた (2.2) に対する安定性条件と一致する. 従って, (1.1) に対する定理 2.1-2.2 は, [20] で得られた (2.2) に対する結果の拡張であると言える.

注意 2.5. 非対角成分に時間遅れを持つ方程式系 (1.1) の安定性に関しては, 対角成分に時間遅れを持つ方程式系 (1.4) に対する結果 (cf. [5]) とは異なり, "stability switches" が起こらないことに注意する.

3　準備

本節では非整数階遅延微分方程式系 (1.1) の解の安定性を議論する上で必要な基本的事柄を述べる．はじめに, 実数値関数 $f(t)$ に対して, その非整数階微分を定義しよう．ここでは, 多重積分を整数階から非整数階に拡張することから始める．まず, 自然数 n 階の積分を次のように定義する:

$$\begin{aligned}I^n f(t) &:= \int_0^t ds_{n-1}\int_0^{s_{n-1}} ds_{n-2}\cdots\int_0^{s_1} f(s_0)ds_0\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}f(s)ds = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t (t-s)^{n-1}f(s)ds, \quad t>0.\end{aligned}$$

ここで, $\Gamma(\cdot)$ は Gamma 関数を表す．これは Cauchy の積分公式と呼ばれている．この式で, 自然数 n を実数値 α に置き換えることで, 階数 $\alpha\in(0,1)$ の Riemann-Liouville 非整数階積分が次で定義される:

$$I^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds, \quad t>0.$$

非整数階微分をその積分の逆演算として考えることにより, $f(t)$ の Riemann-Liouville 非整数階微分が以下で定義される:

$${}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}f(s)ds, \quad t>0.$$

この Riemann-Liouville 式の非整数階微分とは異なる非整数階微分として, Caputo の非整数階微分が知られている．Caputo の非整数階微分は Riemann-Liouville 式の微分の定義において, 微分と積分の順序を交換した, 以下の形式で定義される:

$${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\frac{d}{ds}f(s)ds, \quad t>0.$$

この定義を用いると, Caputo の微分と Riemann-Liouville の微分の関係は次の等式で表される:

$${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^\alpha f(t) = {}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}^\alpha (f(t)-f(0)).$$

以下, 本稿では初期条件を導入する上で都合のよい Caputo 式の非整数階微分のみを用いることとし, ${}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^\alpha$ を単に D^α と略記することとする．非整数階の微分積分に関する基本的な公式は [15, 18] 等を参照．

次に, 実数値関数 $f(t)$ に対して, そのラプラス変換を以下で定義する:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)](s) := \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt, \quad s\in\mathbb{C}.$$

このとき, 関数 $f(t)$ の階数 $\alpha\in(0,1)$ の Caputo 微分のラプラス変換は以下で表される (cf. [15, 18]):

$$\mathscr{L}[\mathrm{D}^\alpha f(t)](s) = s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1}f(0).$$

線形の非整数階微分方程式系の解の安定性解析では, 方程式にラプラス変換を用いて解の陽的な表示を与えることが重要となる．近年の研究では, 与えられた解の表示に対して, その解を構成する関数の極の分布を調べることが零解の漸近安定性を求めるための鍵となっている (cf. [3, 5]).

方程式系 (1.1) の両辺に対してラプラス変換を施すと, 解 $x(t) = (x_1,\, x_2)^T(t)$ のラプラス変換は

$$\mathscr{L}\left[\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\right] = M(s)^{-1}\cdot\left(s^{\alpha-1}\begin{pmatrix}\phi_1(0)\\ \phi_2(0)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}be^{-s\tau}\displaystyle\int_{-\tau}^0 \phi_2(u)e^{-su}du\\ ce^{-s\tau}\displaystyle\int_{-\tau}^0 \phi_1(u)e^{-su}du\end{pmatrix}\right) \tag{3.1}$$

と表すことができる．ここで, ϕ_1, ϕ_2 は $[-\tau, 0]$ 上区分的連続である (1.1) の初期関数であり, $M(s)$ は以下で定義される 2×2 行列である:

$$M(s) := \begin{pmatrix} s^\alpha - a & -be^{-s\tau} \\ -ce^{-s\tau} & s^\alpha - a \end{pmatrix}.$$

なお (3.1) は, $M(s)$ が正則である, すなわち以下が成り立つときに適切となる．

$$\begin{aligned} \det M(s) &= (s^\alpha - a)^2 - bce^{-2s\tau} \\ &= \begin{cases} (s^\alpha - a - \sqrt{bc}e^{-s\tau})(s^\alpha - a + \sqrt{bc}e^{-s\tau}) \neq 0, & bc > 0, \\ (s^\alpha - a - i\sqrt{-bc}e^{-s\tau})(s^\alpha - a + i\sqrt{-bc}e^{-s\tau}) \neq 0, & bc < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで (3.1) の両辺を変形し, ラプラス逆変換を施すことにより, (1.1) の解表示を与えることができる．実際, 簡単な計算により, $bc > 0$ の場合に (1.1) の解は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} x_1(t) = {} & \frac{\phi_1(0) - \frac{b}{\sqrt{bc}}\phi_2(0)}{2}\mathcal{R}^{a,-\sqrt{bc},\tau}_{\alpha,1}(t) + \frac{\phi_1(0) + \frac{b}{\sqrt{bc}}\phi_2(0)}{2}\mathcal{R}^{a,\sqrt{bc},\tau}_{\alpha,1}(t) \\ & + \int_{-\tau}^{0}\Bigg[\frac{b\phi_2(u) - \sqrt{bc}\phi_1(u)}{2}\mathcal{R}^{a,-\sqrt{bc},\tau}_{\alpha,\alpha}(t-\tau-u) \\ & \qquad + \frac{b\phi_2(u) + \sqrt{bc}\phi_1(u)}{2}\mathcal{R}^{a,\sqrt{bc},\tau}_{\alpha,\alpha}(t-\tau-u)\Bigg] h(t-\tau-u)du, \quad t > 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = {} & \frac{\phi_2(0) - \frac{\sqrt{bc}}{b}\phi_1(0)}{2}\mathcal{R}^{a,-\sqrt{bc},\tau}_{\alpha,1}(t) + \frac{\phi_2(0) + \frac{\sqrt{bc}}{b}\phi_1(0)}{2}\mathcal{R}^{a,\sqrt{bc},\tau}_{\alpha,1}(t) \\ & + \int_{-\tau}^{0}\Bigg[\frac{c\phi_1(u) - \sqrt{bc}\phi_2(u)}{2}\mathcal{R}^{a,-\sqrt{bc},\tau}_{\alpha,\alpha}(t-\tau-u) \\ & \qquad + \frac{c\phi_1(u) + \sqrt{bc}\phi_2(u)}{2}\mathcal{R}^{a,\sqrt{bc},\tau}_{\alpha,\alpha}(t-\tau-u)\Bigg] h(t-\tau-u)du, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

ここで, $h(\cdot)$ は Heaviside 関数を表し, 関数族 $\mathcal{R}^{v,w,\tau}_{\alpha,\beta}(t)$ は以下で定義される:

$$\mathcal{R}^{v,w,\tau}_{\alpha,\beta}(t) := \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - v - we^{-s\tau}}\right)(t), \quad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad v,\, w \in \mathbb{C}. \tag{3.4}$$

なお, $bc < 0$ の場合にも, 上記の解表示において $\sqrt{bc} = i\sqrt{-bc}$ と解釈することで, 同様の解表示が得られることに注意する．したがって, 方程式系 (1.1) の解の挙動を調べる問題は, 解を構成する関数 $\mathcal{R}^{v,\,w,\,\tau}_{\alpha,\beta}(t)$ について, $\beta \in \{1,\, \alpha\}$, $v = a$, $w \in \{\pm\sqrt{bc},\, \pm i\sqrt{-bc}\}$ の場合の時間無限大での挙動を調べる問題に帰着される．なお, $v,\, w \in \mathbb{R}$ に対しての $\mathcal{R}^{v,\,w,\,\tau}_{\alpha,\beta}(t)$ の時間無限大での挙動は, Čermák-Kisela [5] によって既に詳しく解析されている．特に, 以下の結果は本研究においても非常に重要な役割を果たす．

補題 3.1 ([5]-Lemma 1)**.** $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta \leq 1$, $\tau > 0$, $v, w \in \mathbb{R}$ であるとする．このとき, $\lim_{t\to\infty} \mathcal{R}^{v,\,w,\,\tau}_{\alpha,\beta}(t) = 0$ であるための必要十分条件は, 次のいずれかが成り立つことである:

$$v \leq w < -v. \tag{3.5}$$

$$|v| + w < 0, \quad 0 < \tau < \tau^*(\alpha, v, w). \tag{3.6}$$

ここで, $\tau^*(\alpha, v, w)$ は以下で定義された定数である．

$$\tau^*(\alpha, v, w) := \frac{(2-\alpha)\pi/2 + \arcsin\left((v/w)\sin\left(\alpha\pi/2\right)\right)}{\left(\sqrt{w^2 - v^2\sin^2\left(\alpha\pi/2\right)} + v\cos\left(\alpha\pi/2\right)\right)^{1/\alpha}}.$$

以上の議論により, $bc > 0$ の場合には, $v = a$, $w = \pm\sqrt{bc}$ として上記の補題 3.1 を適用することで, 関数 $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}^{a,\pm\sqrt{bc},\tau}(t)$ が時間無限大で 0 に収束するパラメータの条件が直ちに導かれる. 一方, $bc < 0$ の場合には, $v = a \in \mathbb{R}$, $w = \pm i\sqrt{-bc} \in \mathbb{C}$ であるので, 補題 3.1 を適用することができない. そのため, 上記とは異なる手法で, 新たに関数 $\mathcal{R}_{\alpha,\beta}^{a,\pm i\sqrt{-bc},\tau}(t)$ が時間無限大で 0 に収束するパラメータの条件を導く必要がある. そこで, 本研究では [5] の手法に基づき, (3.4) から導かれる次の特性方程式を考える:

$$Q_1(s) := s^\alpha - q + ipe^{-s\tau} = 0, \qquad Q_2(s) := s^\alpha - q - ipe^{-s\tau} = 0. \tag{3.7}$$

ここで, $q = a$, $p = \sqrt{-bc} > 0$ である. 以下, この特性方程式の複素平面上での根の分布を調べる.

4 特性方程式の性質

本節では, 特性方程式 (3.7) の根についての基本的な性質を紹介する. まず, $Q_1(s) = 0$ の根を $s = \eta e^{i\phi}$ $(\eta \geq 0, -\pi < \phi \leq \pi)$ とすると, η と ϕ は以下を満たすことがわかる.

$$\begin{cases} \eta^\alpha \cos(\alpha\phi) - q + pe^{-\tau\eta\cos\phi}\sin(\tau\eta\sin\phi) = 0, \\ \eta^\alpha \sin(\alpha\phi) + pe^{-\tau\eta\cos\phi}\cos(\tau\eta\sin\phi) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

この (4.1) の各々の式を変形して両辺二乗し, 組み合わせることで, 次を得る.

$$\eta^{2\alpha} - 2q\eta^\alpha \cos(\alpha\phi) + q^2 = p^2 e^{-2\tau\eta\cos\phi}. \tag{4.2}$$

この等式 (4.2) を用いることで, $Q_1(s) = 0$ の根に関する次の補題が導かれる.

補題 4.1. 任意の $0 < \omega < \pi$ に対して, 十分大きな正数 $\eta_\omega > 0$ が存在して, $|\arg(s)| \leq \omega$ かつ $|s| \geq \eta_\omega$ を満たす $Q_1(s) = 0$ の根 s は存在しない.

この補題 4.1 を用いることで, 特性方程式 (3.7) の根に関する以下の基本的な性質が示せる:

命題 4.2. $0 < \alpha < 1$, $\tau > 0$, $p \neq 0$, $q \in \mathbb{R}$ とする. このとき, 以下が成り立つ:

(i) s を $Q_1(s) = 0$ の根とする. このとき, s の複素共役 $\overline{s}$ は $Q_2(s) = 0$ の根となる.
(ii) 特性方程式 (3.7) は非負の実根を持たない.
(iii) 任意の $0 < \omega < \pi$ に対して, $|\arg(s)| < \omega$ を満たす特性方程式 (3.7) の根は有限個である.
(iv) 特性方程式 (3.7) の全ての根の重複度は 2 以下である.

次に, 特性方程式 (3.7) の全ての根が負の実部を持つためのパラメータ α, a, b, c, τ に関する必要十分条件を求めるため, [5] の議論に基づき, 変数変換 $z = s\tau$ を施し, (3.7) を以下の形に書き換える:

$$\tilde{Q}_1(z) := z^\alpha - \tau^\alpha q + i\tau^\alpha pe^{-z} = 0, \quad \tilde{Q}_2(z) := z^\alpha - \tau^\alpha q - i\tau^\alpha pe^{-z} = 0. \tag{4.3}$$

ここで, $\tilde{Q}_1(s)$, $\tilde{Q}_2(s)$ における $p > 0$ の範囲を実数全体に拡張した次の新しい特性方程式を考える:

$$\tilde{Q}(z) := z^\alpha - \tau^\alpha q + i\tau^\alpha p^* e^{-z} = 0, \quad p^* \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

これにより $\tilde{Q}(z)$ は, $p^* > 0$ のときには, $\tilde{Q}_1(z)$ $(p = p^*)$ であり, $p^* < 0$ のときは, $\tilde{Q}_2(z)$ $(p = -p^*)$ となることに注意する. ここで, $\tilde{Q}(z) = 0$ の根を $z = \rho e^{i\phi}$ $(\rho := \tau\eta > 0)$ とおくと, 次が成り立つ:

$$\begin{cases} \rho^\alpha \cos(\alpha\phi) - \tau^\alpha q + \tau^\alpha p^* e^{-\rho\cos\phi}\sin(\rho\sin\phi) = 0, \\ \rho^\alpha \sin(\alpha\phi) + \tau^\alpha p^* e^{-\rho\cos\phi}\cos(\rho\sin\phi) = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

以下, $\tilde{Q}(z)=0$ の根 z が複素平面の虚軸上に存在するときのパラメータ α, p^*, q, τ を調べる．まず根 z の偏角に $\phi=\pm\pi/2$ を代入し, (4.5) を $\tau^\alpha p^*$ と $\tau^\alpha q$ について整理すると, 以下の複数の曲線が得られる:

$$\gamma_{j,1}: I_j \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_{j,1}(\rho)=\begin{pmatrix} f_1(\rho) \\ g_1(\rho) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\rho^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{\cos\rho} \\ \dfrac{\rho^\alpha \cos(\rho+\alpha\pi/2)}{\cos\rho} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{j,2}: I_j \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_{j,2}(\rho)=\begin{pmatrix} f_2(\rho) \\ g_2(\rho) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\rho^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{\cos\rho} \\ \dfrac{\rho^\alpha \cos(\rho+\alpha\pi/2)}{\cos\rho} \end{pmatrix}.$$

ここで, $I_0:=(0,\,\pi/2)$, $I_j:=(\pi/2+(j-1)\pi,\,\pi/2+j\pi)$ $(j=1,2,\cdots)$ であるとする．すなわち, 組 $(\tau^\alpha p^*, \tau^\alpha q)$ が上記の曲線に含まれるとき, $\tilde{Q}(z)=0$ の根 z が複素平面の虚軸上に存在する．更に, 区間 I_0 上での曲線 $\gamma_{0,1}$ と $\gamma_{0,2}$ の像の和集合の閉包を

$$\Gamma_0 := \overline{\gamma_{0,1}(I_0) \cup \gamma_{0,2}(I_0)} \tag{4.6}$$

と定義し, 区間 I_j $(j=1,2,\cdots)$ 上での曲線 $\gamma_{j,1}$ と $\gamma_{j,2}$ の像の和集合を以下で定義する:

$$\tilde{\Gamma} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\gamma_{j,1}(I_j) \cup \gamma_{j,2}(I_j)\right). \tag{4.7}$$

ここで, Γ_0 はそれを境界として平面 $(\tau^\alpha p^*, \tau^\alpha q)$ を上下の二つの領域に分割することに注意する．

以上の記号の準備の下で, まず $\tilde{Q}_1(z)=0$ の根に対して, 以下の命題が成り立つ:

命題 4.3. *$0<\alpha<1$, $\tau>0$, $p>0$, $q\in\mathbb{R}$ とする．さらに, $p^*=p$ として, パラメータの組 $(\tau^\alpha p^*, \tau^\alpha q)$ は $\tilde{\Gamma}$ に含まれるとする．このとき, 虚軸上に存在する $\tilde{Q}_1(z)=0$ の根 z は $p>0$ を連続的に増加させると複素平面の右半平面へと移る．*

次に, 新しい特性方程式 (4.4) の全ての根が負の実部を持つための, パラメータの組 $(\tau^\alpha p^*, \tau^\alpha q)$ が満たすべき条件を述べるため, 以下の集合を定義する:

$$\mathcal{S}_{\alpha,\tau} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| < \left(\frac{|\arg(\lambda)|-\alpha\pi/2}{\tau}\right)^\alpha,\ |\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2} \right\}.$$

この集合 $\mathcal{S}_{\alpha,\tau}$ に対して, 以下の命題が成り立つことが知られている:

命題 4.4 ([4]-Proposition 1-(iii))**.** *$\lambda\in\mathbb{C}$ とする．このとき, 方程式 $s^\alpha-\lambda e^{-s\tau}=0$ の全ての根が負の実部を持つための必要十分条件は, $\lambda\in\mathcal{S}_{\alpha,\tau}$ となることである．*

上記の命題 4.4 を用いて, 特性方程式 (4.4) の全ての根が負の実部を持つためのパラメータ α, p^*, q, τ に関する必要十分条件を求めることができる．そのために, まず, 以下の集合を定義する:

$$A_1 := \bigcup_{\rho\in I_0} \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x=f_1(\rho),\, y<g_1(\rho) \right\}, \tag{4.8}$$

$$A_2 := \bigcup_{\rho\in I_0} \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x=f_2(\rho),\, y<g_2(\rho) \right\}. \tag{4.9}$$

ここで, $I_0=(0,\pi/2)$ であった．この A_1 と A_2 の和集合を次で定める:

$$A := A_1 \cup A_2.$$

このとき, 特性方程式 (4.4) の根の実部の符号に関する以下の定理が成り立つ:

定理 4.5. $0<\alpha<1$, $\tau>0$, p^*, $q\in\mathbb{R}$ とする．このとき, パラメータの組 $(\tau^\alpha p^*, \tau^\alpha q)$ が集合 A に含まれることは, 特性方程式 (4.4) の全ての根が負の実部を持つための必要十分条件となる．

5 主結果の証明の概略

本節では, 主結果である定理 2.1 と定理 2.2 の証明の概略を述べる．まず, 定理 2.1 を説明しよう．

定理 2.1 の証明

方程式系 (1.1) の解は, その解表示 (3.2)-(3.3) から分かる様に, t の関数 $\mathcal{R}_{\alpha,1}^{a,\pm\sqrt{bc},\tau}(t)$ と $\mathcal{R}_{\alpha,\alpha}^{a,\pm\sqrt{bc},\tau}(t)$ で構成されている．特に, (1.1) の零解が漸近安定であるための必要十分条件は, $t\to\infty$ としたとき $\mathcal{R}_{\alpha,1}^{a,\pm\sqrt{bc},\tau}(t)$ と $\mathcal{R}_{\alpha,\alpha}^{a,\pm\sqrt{bc},\tau}(t)$ が共に 0 に収束することである．従って, 補題 3.1 により, (1.1) の零解が漸近安定となるための, パラメータ α, a, b, c, τ に関する必要十分条件を得ることができる．実際, $v=a$, $w=\pm\sqrt{bc}$ として補題 3.1 を適用し, 条件 (3.5)-(3.6) を整理することにより, $a+\sqrt{bc}<0$ かつ $\tau>0$ が (1.1) の零解が漸近安定となるための必要十分条件であると結論付けられる． □

次に, 定理 2.2 を説明しよう．まず, 以下の議論のために, 次の関数を定義する:

$$h(\rho) := \frac{\cos(\rho+\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi/2)}, \qquad 0<\rho<\frac{\pi}{2}. \tag{5.1}$$

この関数 $h(\rho)$ を用いると, Γ_0 上でのパラメータ p^* と q の比 $q/|p^*|$ は次の様に表すことができる:

$$\frac{q}{|p^*|} = h(\rho). \tag{5.2}$$

定理 2.2 の証明の概略

定理 2.1 と同様に, $bc<0$ の場合に (1.1) の零解が漸近安定であるかどうかは, 関数 $\mathcal{R}_{\alpha,1}^{a,\pm i\sqrt{-bc},\tau}(t)$ と $\mathcal{R}_{\alpha,\alpha}^{a,\pm i\sqrt{-bc},\tau}(t)$ が $t\to\infty$ で 0 に収束するか否かによって支配される．さらに, 先行研究 [3] の議論を応用すると, 命題 4.2 の (ii)-(iv) により, $t\to\infty$ で関数 $\mathcal{R}_{\alpha,1}^{a,\pm i\sqrt{-bc},\tau}(t)$ と $\mathcal{R}_{\alpha,\alpha}^{a,\pm i\sqrt{-bc},\tau}(t)$ が 0 に収束することと, 特性方程式 $Q_1(z)=0$ と $Q_2(z)=0$ の全ての根が負の実部を持つことが同値となることがわかる．従って, 特性方程式 (3.7) の全ての根が負の実部を持つことと, α, a, b, c, τ が条件 (C2), (C3) のいずれかを満たすことが同値となることを示せればよい．前節の議論を用いると, (4.3) で与えられた新しい特性方程式 $\tilde{Q}_1(z)=0$ を考えれば十分である．以下, 便宜上 $q:=a\in\mathbb{R}$, $p:=\sqrt{-bc}>0$ とする．

以下, 必要性のみ示す．まず, 特性方程式 $\tilde{Q}_1(z)=0$ の全ての根が負の実部を持つとする．このとき, パラメータ α, p, q, τ が条件 (C2), (C3) のいずれかを満たすことを示す．$p^*=p$ として定理 4.5 を適用することで, 組 $(x_0,y_0):=(\tau^\alpha p, \tau^\alpha q)\in A$ が成り立つ．特に, $(x_0,y_0)\in A_2$ であるので, ある $\rho^*\in I_0$ が存在して, $x_0=f_2(\rho^*)$, $y_0<g_2(\rho^*)$ が成り立つ．以下, y_0 の値によって 2 つに場合分けを行う:

$$\text{(i)}\ \ y_0\le -x_0, \qquad \text{(ii)}\ \ -x_0<y_0.$$

ここでは例として, (ii) $-x_0<y_0$ の場合を説明しよう ((i) の場合は同様の議論でより簡単に扱える)．このとき,

$$-x_0<y_0<g_2(\rho^*) \tag{5.3}$$

であるので, この不等式の両辺を $x_0=f_2(\rho^*)$ で割ると, y_0/x_0 に関する次の不等式を得る:

$$-1<\frac{y_0}{x_0}<\frac{g_2(\rho^*)}{f_2(\rho^*)}=\frac{\cos(\rho^*+\alpha\pi/2)}{\sin(\alpha\pi/2)}=h(\rho^*). \tag{5.4}$$

ここで, 任意の $\rho \in I_0$ に対して $h(\rho) < \cot(\alpha\pi/2)$ が成り立つので, (5.4) を用いて次の不等式

$$-1 < \frac{y_0}{x_0} < h(\rho^*) < \cot\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

が成り立つ. よって, $y_0/x_0 = q/p = a/\sqrt{-bc}$ より, α, p, q, τ は条件 (C3) の第 1 式目を満たす. 次に, α, p, q, τ が不等式 $0 < \tau < \tau_0(\alpha, q, p)$ を満たすこと示す. 特に, この式を同値変形した, $0 < x_0 < (\tau_0(\alpha, q, p))^\alpha p$ が成り立つことを示す. まず τ に着目し, $(\tau^\alpha p, \tau^\alpha q)$ が $\gamma_{0,2}(I_0)$ の点となる τ を計算する. つまり, ある $\rho_0 \in I_0$ に対して $f_2(\rho_0) = \tau^\alpha p$ かつ $g_2(\rho_0) = \tau^\alpha q$ となる τ を求める. 今, (5.2) を ρ について解くと, 次を得る:

$$\rho + \alpha\pi/2 = \arccos((q/p)\sin(\alpha\pi/2)), \quad \mathrm{i.e.} \quad \rho = \arccos((q/p)\sin(\alpha\pi/2)) - \alpha\pi/2.$$

このときの ρ を ρ_0 として, $g_2(\rho)$ に $\rho = \rho_0$ を代入すると, 次が得られる:

$$\begin{aligned} g_2(\rho_0) &= \frac{(\arccos((q/p)\sin(\alpha\pi/2)) - \alpha\pi/2)^\alpha \, (q/p)\sin(\alpha\pi/2)}{\cos(\arccos((q/p)\sin(\alpha\pi/2)) - \alpha\pi/2)} \\ &= \frac{(\arccos((q/p)\sin(\alpha\pi/2)) - \alpha\pi/2)^\alpha \, (q/p)\sin(\alpha\pi/2)}{(q/p)\sin(\alpha\pi/2)\cos(\alpha\pi/2) + \sin(\arccos((q/p)\sin(\alpha\pi/2)))\sin(\alpha\pi/2)} \\ &= \frac{(\arccos((q/p)\sin(\alpha\pi/2)) - \alpha\pi/2)^\alpha (q/p)}{(q/p)\cos(\alpha\pi/2) + \sqrt{1 - (q^2/p^2)\sin^2(\alpha\pi/2)}}. \end{aligned}$$

更に, 上記の式を用いて, $g_2(\rho_0) = \tau^\alpha q$ を τ^α について解くと, 次を得る:

$$\tau^\alpha = \frac{(\arccos((q/p)\sin(\alpha\pi/2)) - \alpha\pi/2)^\alpha \, (q/p)}{(q^2/p)\cos(\alpha\pi/2) + q\sqrt{1 - (q^2/p^2)\sin^2(\alpha\pi/2)}} = \frac{(\arccos((q/p)\sin(\alpha\pi/2)) - \alpha\pi/2)^\alpha}{q\cos(\alpha\pi/2) + \sqrt{p^2 - q^2\sin^2(\alpha\pi/2)}}.$$

上記の式の両辺を $1/\alpha$ 乗することで, $(\tau^\alpha p, \tau^\alpha q)$ が $\gamma_{0,2}(I_0)$ の点となるような τ は (2.1) で定義された $\tau_0(\alpha, q, p) = \tau_0(\alpha, a, \sqrt{-bc})$ と一致することがわかる. また, 簡単な計算により, $f_2(\rho_0) = (\tau_0(\alpha, q, p))^\alpha p$ も成り立つ. よって, $f_2(\rho_0) = (\tau_0(\alpha, q, p))^\alpha p$ と $g_2(\rho_0) = (\tau_0(\alpha, q, p))^\alpha q$ が成り立つことがわかる. 便宜上, $\tau_0(\alpha, q, p)$ を τ_0 とし, 上の 2 式目の両辺を $f_2(\rho_0) = {\tau_0}^\alpha p$ で割ると, 次を得る:

$$\frac{g_2(\rho_0)}{f_2(\rho_0)} = \frac{{\tau_0}^\alpha q}{{\tau_0}^\alpha p} = h(\rho_0). \tag{5.5}$$

一方, y_0/x_0 は, $x_0 = f_2(\rho^*)$ に注意して変形すると,

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{y_0}{f_2(\rho^*)} = \frac{y_0 \cos\rho^*}{(\rho^*)^\alpha \sin(\alpha\pi/2)} \tag{5.6}$$

となる. ここで, $({\tau_0}^\alpha q)/({\tau_0}^\alpha p) = y_0/x_0$ であるので, (5.5) と (5.6) より次の等式が成り立つ:

$$\frac{y_0 \cos\rho^*}{(\rho^*)^\alpha \sin(\alpha\pi/2)} = h(\rho_0).$$

上式を y_0 について整理することで, y_0 は ρ^* と ρ_0 を用いて表すことができる. 従って, y_0 についての不等式 (5.3) は次の形に書き直すことができる:

$$-x_0 < \frac{(\rho^*)^\alpha \cos(\rho_0 + \alpha\pi/2)}{\cos\rho^*} < g_2(\rho^*). \tag{5.7}$$

上記の (5.7) を整理することで, 不等式 $0 < \rho^* < \rho_0$ が導かれる. さらに, 関数 $f_2(\rho)$ の単調性より, $0 < f_2(\rho^*) < f_2(\rho_0)$ が成り立つ. 従って, α, p, q, τ は $0 < x_0 < {\tau_0}^\alpha p$ を満たし, つまり $0 < \tau < \tau_0$ が成り立つことがわかる. 以上により, パラメータ α, p, q, τ は条件 (C3) を満たすと結論付けられる.

(i) の場合にも同様の議論により, 条件 (C2) が満たされることがわかる. □

参考文献

[1] S. Bhalekar: *Stability analysis of a class of fractional delay differential equations*, Pramana-J. Phys. **81** (2013) 215-224.

[2] S.A. Campbell: *Delay independent stability for additive neural networks*, Differential Equations Dynam. Systems **9** (2001) 115-138.

[3] J. Čermák, Z. Došlá and T. Kisela: *Fractional differential equations with a constant delay: Stability and asymptotics of solutions*, Appl. Math. Comput. **298** (2017) 336-350.

[4] J. Čermák, J. Horníček and T. Kisela: *Stability regions for fractional differential systems with a time delay*, Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul. **31** (2016) 108-123.

[5] J. Čermák and T. Kisela: *Delay-dependent stability switches in fractional differential equations*, Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul. **79** (2019) 104888.

[6] N.D. Cong and H.T. Tuan: *Existence, uniqueness, and exponential boundedness of global solutions to delay fractional differential equations*, Mediterr. J. Math. (2017) 14:193.

[7] N.D. Hayes: *Roots of the transcendental equation associated with a certain difference-differential equation*, J. London Math. Soc. **25** (1950) 226-232.

[8] K. Krol: *Asymptotic properties of fractional delay differential equations*, Appl. Math. Comput. **218** (2011) 1515-1532.

[9] V. Lakshmikantham: *Theory of fractional functional differential equations*, Nonlinear Anal. **69** (2008) 3337-3343.

[10] M. Lazarević: *Finite time stability analysis of PD^{α} fractional control of robotic time-delay systems*, Mech. Res. Commun. **33** (2006) 269-279.

[11] S. Li, C. Huang, S. Guo and X. Song: *Fractional modeling and control in a delayed predator-prey system: extended feedback scheme*, Adv. Differ. Equ. **358** (2020).

[12] Z. Lu and W. Wang: *Global stability for two-species Lotka-Volterra systems with delay*, J. Math. Anal. Appl. **208** (1997), 277-280.

[13] H. Matsunaga: *Stability switches in a system of linear differential equations with diagonal delay*, Appl. Math. Comput. **212** (2009) 145-152.

[14] C.A. Monje, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue and V. Feliu: *Fractional-order systems and controls: Fundamentals and applications*, Springer, London, 2010.

[15] K.B. Oldham and J. Spanier: *The fractional calculus*, Academic Press, New York, 1974.

[16] G. Orosz, R.E. Wilson and G. Stépán: *Traffic jams: Dynamics and control*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **368** (2010), 4455-4479.

[17] M.D. Ortigueira: *Fractional calculus for scientists and engineers*, Springer, Berlin, 2011.

[18] I. Podlubny: *Fractional differential equations*, San Diego, Academic Press, 1999.

[19] S. Ruan: *Absolute stability, conditional stability and bifurcation in Kolmogorov-type predator-prey systems with discrete delays*, Quart. Appl. Math. **59** (2001) 159-173.

[20] M. Suzuki and H. Matsunaga: *Stability criteria for a class of linear differential equations with off-diagonal delay*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **24** (2009) 1381-1391.

[21] B. Tao, M. Xiao, Q. Sun and J. Cao: *Hopf bifurcation analysis of a delayed fractional-order genetic regulatory network model*, Neurocomputing **275** (2018) 677-686.

[22] N.T. Thanh, H. Trinh and V.N. Phat: *Stability analysis of fractional differential time-delay equations*, IET Control Theory Appl. **11** (2017) 1006-1015.

[23] Z. Yang and J. Cao: *Initial value problems for arbitrary order fractional differential equations with delay*, Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul. **18** (2013) 2993-3005.