対称領域に付随する行列値 Bratu 方程式

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
井上公人 (Hiroto INOUE)

1 Introduction

1.1 Liouville 方程式

$\lambda \in \mathbb{R}$ をパラメータとする. $\mathbb{R}^2$ の領域上の関数 $\varphi = \varphi(x, y)$ に対する微分方程式

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \lambda e^{\varphi} = 0 \tag{1}$$

を Liouville 方程式という. 但し x, y に関する微分を $\varphi_x = \partial_x \varphi$, $\varphi_y = \partial_y \varphi$ で表す.

Liouville 方程式は曲面論の構造方程式の他, 数理物理では渦力学やその熱力学的極限の方程式, 化学物質の燃焼方程式などに現れ ([8, 9]), これらの応用を背景に数学的な解析がなされてきた. 例えば偏微分方程式論の分野では Boltzmann-Poisson 方程式, Gelfand 方程式とも呼ばれ, 極限 $\lambda \to 0$ における特異性が詳しく調べられている ([9]). また可積分系の観点からは, 厳密解を得る方法が様々な手法で研究されている ([2]). ここでは厳密解の幾何的な構成について述べる.

以下, φ を複素変数 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ の関数 $\varphi(z, \bar{z})$ とみなし, パラメータ λ を取りかえて Liouville 方程式 (1) を

$$\varphi_{z\bar{z}} + 2\lambda e^{\varphi} = 0 \tag{2}$$

と表す. 但し $(\cdot)_z$. $(\cdot)_{\bar{z}}$ で次の微分を表す: $\varphi_z = (\varphi_x - i\varphi_y)/2, \quad \varphi_{\bar{z}} = (\varphi_x + i\varphi_y)/2$.

■解の構成 (cf. [2]) 任意の微分可能な関数 $\varphi(z, \bar{z})$ に対し, 次を定める.

$$Q(\varphi; w) := \frac{1}{2}\varphi_{ww} - \frac{1}{4}\varphi_w^2 = -e^{\varphi/2}(e^{-\varphi/2})_{ww}, \quad w = z, \bar{z}.$$

命題 1.1. *Liouville* 方程式 (2) の解 φ に対して $Q(\varphi; z)_{\bar{z}} = Q(\varphi; \bar{z})_z = 0$ が成り立つ.

$Q(\varphi; z)_{\bar{z}} = Q(\varphi; \bar{z})_z = 0$ は φ_z, $\varphi_{\bar{z}}$ に対する Riccati 方程式となり, $q_1(z), q_2(\bar{z})$ を既知関数とした次の線形方程式系

$$f_{zz} + q_1(z) f = 0, \quad f_{\bar{z}\bar{z}} + q_2(\bar{z}) f = 0$$

に帰着される. 逆にこの方程式系の解 $f = f(z, \bar{z})$ に対し, 多価関数を $\varphi(z, \bar{z}) = -\log f^2$ で定めると, これは Liouville 方程式

$$\varphi_{z\bar{z}} + 2\lambda e^{\varphi} = 0, \quad \lambda = f f_{z\bar{z}} - f_z f_{\bar{z}}$$

をみたし, $Q(\varphi;z)=q_1(z)$, $Q(\varphi;\bar z)=q_2(\bar z)$ が成り立つ．この解析をもとに解 φ の明示式が得られる．関数 $F(z)$ の Schwarz 微分を $(SF)(z)$ で表す;

$$(SF)(z)=\left(\frac{F_{zz}}{F_z}\right)_z-\frac{1}{2}\left(\frac{F_{zz}}{F_z}\right)^2=-\sqrt{F_z}\left(\frac{1}{\sqrt{F_z}}\right)_{zz}.$$

命題 1.2. $\lambda\in\mathbb{R}$ と定数でない関数 $F(z),G(z)$ に対して, 多価関数 $\varphi=\varphi(z,\bar z)$ を次で定める．

$$e^{\varphi}=\left[\log\left(1+\lambda F(z)G(\bar z)\right)^{\frac{1}{\lambda}}\right]_{z\bar z}=\frac{F_z(z)G_z(\bar z)}{(1+\lambda F(z)G(\bar z))^2}. \tag{3}$$

このとき, φ は *Liouville* 方程式 (2) をみたし, $Q(\varphi;z)=(SF)(z)$, $Q(\varphi;\bar z)=(SG)(\bar z)$ が成り立つ．

Remark 1.1. Liouville 方程式に対する解法 (3) は, 2 次元戸田方程式に対する Leznov-Saveliev[7] による解法の特別な場合に含まれる．

1.2 Bratu 方程式

$\lambda\in\mathbb{R}$ をパラメータとする．$\mathbb{R}$ の区間上の関数 $\varphi(s)$ に対する方程式

$$\varphi''(s)+8\lambda e^{\varphi(s)}=0 \tag{4}$$

を Bratu 方程式という．ここで $'$ で s に関する微分を表す．(4) は変数変換 $h(s)=e^{\varphi(s)}$ により正値関数 $h(s)>0$ の方程式

$$(h^{-1}h')'+8\lambda h=0 \tag{5}$$

となる．方程式 (4) は Liouville 方程式の動径部分に現れる:

補題 1.1. *Liouville* 方程式 (2) の解 $\psi(z,\bar z)$ が $r=|z|$ のみに依存する関数 $\psi(r)$ であるとする．$\mathbb{R}$ 上の関数 $\varphi(s)$ を

$$\varphi(s)=\psi(e^s)+2s \tag{6}$$

で定める．このとき $\varphi(s)$ は *Bratu* 方程式 (4) をみたす．

例えば $F(z)=G(z)=z^{\alpha}$ に対して, (3) で得られる Liouville 方程式の解は $r=|z|$ の関数となる．従って上の補題より

$$\varphi(s)=-\log f(s)^2,\quad f(s)=\left.\frac{1+\lambda F(z)^2}{zF_z(z)}\right|_{z=e^s},\quad \lambda\in\mathbb{R} \tag{7}$$

で定まる関数 $\varphi(s)$ は Bratu 方程式 (4) の解となる．その他, Bratu 方程式の解 $\varphi(s)$ と式 (7) で対応する関数 $F(z)$ の組の例を以下の表に示す．

$F(z)$	$\alpha\in\mathbb{C}$	$\lambda\in\mathbb{R}$	$\varphi(s)$	$Q(\varphi;s)$
z^{α}	$\alpha\neq 0$	λ	$-2\log\left[(\lambda e^{\alpha s}+e^{-\alpha s})/\alpha\right]$	$-2\alpha^2$
$-$	$-$	-1	$-2\log 2s$	0
$(z^{\alpha}-1)/\alpha$	$\alpha\neq 0$	0	$2\alpha s$	$-2\alpha^2$
$\log z$	$-$	0	0	0

1.3　双曲幾何との関係

■ポアンカレ計量と Liouville 方程式　計量が

$$ds^2 = e^{\varphi(x,y)}(dx^2 + dy^2)$$

で与えられる曲面に対し, そのガウス曲率を $K = K(x, y)$ とすると, 次の方程式が成り立つ.

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + 2Ke^{\varphi} = 0.$$

特に上半平面 $H = \mathbb{R} + i\mathbb{R}_{>0}$ のポアンカレ計量 $(e^{\varphi} = y^{-2})$ をとった場合, $K(x, y) = -1$ となり φ に対する Liouville 方程式となる. ポアンカレ計量およびその座標変換に伴って得られる関数 $\varphi(x, y)$ は, 式 (3) の $\lambda = -1/4$ の場合として与えられる.

■上半平面の測地線と Bratu 方程式　ポアンカレ上半平面

$$H = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ y > 0\}$$

の測地線方程式は, ラグランジアン

$$\mathcal{L} = \frac{x'(s)^2 + y'(s)^2}{y(s)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{h'(s)}{h(s)}\right)^2 + \frac{x'(s)^2}{h(s)}$$

から導かれる. ここで変数 h は $h = y^2$ で定める. オイラー・ラグランジュ方程式を求めると

$$\begin{cases} (h^{-1}h')' = -2h^{-1}x'^2, \\ (h^{-1}x')' = 0 \end{cases}$$

となる. これから $(h^{-1}x')^2 =: 4\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とおいて x' を消去すると, Bratu 方程式 (5);

$$(h^{-1}h')' + 8\lambda h = 0$$

が得られる. 一方, リー環 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の部分空間 $\mathfrak{p} = \{B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R});\ B = {}^tB\}$ をとると, 上半平面 H の測地線 $z(s)$ で $z(0) = i$ となるものは, 一次分数変換を通して

$$z(s) = \exp(sB) \cdot i, \quad B \in \mathfrak{p}$$

で与えられる. 以上から, 次のような解法が得られる.

命題 1.3. 関数 $h(s)$ を

$$h(s) := \mathrm{Im}(\exp(sB) \cdot i)^2, \quad B = \begin{pmatrix} b & c \\ c & -b \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}$$

で定義すると, $h(s)$ は次の *Bratu* 方程式をみたす.

$$(h^{-1}h')' + 8\lambda h = 0, \quad \lambda = c^2.$$

ここで $\Delta(z) := \operatorname{Im} z$ $(z \in \mathbb{C})$ とおくと, $H = \{z \in \mathbb{C};\ \Delta(z) > 0\}$ であり, $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ の岩沢分解を $G = NAK$ とすると Δ は商写像 $G/K \to N \backslash G/K \cong A$ を与える．命題 1.3 は上半平面 H の測地線 $z(s)$ に対し, $\Delta(z(s))$ がみたす方程式として Bratu 方程式が現れることを示している.

本稿では上半平面の代わりに BD I 型の対称領域 $D \cong \mathrm{O}(n+r, n)/\mathrm{O}(n+r) \times \mathrm{O}(n)$ をとり, 命題 1.3 の類似を考える．対称領域 D はある行列値関数 $\Delta(\cdot)$ が正定値となるような領域として定義される．本稿の主結果として, D の測地線 $u(s)$ に対して $\Delta(u(s))$ がみたす行列値の常微分方程式を導出する.

2　対称領域に付随する行列値 Bratu 方程式

2.1　BD I 型対称領域 $D(J)$ の定義と主結果

行列 $J \in \mathrm{M}_{2n+r}(\mathbb{R})$ を

$$J = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_r & 0 \\ I_n & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で定め, 写像 $\Delta : \mathrm{M}_{n+r,n}(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_{n+r,n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\Delta(u, v) = \begin{bmatrix} {}^t u & I_n \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} v \\ I_n \end{bmatrix} \quad (u, v \in \mathrm{M}_{n+r,n}(\mathbb{R})).$$

また $\Delta(u, u)$ を $\Delta(u)$ と書く.

定義 2.1. 行列からなる領域 $D(J)$ を次で定める (cf. [4, Part IV]).

$$D(J) = \{u \in \mathrm{M}_{n+r,n}(\mathbb{R});\ \Delta(u) > 0\}.$$

閉領域 $\varSigma$ ($D(J)$ の Shilov 境界) を

$$\varSigma = \{u \in \mathrm{M}_{n+r,n}(\mathbb{R});\ \Delta(u) = 0\}$$

で定める．以下 $u_0 \in D(J)$, $w \in \varSigma$ を次のように固定する.

$$u_0 := \begin{bmatrix} -I_n \\ 0 \end{bmatrix} \in D(J), \quad w := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \varSigma.$$

行列群 $\mathcal{G}(J), \mathcal{K}(J)$ を次で定める.

$$\mathcal{G}(J) = \left\{g \in \mathrm{GL}(2n+r, \mathbb{R});\ {}^t g J g = J\right\} \cong \mathrm{O}(n+r, n),$$
$$\mathcal{K}(J) = \left\{g \in \mathcal{G}(J);\ {}^t g = g^{-1}\right\} \cong \mathrm{O}(n+r) \times \mathrm{O}(n).$$

リー環 $\mathfrak{g}(J)$ とその部分空間 $\mathfrak{p}(J)$ を次で定める.

$$\mathfrak{g}(J) = \left\{X \in \mathfrak{gl}(2n+r, \mathbb{R});\ {}^t X J + J X = 0\right\} \cong \mathfrak{so}(n+r, n),$$
$$\mathfrak{p}(J) = \left\{X \in \mathfrak{g}(J);\ X = {}^t X\right\}.$$

群作用 $\pi : \mathcal{G}(J) \curvearrowright D(J)$ を一次分数変換

$$\pi(g)u = (Au + B)(Cu + D)^{-1}, \quad u \in D(J),\ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{G}(J)$$

で定め, 写像 $\gamma : \mathcal{G}(J) \times D(J) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ を次で定める.

$$\gamma(g,u) = Cu + D = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix} g \begin{bmatrix} u \\ I_n \end{bmatrix}.$$

また $\mathcal{G}(J)$ の作用を $D(J) \cup \Sigma$ に連続に拡張しておく. 上の作用 $\pi : \mathcal{G}(J) \curvearrowright D(J)$ は推移的であり, 点 $u_0 \in D(J)$ の固定化部分群は $\mathcal{K}(J)$ となる. これより商表示 $D(J) \cong \mathcal{G}(J)/\mathcal{K}(J)$ が得られる.

以上の定義のもとで, 上半平面に関する命題 1.3 の類似が次のように得られる. ここで $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ を n 次の正定値対称行列全体のなす集合とする.

定理 2.1 (I. [6]). B は $\mathfrak{p}(J)$ の元で, $s=0$ におけるテイラー展開

$$\Delta\left(w, \pi(e^{sB})w\right) = \lambda s^2 + O(s^3), \quad \lambda \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$$

が成り立つものとする. $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$-値関数 $h(s)$ を

$$h(s) = \Delta\left(\pi(e^{sB})u_0\right)$$

と定める. このとき, $h(s)$ は次の方程式をみたす.

$$(h^{-1}h')' + 4\lambda h = 0.$$

以下で見るように, 定理においてテイラー展開の条件が成り立つ B の全体は $\mathfrak{p}(J)$ の部分空間をなす. $n=r=1$ の場合は任意の $B \in \mathfrak{p}(J)$ で成り立ち, $D(J) \cong \mathrm{SO}_0(2,1)/\mathrm{SO}(2) \cong H$ となって命題 1.3 を再現する. 定理に現れる方程式

$$(h^{-1}h')' + \lambda h = 0, \quad \lambda \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \tag{1}$$

は前節の Bratu 方程式 (5) の未知関数 $h(s)$ の値域を $\mathbb{R}_{>0}$ から $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ へ拡張したものとなっている. このことから本稿では (1) を行列値 Bratu 方程式と呼ぶ.

2.2　定理 2.1 の証明

曲線 $u(s) = \pi(e^{sB})u_0$ が $D(J)$ の測地線であることを踏まえ, $D(J)$ の測地線方程式を与えるラグランジアンを適当な座標で計算することにより, $h(s)$ がみたす方程式を導出する.

■$D(J)$ の座標の設定　$\mathcal{G}(J)$ の部分群 $\mathcal{N}(J)$ と $D(J)$ の部分集合 $D(J)_0$ を次で定める.

$$\mathcal{N}(J) = \left\{ N \in \mathcal{G}(J);\ N = \begin{pmatrix} I_n & * & * \\ 0 & I_r & * \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix} \right\}, \quad D(J)_0 = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}h \\ 0 \end{bmatrix} \in D(J);\ h \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R}) \right\}.$$

定義より以下が成り立つ.

補題 2.1.　*1.* 任意の $g \in \mathcal{G}(J)$ に対し,

$$\Delta(\pi(g)u_0) = 2(\gamma\,{}^t\gamma)^{-1}, \quad \gamma = \gamma(g, u_0).$$

2. 任意の $N \in \mathcal{N}(J)$, $u \in D(J)$ に対し,

$$\Delta(\pi(N)u) = \Delta(u).$$

3. 次の軌道分解が得られる.

$$D(J) = \bigsqcup_{N \in \mathcal{N}(J)} \pi(N) D(J)_0.$$

任意の $N \in \mathcal{N}(J)$ は

$$N = \begin{pmatrix} I_n & -n_1 & {}^t n_2 \\ 0 & I_r & {}^t n_1 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} & n_1 \in \mathrm{M}_{n,r}(\mathbb{R}),\ n_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \\ & n_2 + {}^t n_2 + n_1 {}^t n_1 = 0 \end{aligned}$$

と表せる. 上の軌道分解から, 任意の $u \in D(J)$ は

$$u = \pi(N) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} h \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} h + {}^t n_2 \\ {}^t n_1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} & h \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R}), \\ & n_2 + {}^t n_2 + n_1 {}^t n_1 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

と表せる. またこの u に対し, $\Delta(u) = h$ となる.

■ラグランジアンの定義と計算　$D(J)$ の一般の元を

$$u = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \in D(J), \quad U_1 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ U_2 \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathbb{R})$$

と表すとき, $D(J)$ 上で次を定義する.

$$\Delta_*(u) := \begin{pmatrix} -{}^t U_1 - U_1 & -{}^t U_2 \\ -U_2 & I_r \end{pmatrix}.$$

対称領域 $D(J)$ に関する次の事実を用いる (cf. [4]).

補題 2.2. *1.* $D(J)$ の $\mathcal{G}(J)$-不変なリーマン計量が次で与えられる.

$$ds^2 = \mathrm{tr}\left[\Delta(u)^{-1}\, {}^t du \Delta_*(u)^{-1} du \right].$$

2. $D(J)$ の測地線 $u(s)$ で $u(0) = u_0$ となるものは次で与えられる.

$$u(s) = \pi(e^{sB}) u_0, \quad B \in \mathfrak{p}(J).$$

$D(J)$ の測地線方程式は次のラグランジアンから定まる.

定義 2.2. $D(J)$-値関数 $u = u(s)$ に対して $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u'; s)$ を次で定義する.

$$\mathcal{L} = \mathrm{tr}\left[\Delta(u)^{-1}\, {}^t u' \Delta_*(u)^{-1} u' \right].$$

補題 2.3. 式 (2) から定まる $D(J)$-値関数 $u = u(s)$ の表示

$$u(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} h(s) + {}^t n_2(s) \\ {}^t n_1(s) \end{bmatrix}$$

のもとで, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u'; s)$ は次のように表される.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \mathrm{tr}((h^{-1} h')^2) + \mathrm{tr}(h^{-1} n_1' {}^t n_1') - \mathrm{tr}(h^{-1} m h^{-1} m),$$

$$m = n_1 {}^t n_1' + {}^t n_2' = -{}^t m.$$

■オイラー・ラグランジュ (E-L) 方程式の計算

命題 2.1. *$\mathcal{L}$ の E-L 方程式から以下が得られる.*

$$\begin{cases} (h^{-1}h')' = -2h^{-1}n_1'\,{}^t n_1' + 4\tilde{c}h\tilde{c}h, \\ h^{-1}n_1' - 2\tilde{c}n_1 = \tilde{a}, \\ h^{-1}mh^{-1} = \tilde{c}, \quad m = n_1\,{}^t n_1' + {}^t n_2'. \end{cases} \tag{3}$$

ここで $\tilde{c} \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$, $\tilde{a} \in \mathrm{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ は定行列である. 特に $\tilde{c} = 0$ のとき, $h(s)$ は次の方程式をみたす.

$$(h^{-1}h')' + 2(\tilde{a}\,{}^t\tilde{a})h = 0.$$

Proof. $\mathcal{L}$ の E-L 方程式を求めると以下が得られる.

$$\begin{cases} h: \quad (h^{-1}h')' = -2h^{-1}n_1'\,{}^t n_1' + 4h^{-1}mh^{-1}m, \\ n_1: \quad (h^{-1}n_1' - h^{-1}mh^{-1}n_1)' = h^{-1}mh^{-1}n_1', \\ n_2: \quad (h^{-1}mh^{-1})' = 0. \end{cases}$$

第三式は積分できて

$$h^{-1}mh^{-1} = \tilde{c}\ (\text{定行列}), \quad \tilde{c} \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$$

となる. これを上の 2 式に代入して,

$$\begin{cases} h: \quad (h^{-1}h')' = -2h^{-1}n_1'\,{}^t n_1' + 4\tilde{c}h\tilde{c}h, \\ n_1: \quad (h^{-1}n_1')' - 2(\tilde{c}n_1)' = 0 \end{cases}$$

となる. 第二式も積分できて

$$h^{-1}n_1' - 2\tilde{c}n_1 = \tilde{a}\ (\text{定行列}), \quad \tilde{a} \in \mathrm{M}_{n,r}(\mathbb{R})$$

となる. 特に $\tilde{c} = 0$ の場合は $h^{-1}n_1' = \tilde{a}$ となり, これを第一式に代入すると方程式

$$h : (h^{-1}h')' = -2(\tilde{a}\,{}^t\tilde{a})h$$

が得られる.

□

■定行列 $\tilde{a}, \tilde{c}$ について　以下, $\mathfrak{p}(J)$ の一般の元 B を以下のように表す.

$$B = B(b, a, c) := \begin{pmatrix} b & a & c \\ {}^t a & 0 & -{}^t a \\ {}^t c & -a & -b \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} b \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \\ a \in \mathrm{M}_{n,r}(\mathbb{R}), \\ c \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}). \end{array}$$

命題 2.2. *$D(J)$ 上の測地線*

$$u(s) = \pi(e^{sB})u_0, \quad B = B(b, a, c) \in \mathfrak{p}(J)$$

に対して, 式 (2) から定まる変数 $h(s), n_1(s), n_2(s)$ は $\tilde{c} = c/2$, $\tilde{a} = -a$ としたときの方程式 (3) をみたす. 特に $c = 0$ のとき, $h(s)$ は次の方程式をみたす.

$$(h^{-1}h')' + 2(a\,{}^t a)h = 0.$$

Proof. $D(J)$ 上の測地線

$$u(s) = \pi(e^{sB})u_0, \quad B = B(b,a,c) \in \mathfrak{p}(J)$$

をとる. $u(s)$ は $D(J)$ の測地線方程式をみたすので, 式 (2) から定まる変数 $h(s), n_1(s), n_2(s)$ は, ある定行列 $\tilde{c}, \tilde{a}$ が存在して方程式 (3) をみたす. いま, 式 (2) の表示を

$$u(s) = \pi(NA^{1/2})u_0, \quad N = \begin{pmatrix} I_n & -n_1 & {}^t n_2 \\ 0 & I_r & {}^t n_1 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}h & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & 2h^{-1} \end{pmatrix}$$

と書く. このとき, ある $K \in \mathcal{K}(J)$ があって

$$e^{sB} = NA^{1/2}K$$

となる. よって

$$e^{2sB} = (NA^{1/2}K){}^t(NA^{1/2}K) = NA{}^tN$$

となるので, B は

$$2B = (e^{2sB})'e^{-2sB} = NA{}^tN'{}^tN^{-1}A^{-1}N^{-1} + NA'A^{-1}N^{-1} + N'N^{-1} \tag{4}$$

と表される. ここで右辺は次の形に計算される.

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -2{}^t n_1' h^{-1} + 4{}^t n_1 h^{-1}{}^t m h^{-1} & * & * \\ 4h^{-1}{}^t m h^{-1} & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ -2{}^t\tilde{a} & * & * \\ 4{}^t\tilde{c} & * & * \end{pmatrix}.$$

従って (4) から $\tilde{c} = c/2$, $\tilde{a} = -a$ となる. □

■$B = B(b,a,0)$ の特徴づけ

補題 2.4. $B(b,a,c) \in \mathfrak{p}(J)$ に対し, 次のテイラー展開が成り立つ:

$$\Delta\left(w, \pi(e^{sB})w\right) = -cs + \left(a{}^t a - bc - cb\right)\frac{s^2}{2} + O(s^3).$$

Proof. 定義より

$$\Delta\left(w, \pi(e^{sB})w\right) = {}^t W J e^{sB} W \gamma(e^{sB}, w)^{-1}, \quad W = \begin{bmatrix} w \\ I_n \end{bmatrix}$$

となる. 指数行列 e^{sB} のテイラー展開より,

$$\begin{aligned} {}^t W J e^{sB} W &= {}^t W J W + {}^t W J B W s + {}^t W J B^2 W \frac{1}{2} s^2 + O(s^3) \\ &= -cs + (a{}^t a - bc + cb)\frac{s^2}{2} + O(s^3), \\ \gamma(e^{sB}, w) &= {}^t W e^{sB} W \\ &= {}^t W W + {}^t W B W s + O(s^2) \\ &= I_n - bs + O(s^2) \end{aligned}$$

である. 従って次が得られる.

$$\begin{aligned}\Delta\left(w, \pi(e^{sB})w\right) &= \left\{-cs + \left(a^t a - bc + cb\right)\frac{s^2}{2} + O(s^3)\right\}\left\{I_n + bs + O(s^2)\right\} \\ &= -cs + \left(a^t a - bc - cb\right)\frac{s^2}{2} + O(s^3).\end{aligned}$$

□

命題 2.2 および補題 2.4 より定理 2.1 が従う. □

2.3 双曲線関数による解の明示式

任意の $B \in \mathfrak{p}(J)$ をとる. B は

$$B = {}^tA\begin{pmatrix} 0 & {}^tC \\ C & 0 \end{pmatrix}A, \quad C \in \mathrm{M}_{n+r,n}(\mathbb{R}), \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_n & 0 & -I_n \\ 0 & \sqrt{2}I_r & 0 \\ I_n & 0 & I_n \end{pmatrix}$$

と表される. 部分行列 C の特異値分解を以下のようにとる.

$$C = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_2 & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}{}^tq,$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_2 & p \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n+r), \quad q \in \mathrm{O}(n), \quad \sigma = \mathrm{diag}(\sigma_i)_{i=1}^n \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

$s \in \mathbb{R}$ の関数として次を定める.

$$\mathrm{ch}(s\sigma) = \frac{1}{2}(e^{s\sigma} + e^{-s\sigma}), \quad \mathrm{sh}(s\sigma) = \frac{1}{2}(e^{s\sigma} - e^{-s\sigma}).$$

命題 2.3 (I. [6]). $B \in \mathfrak{p}(J)$ に対して, p, q, σ を上のように定める. このとき,

$$h(s) = \Delta\left(\pi(e^{sB})u_0\right)$$

で定まる $h(s)$ は次の表示を持つ.

$$h(s) = 2\left(\boldsymbol{e}(s)^t\boldsymbol{e}(s)\right)^{-1}, \quad \boldsymbol{e}(s) = p\mathrm{sh}(s\sigma) - q\mathrm{ch}(s\sigma).$$

Proof. 特異値分解から

$$B = {}^tAP\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}{}^tPA, \quad P := \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & p_3 \\ 0 & p_2 & p \end{pmatrix}$$

となる. よって $\boldsymbol{e}(s) = p\mathrm{sh}(s\sigma) - q\mathrm{ch}(s\sigma)$ とおけば,

$$e^{sB}\begin{bmatrix} u_0 \\ I_n \end{bmatrix} = {}^tAP\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(s\sigma) & 0 & \mathrm{sh}(s\sigma) \\ 0 & I_r & 0 \\ \mathrm{sh}(s\sigma) & 0 & \mathrm{ch}(s\sigma) \end{pmatrix}{}^tPA\begin{bmatrix} -I_n \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ \boldsymbol{e}(s) \end{bmatrix}{}^tq$$

となる. 従って $\gamma(e^{sB}, u_0) = \boldsymbol{e}(s)^tq$ であるので, 補題 2.1 より

$$\Delta\left(\pi(e^{sB})u_0\right) = 2\left(\boldsymbol{e}(s)^t\boldsymbol{e}(s)\right)^{-1}$$

となり, 主張の式が得られる. □

Remark 2.1. 情報幾何において n 次元の正規分布族から定まる統計多様体の測地線方程式は, $\Sigma(s) \in \mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$, $\mu(s) \in \mathbb{R}^n$ の微分方程式

$$\begin{cases} \ddot{\Sigma} - \dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\Sigma} + \dot{\mu}{}^t\dot{\mu} = 0, \\ \ddot{\mu} - \dot{\Sigma}\Sigma^{-1}\dot{\mu} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

で与えられる. ここで $h = \Sigma$ とおいて μ を消去すると行列値 Bratu 方程式 (1) が得られる. さらに (5) の解を指数行列から構成する方法 (Eriksen[3]) が知られているが, その $\Sigma(s)$ の構成は本稿の定理 2.1 で BD I 型対称領域 $D(J)$ を同相な領域

$$M = \left\{S \in \mathrm{Sym}_{2n+r}^+(\mathbb{R});\ JSJ = S^{-1}\right\} \cong D(J)$$

に置き換えて得られる構成と一致する. また (5) の解 $\Sigma(s)$ の双曲線関数による明示式 ([1, 5]) も知られているが, これは命題 2.3 の明示式と一致する.

C I 型対称領域 $D \cong \mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})/\mathrm{U}(n)$ に対しても定理 2.1 と同様の結果が得られ, $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$-値関数 $h(s)$ の方程式

$$(h^{-1}h')' + (\lambda h)^2 = 0, \quad \lambda \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$$

が導出される ([6]).

参考文献

[1] M. Calvo and J. M. Oller. An explicit solution of information geodesic equations for the multivariate normal model. *Statist. Decisions*, 9(1-2):119–138, 1991.

[2] D. G. Crowdy. General solutions to the 2D Liouville equation. *International Journal of Engineering Science*, 35(2):141–149, 1997.

[3] P. S. Eriksen. Geodesics connected with the Fisher metric on the multivariate normal manifold. In *Proceedings of the GST Workshop, Lancaster 1987*, pp. 225–229, 1987.

[4] J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q.-k. Lu, and G. Roos. *Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains*. No. v. 185 in Progress in mathematics. Birkhäuser, 2000.

[5] T. Imai, A. Takaesu, and M. Wakayama. Remarks on geodesics for multivariate normal models. *Jour. Math-for-Industry*, 3(B-6):125–130, 2011.

[6] H. Inoue. Matrix-valued Bratu equation associated with the symmetric domains of type BDI and CI. *arXiv*, 2005.11639, 2020.

[7] A. N. Leznov and M. V. Saveliev. Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations $x_{\alpha,z\bar{z}} = \exp(kx)_\alpha$ and its integrability. *Lett. Math. Phys.*, 3(6):489–494, 1979.

[8] T. Sakajo. Exact solution to a Liouville equation with Stuart vortex distribution on the surface of a torus. *Proc. A.*, 475(2224):16,20180666, 2019.

[9] 鈴木貴, 大塚浩史. 楕円型方程式と近平衡力学系 ; 上. 朝倉書店, 2015.