離散 Laplace 作用素の本質的自己共役性

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
井上敦史 (Atsushi INOUE)

概要

本稿では, 無限グラフにおける離散 Laplace 作用素の本質的自己共役性を調べる．まず limit point-limit circle 理論を離散化し, 測度付き $\mathbb{Z}$ 上の Sturm-Liouvile 型の作用素 (離散 Laplace 作用素を含む) を特徴づける（定理 7)．その特徴づけを用いて, Cauchy 境界の Minkowski codimension と本質的自己共役性の関係を調べる (例 8)．また Laplace 作用素の本質的自己共役性は, 特定の条件下でグラフを変形しても安定的であることをみる (定理 9).

1 導入

自己共役作用素はエルミート行列に対応する線型作用素であり, よい性質をもつ．具体的には実スペクトルのみからなり, さらにスペクトル分解が行える．スペクトル分解を用いて自己共役作用素の “関数” が定義され, 偏微分方程式や確率論の対象を考察できるようになる [5]．一般に, 与えられた作用素の自己共役性を確認することは容易でなく, 通常適当な定義域上で対称作用素であることしかわからない．そこで作用素の定義域を適切に拡大し自己共役作用素にできないか, という自然な問いが発生する．対称作用素の自己共役拡大がただ一つである時, その作用素は本質的に自己共役であるという.

Riemann 多様体 (M, g) 上の Laplace 作用素 (Laplace-Beltrami 作用素) は, 定義域を $C_c^\infty(M)$(コンパクト台付き C^∞ 級関数全体) に制限すると対称作用素になる．自己共役拡大の存在は quadratic form の一般論から保証され, Riemann 多様体が完備であれば本質的自己共役になることも知られている [3, 12]．非完備 Riemann 多様体の場合は, 特別な場合を除いて筆者の知る限り決定的な特徴づけは知られていない．U. Boscain-D. Prandi は, （頂点に特異性がある）円錐形の曲面について本質的自己共役性を考察した [2].

グラフ上の Laplace 作用素についても多くの研究がある ([6] とその文献を参照)．グラフには自然な距離が定義されるが, この距離の下では Riemann 多様体の場合の研究 [3, 12] の類似は成立しない (Example 8)．そこで [6] は, intrinsic metric のもとで完備ならば, Laplace 作用素は本質的に自己共役であることを示した．さらに非完備な場合も, Cauchy 境界の Minkowski codimension と Markov 拡大の一意性について決定的な研究を行った.

本稿では, 次の二つの結果を紹介する：

(1) Weyl の limit point-limit circle 理論の離散化.
(2) 本質的自己共役性の安定性.

(1) は $\mathbb{Z}$ 上の Sturm-Liouville 型の作用素 (Laplace 作用素を含む) の本質的自己共役性を完全に特徴づける理論である．H. Weyl による一次元区間の研究 [14] に端を発し, 精密化や離散化の研究は数多く存在する ([1, 13, 15] とその文献を参照)．本稿の主結果の特徴は, 測度付き $\mathbb{Z}$ でも理論が展開できるところにある (定理 7)．本稿ではこの定理を用いて, Cauchy 境界の Minkowski codimension と本質的自己共役性の関係を表す興味深い例を紹介する．この例は非完備 Riemann 多様体の場合の研究 [2] や Markov 拡大の研究 [6] に対応すると考えられる．(2) で述べた安定性は, 特定の性質が部分グラフで成立する時に, 全体グラフでも成立するか, という意味合いである．本稿では本質的自己共役性について得られた結果を紹介する (定理 9)．本稿の内容は, 筆者の準備中の論文 [7] と正宗淳氏 (北海道大学), R. Wojciechowski 氏 (The City University of New York) との共同研究 [8] に基づく．

2 基本的な設定と既知の結果

2.1 Weighted graph と離散 Laplace 作用素

[6] に基づいて概念を準備する．X は高々可算な集合とする．$b : X \times X \to [0, \infty)$ は対称かつ $b(x, x) = 0$ を満たす関数とする．二項関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff b(x, y) > 0$$

と定義する．$x \sim y$ ならば点 x, y の間に辺があると考える．b は辺に与えられた "重み" と理解できる．X 上の正値関数 $m : X \to (0, \infty)$ を一つ固定する．m は X 上の正値 Radon 測度と理解できる．(X, b, m) の三つ組を weighted graph と呼ぶ.

次に関数空間を導入する．$C(X), C_c(X)$ を次で定義する：

$$C(X) = \{u : X \to \mathbb{C}\}, \quad C_c(X) = \{u \in C(X) \,|\, u \text{ は有限個の点をのぞいて } 0\}.$$

先ほどの考察から, weighted graph (X, b, m) は測度空間と思える．そこで Lebesgue 空間 $\ell^2(X, m)$ はいつも通り定義される：

$$\ell^2(X, m) := \{u \in C(X) \,|\, \sum_{x \in X} |u(x)|^2 m(x) < \infty\}, \quad (u, v) = (u, v)_{\ell^2(X,m)} = \sum_{x \in X} u(x)\overline{v(x)} m(x).$$

$C_c(X)$ は $\ell^2(X, m)$ において稠密であることに注意する.

最後に離散 Laplace 作用素を定義する．離散 Laplace 作用素を各点で定義するためには, (X, b, m) の局所有限性が必要である．すなわち deg が各点で有限値を取る時に, (X, b, m) は局所有限であるという．局所有限性は $\deg \in \ell^\infty(X, m)$ とは異なることに注意する．$u \in C(X)$ について $\Delta u \in C(X)$ を次で定義する：

$$(\Delta u)(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in X} b(x, y)(u(x) - u(y)), \quad x \in X.$$

Δ を離散 Laplace 作用素または単に Laplace 作用素と呼ぶ.

2.2 主問題

$\ell^2(X, m)$ 上の線型作用素 L_c を $L_c = \Delta|_{C_c(X)}$ と定義する．$C_c(X)$ は $\ell^2(X, m)$ において稠密だから, L_c は稠密に定義された作用素である．さらに, L_c は非負対称作用素である (例えば [6] を参照).

したがって L_c は稠密に定義された非負対称作用素であり, その閉包を L とかく.

自己共役性の問題

L_c は自己共役拡大をもつか？自己共役拡大を持つならば, それは一意的か？ L_c の自己共役拡大が一意的な場合, L_c は本質的に自己共役であるという.

L_c は非負対称作用素だから, quadratic form の一般論から Friedrichs 拡大と呼ばれる拡大を持つ. よって L_c の本質的自己共役性が本稿のテーマである. L_c の本質的自己共役性と L の自己共役性は同値であることに注意する.

2.3 Intrinsic distance と本質的自己共役性

ここでは intrinsic metric の定義と [6] の結果を紹介する. まず対称な関数 $\sigma : X \times X \to [0,\infty)$ を考える. ただし $\sigma(x,y) > 0$ となるのは $x \sim y$ の時で, その場合に限る. 擬距離 $d = d_\sigma : X \times X \to [0,\infty)$ を

$$d_\sigma(x,y) = \inf_{x_0=x, x_n=y} l_\sigma((x_0,\ldots,x_n)), \quad l_\sigma((x_0,\ldots,x_n)) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(x_i, x_{i+1})$$

と定義する. d_σ は path pseudo metric と呼ばれる. $d = d_\sigma$ が intrinsic であるとは,

$$\frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \in X} w(x,y) d_\sigma(x,y)^2 \le 1 \quad \text{for all } x \in X$$

を満たす時にいう.

例 1. $\sigma : X \times X \to [0,\infty)$ を

$$\sigma(x,y) = b(x,y)^{-1/2} \min\left\{\frac{m(x)}{\deg x}, \frac{m(y)}{\deg y}\right\}^{1/2}$$

とおく. この時 d_σ は intrinsic path metric になる. 一方 $\sigma' \equiv 1$ の場合, $d_{\sigma'}$ は intrinsic とは限らない.

定理 2 (X. Huang, M. Keller, J. Masamune, R. Wojciechowski, J. Funct. Anal., 2013)**.** *ある intrinsic path metric $d = d_\sigma$ が存在して, (X,d) が距離空間として完備と仮定する. この時 $L_c = \Delta|_{C_c(X)}$ は本質的に自己共役になる.*

証明は Stricharz [12] の離散版である. つまり $\lambda < 0$ に属する Δ の固有関数が 0 となることを証明するのである.

次に Cauchy 境界の Minkowski codimention と Markov 拡大の一意性に関する結果を紹介する. Markov 拡大とは, 自己共役拡大であって関連する quadratic form が Dirichlet form の時にいう. 距離空間 (X,d) の完備化を $(\overline{X},\overline{d})$ と書き, Cauchy 境界 $\partial_C X$ を $\partial_C X = \overline{X} \setminus X$ で定義する. [4,6] に基づき $\overline{\mathrm{codim}_M}(\partial_C X)$ を

$$\overline{\mathrm{codim}_M}(\partial_C X) := \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mu(B_r(\partial_C X))}{\log r}, \quad B_r(\partial_C X) = \{x \in X \mid \inf_{y \in \partial_C X} \overline{d}(x,y) \le r\}$$

で定義する．ただし μ は X 上の測度である．次の Theorem は [6, Theorem 3, 4] を合わせることで導かれる．

定理 3 (X. Huang, M. Keller, J. Masamune, R. Wojciechowski, J. Funct. Anal., 2013)**.** *$d = d_\sigma$ は intrinsic path metric とする．もし $\overline{\mathrm{codim}}_M(\partial_C X) > 2$ ならば, $L_c = \Delta|_{C_c(X)}$ はただ一つの Markov 拡大をもつ．*

3　主結果

3.1　Limit point-limit circle 理論の離散版

$X = \mathbb{Z}$ とし weighted graph (X, b, m) を考える．ただし $b(x, y) > 0$ となるのは $|x - y| = 1$ の場合で, その時に限る．$V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}$ について次の差分方程式を考える：

$$\mathcal{L}u := (\Delta + V/m)u = \lambda u. \tag{1}$$

定義 4. $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ が ∞ の近くで $\ell^2(X, m)$ の元であるとは, $\sum_{x=0}^{\infty} |u(x)|^2 \mu(x) < \infty$ の時にいう．$-\infty$ についても同様に定義する．

定義 5. $\mathcal{L}$ が ∞ において limit circle の状況にあるとは, ある $\lambda \in \mathbb{C}$ について, (1) のすべての解が ∞ の周りで ℓ^2 の元である時にいう．$\mathcal{L}$ が ∞ において limit circle の状況にない時, $\mathcal{L}$ は ∞ において limit point の状況にあるという．$-\infty$ についても同様に定義する．

次の定理は一次元区間の場合, Weyl's alternative と呼ばれるものである．証明は [10, 11] の離散版である．この定理より, $\mathcal{L}$ が ∞ において limit circle の状況にある必要十分条件は, ある $\lambda \in \mathbb{C}$ と (1) の解 u が存在して, u が ∞ の周りで ℓ^2 の元でないことである．

定理 6 (A. Inoue, 2020)**.** *ある $\lambda \in \mathbb{C}$ について (1) の解が全て ∞ の周りで ℓ^2 の元とする．この時任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について, (1) の解は全て ∞ の周りで ℓ^2 の元である．$-\infty$ についても同じ主張が成立する．*

定理 7 (A. Inoue, 2020)**.** *$L = \overline{L_c}$ が自己共役である必要十分条件は, $\mathcal{L}$ が ∞ および $-\infty$ において limit point の状況にあることである．*

定理の証明は, [10, 11] の離散版である．端的にいうと, 差分方程式の一般論を用意して, その後不足指数と von Neumann の公式を用いながら証明する．連続モデルの場合と異なるところが一箇所ある．そこでは $\mathbb{Z}$ の b, m を調整し, 左半分の intrinsic metric を有限にするのである．この操作は, [10, 11] における $\mathbb{R}$ を $(a, \infty), a \in \mathbb{R}$ に置き換える操作に対応する．

例 8 (Minkowski codimension と本質的自己共役性)**.** $X = \mathbb{Z}, b(x, x + 1) = 2^{-x}$ とする．$\alpha \in (1, \infty)$ について測度を $m_\alpha(x) = 2^{-\alpha x}$ で定義する．直接計算により, L_c が本質的自己共役になるのは $\overline{\mathrm{codim}}_M(\partial_C \mathbb{Z}) \geq 4$ の時で, その場合に限ることを示す．(X, b, m_α) はいかなる intrinsic metric についても非完備であることに注意する．よって [6] の Theorem を適用できない．直接計算（差分方程式

を解く）と Theorem 7 により, L_c が本質的自己共役になる必要十分条件は $\alpha \leq 2$ であることがわかる [7].

次に Cauchy 境界の Minkowski codimension を計算する. $\sigma_\alpha : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to [0, \infty)$ を

$$\sigma_\alpha(x) := w(x)^{-1/2} \min\{m_\alpha(x)/2, m_\alpha(x+1)/2\}^{1/2} = C2^{\frac{1-\alpha}{2}x}$$

で定義する. d_{σ_α} の下では, $\partial_C\mathbb{Z}$ は一点 (p_R と書く) からなることに注意する. $r(x) := \overline{d}(x, p_R)$ とおくと,

$$r(x) = C\sum_{y=x}^{\infty} 2^{\frac{1-\alpha}{2}y} = C'2^{\frac{1-\alpha}{2}x}, \quad C, C' \text{ は定数.}$$

ゆえに

$$m_\alpha(B_{r(x)}(p_R)) = \sum_{y=x}^{\infty} 2^{-\alpha y} = \frac{2^{-\alpha x}}{1-2^{-\alpha}} = C''(r(x))^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}, \quad C'' \text{ は定数.}$$

よって

$$\frac{\log m_\alpha(B_{r(x)}(p_R))}{\log r(x)} = \frac{\frac{2\alpha}{\alpha-1}\log r(x) + \log C''}{\log r(x)} \to \frac{2\alpha}{\alpha-1} \quad \text{as} \quad x \to \infty$$

を得る. これは $\overline{\mathrm{codim}}_M(\partial_C\mathbb{Z}) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$ を導く.

以上の考察をまとめると, (X, b, m_α) において L_c が本質的自己共役になるのは, $\overline{\mathrm{codim}}_M(\partial_C\mathbb{Z}) \geq 4$ の時で, その場合に限る. この例は Riemann 多様体の場合の研究 [2, 9] および離散 Laplace 作用素の Markov 拡大の研究 [6] に対応していると考えられる.

3.2　本質的自己共役性の安定性

(X, b, m) を weighted graph とする. X_1 を X の部分グラフとし, $X_2 = (X_1)^c$ とおく. さらに $X_3 = \partial X_1 \cup \partial X_2$ とおき, $b' : X_3 \times X_3 \to \mathbb{R}$ を次で定義する：

$$b'(x, y) = \begin{cases} b(x, y) & x \in \partial X_1, y \in \partial X_2 \\ b(x, y) & x \in \partial X_2, y \in \partial X_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

ただし $\partial X_1 = \{x \in X_1 \mid \exists y \in X_2, x \sim y\}$ である (∂X_2 も同様). (X_3, b', m) もまた weighted graph になる.

Δ_i は X_i 上の Laplace 作用素を表し, $L_{c,i} = \Delta_i|_{C_c(X_i)}$ とする. この設定の下で, 条件 (A) を定義する：

(A) : $L_{c,3}$ は $\ell^2(X_3, m)$ 上で有界作用素になる.

例えば, X_3 が有限集合ならば (A) は成立する.

定理 9 (A. Inoue, J. Masamune, R. Wojciechowski)**.** 条件 *(A)* を仮定する. 次は同値.

(1) L_c が $\ell^2(X, m)$ において本質的自己共役である.

(2) $i = 1, 2$ について, $L_{c,i}$ が $\ell^2(X_i, m)$ において本質的自己共役である.

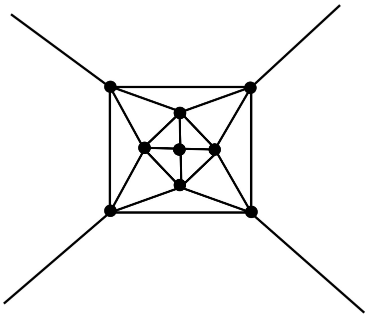

図 1　全体グラフ X

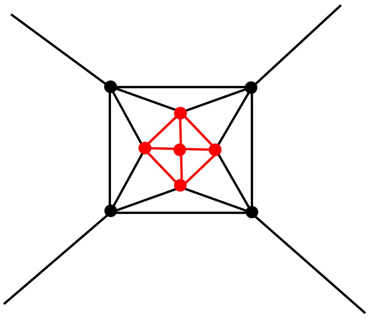

図 2　部分グラフ X_1

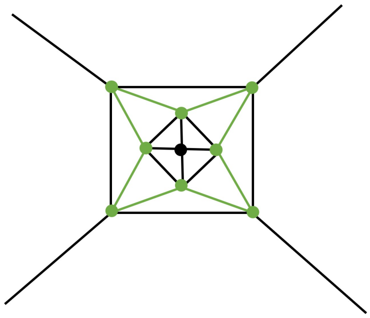

図 3　X_3

例 10 (A. Inoue, J. Masamune, R. Wojciechowski)**.** 条件 (A) を仮定しない場合, 安定性が成立しないことがある．次の図のような weighted graph (X, b, m), $X = \mathbb{N}_0 \cup \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える．

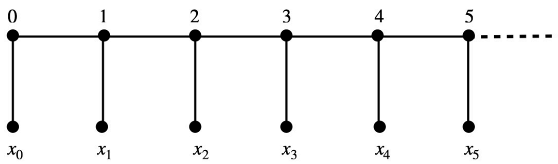

図 4　(X, b, m)

例えば,

$$b \equiv 1 \,\text{on}\, X, \quad m(x) = \begin{cases} 2^{-i} & x = i \\ 1 & x = x_i \end{cases},$$

とおけば, 部分グラフ $\mathbb{N}_0$ 上の Laplace 作用素は本質的に自己共役でないが, 全体グラフ (X, b, m) 上の Laplace 作用素は本質的に自己共役であることがわかる [8].

謝辞

本研究は, 株式会社くいんとによる支援「北海道大学大学院理学研究院数学部門均質化法・形状最適化法奨学支援金」を受けております．この場を借りて深く感謝いたします．

参考文献

[1] Kazuhiko Aomoto, *Self-adjointness and limit pointness for adjacency operators on a tree*, J. Anal. Math. **53** (1989), 219-232, DOI 10.1007/BF02793415.

[2] Ugo Boscain and Dario Prandi, *Self-adjoint extensions and stochastic completeness of the Laplace-Beltrami operator on conic and anticonic surfaces*, J. Diff. Eq. **260** (2016), 3234-3269.

[3] Paul R. Chernoff, *Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations*, J. Funct. Anal. **12** (1973), 401–414.

[4] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, 2nd ed.*, John Wiley & Sons Inc., 2003.

[5] Alexander Grigor′yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 47, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.

[6] Xueping Huang, Matthias Keller, Jun Masamune, and Radosław K. Wojciechowski, *A note on self-adjoint extensions of the Laplacian on weighted graphs*, J. Funct. Anal. **265** (2013), no. 8, 1556–1578, DOI 10.1016/j.jfa.2013.06.004.

[7] Atshushi Inoue, *Essential self-adjointness of the Sturm-Liouville operator on the weighted integers. Manuscript in preparation.*

[8] Atsushi Inoue, Jun Masamune, and Radosław K. Wojciechowski, *Characterization and stability of the essential self-adjointness of discrete Laplacians. Manuscript in preparation.*

[9] Jun Masamune, *Essential self-adjointness of Laplacians on Riemannian manifolds with fractal boundary*, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), no. 3-4, 749–757, DOI 10.1080/03605309908821442.

[10] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. MR0493420

[11] Konrad Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*, Springer Netherlands, 2012.

[12] Robert S. Strichartz, *Analysis of the Laplacian on the complete Riemannian manifold*, J. Funct. Anal. **52** (1983), no. 1, 48–79, DOI 10.1016/0022-1236(83)90090-3.

[13] Gerald Teschl, *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*, Amer. Math. Soc., 2000.

[14] Hermann Weyl, *Über gewhnliche Differentialgleichungen mit Singularitten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen*, Math. Ann. **68** (1910), 220–269, DOI 10.1007/BF01474161.

[15] Anton Zettl, *Sturm–Liouville Theory*, Amer. Math. Soc., 2005.