

XXZ 鎖の two down-spin sector の完全性と Bethe 量子数

無所属

井元 隆史 (Takashi IMOTO)

概要

$S=1/2$ の XXX 鎖および XXZ 鎖の Hamiltonian の固有ベクトルを構成する方法として Bethe 仮設が知られている。Bethe 仮設では Bethe 仮設方程式と呼ばれる方程式を解くことによって Hamiltonian の固有値、固有ベクトルを構成することができる。しかし、一般には Bethe 仮設方程式を解くことは非常に困難で 2020 年現在では解かれてはいない。今回我々は massive 領域の XXZ 鎖の two down-spin セクターにおける Bethe 量子数を全て求めた。また、このことによってセクターにおける完全性を示した。本稿では massive XXZ 鎖の two down spin セクターの Bethe 仮設方程式の解について紹介する。また、本研究は出口哲生氏、佐藤純氏との共同研究である。

1 導入

一般に量子多体系を解析的に計算することは非常に困難である。また、数値計算を用いても計算量がサイト数に応じて指数関数的に増えるので大きな系を計算することは非常に困難である。その中で、全ての固有値、固有ベクトルを計算できる量子系の模型として次元量子可積分系がある。今回は代表的な量子可積分系の模型である XXX 鎖および XXZ 鎖に着目する。量子可積分系の解析方法として Bethe 仮設がある [1]。Bethe 仮設は模型に対応する Bethe 仮設方程式と呼ばれる方程式を導出し、これを解くことによって固有値や固有ベクトルを厳密に求めるというものである。ただし、一般に Bethe 仮設方程式を解くことは非常に困難であり、現在でも厳密には解けていない。一方で、1971 年に高橋は string 仮説と呼ばれる仮定を Bethe 仮設方程式の解に課すことによって自由エネルギーを計算した [2, 3]。ただし、この string 仮説は XXX 鎖および、massless 領域の XXZ 鎖では破れていることが知られている。Bethe 仮設方程式を数値的に解く方法として、対数形式の Bethe 仮設方程式が知られている [4]。ここで、Bethe 量子数という値によって対数関数の分岐を指定する。Bethe 仮設方程式の解の形ごとの Bethe 量子数を得ることができると数値的には Bethe 仮設方程式の解を求めることができる。対数形式の Bethe 仮設方程式の厳密な Bethe 量子数は XXX 鎖の場合には down-spin が二つの場合に出口-Giri によって全て求められている [5]。down-spin が二つの場合には Bethe 仮設方程式の解は実数が二つのペアである実解と共役な複素数のペアからなる複素解の二つのに分類されることが知られている [6]。XXX 鎖ではサイト数 N を増やしていくと string 仮設で予想される複素解が実解になることが Essler, Korepin, Schoutens によって 1992 年に発見されている [7]。この現象は collapse と呼ばれていて、XXX 鎖でサイト数に

応じて collapse が起こるペアの数および対応する Bethe 量子数が全て求められている [5]。また、two-down spin セクターの XXZ 鎖における Bethe 仮設方程式の完全性も高麗-江沢によって証明されている [8]。

今回、我々は XXX 鎖に異方性パラメータを入れた XXZ 鎖の massive 領域に注目する。XXX 鎖の場合と同様に解が二つの実数から構成される実解と共役な複素数のペアで構成される複素解に分けることができる。我々は実解、複素解それぞれについての Bethe 量子数を求めて解の完全性を示した。加えて massive XXZ 鎖でも collapse の条件が起こることを求めた。また、XXX 鎖の場合ではみられなかった、string 仮設では実解と予想されていた解が複素解になる現象を発見し、この解を extra-two-string 解と呼ぶことにした [9, 10]。

2 XXZ 鎖および XXX 鎖と Bethe 仮設方程式

本章では今回扱う XXZ 鎖および XXX 鎖と Bethe 仮設方程式を紹介する。

2.1 XXX 鎖と XXZ 鎖

周期境界条件の spin-1/2 の反強磁性 XXZ 鎖のハミルトニアン $H : \otimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2 \rightarrow \otimes_{k=1}^N \mathbb{C}^2$ を次のように定義する。

$$H := \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \left(\sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + \Delta (\sigma_k^z \sigma_{k+1}^z - 1_N) \right) \quad (1)$$

ただし、 Δ を異方性パラメータとし、スピン作用素 $\sigma^a (a = x, y, z)$ を

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

とし、 σ_k^a を

$$\sigma_k^a = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \sigma^a \otimes \cdots \otimes 1 \otimes 1 \quad (3)$$

とする。ただし、 σ^a は k 番目とする。XXZ 鎖の相互作用の異方性の度合いをパラメータ Δ で表す。 $\Delta = 1$ の等方的な場合には XXX 鎖に相当する。 $|\Delta| < 1$ の場合には基底状態と励起状態の間にギャップがないことが知られている。この場合を massless 領域と呼ばれている。一方で $\Delta > 1$ の場合には、励起状態と基底状態の間に有限の値のギャップを持つことが知られている。この場合を massive 領域と呼ばれている。

2.2 Bethe 仮設方程式

本節では、Bethe 仮説方程式と Bethe 仮説方程式の両辺に対数を取った対数形式をそれぞれ紹介する。量子化軸を z 方向に取ったとき、系の磁化は保存量であるため、解空間も磁化の値に応じ

て sector に分割される。そのなかで下向きスピンの数が M 個の sector を M-down-spin sector と呼ぶ。M-down-spin sector における Bethe 仮説方程式の解を $\{\lambda_j\}_{j=1,\dots,M}$ とする。

異方性ごとの XXZ 鎖に対応する Bethe 仮説方程式は次のように表記される。

- $\Delta = 1$ の場合：XXX 鎖、down-spin の数を M とする。

$$\left(\frac{\lambda_j + i/2}{\lambda_j - i/2}\right)^N = \prod_{k \neq j, k=1}^M \frac{\lambda_j - \lambda_k + i}{\lambda_j - \lambda_k - i} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (4)$$

となる。これを対数形式にすると

$$2 \tan^{-1}(2\lambda_i) = \frac{2\pi}{N} J_i + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M 2 \tan^{-1}(\lambda_i - \lambda_k) \quad (5)$$

となる。 J_i は対数関数の分岐を指定するものであり、Bethe 量子数と呼ばれる。

- $|\Delta| < 1$ の場合：massless-XXZ 鎖、down-spin の数を M とし、異方性パラメータを $\Delta = \cos \zeta$ とする。このとき、

$$\left(\frac{\sinh(\lambda_j + i\zeta/2)}{\sinh(\lambda_j - i\zeta/2)}\right)^N = \prod_{k \neq j, k=1}^M \frac{\sinh(\lambda_j - \lambda_k + i\zeta)}{\sinh(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (6)$$

となる。これを対数形式にすると、

$$2 \tan^{-1}\left(\frac{\tanh(\lambda_i)}{\tan(\zeta/2)}\right) = \frac{2\pi}{N} J_i + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M 2 \tan^{-1}\left(\frac{\tanh(\lambda_i - \lambda_k)}{\tan(\zeta)}\right) \quad (7)$$

となる。

- $|\Delta| > 1$ の場合：massive-XXZ 鎖、down-spin の数を M とし、異方性パラメータを $\Delta = \cos \zeta$ とする。このとき、

$$\left(\frac{\sin(\lambda_j + i\zeta/2)}{\sin(\lambda_j - i\zeta/2)}\right)^N = \prod_{k \neq j, k=1}^M \frac{\sin(\lambda_j - \lambda_k + i\zeta)}{\sin(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)} \quad (j = 1, 2, \dots, M) \quad (8)$$

となる。これを対数形式にすると、

$$2 \tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_i)}{\tanh(\zeta/2)}\right) = \frac{2\pi}{N} J_i + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M 2 \tan^{-1}\left(\frac{\tan(\lambda_i - \lambda_k)}{\tanh(\zeta)}\right) \quad (9)$$

となる。

Bethe 仮説方程式の解の性質として、1986 年に Vladimirov によって Bethe 仮説方程式の複素共役性:

$$\{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_M^*\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\} \quad (10)$$

を持つことが知られている [6]。Two-down-spin sector においては、上記の性質によって Bethe 仮説方程式の解の組は二つとも実数となる実解と、Hermite 共役の組となる複素解の二つのタイプの

解が存在する。XXX 鎖の two-down-spin sector ではサイト数を大きくすると string 仮説で予想される複素解が実解に潰れてしまう現象が起こることが Essler-Korepin-Schoutens によって報告されている [7]. この現象は collapse と呼ばれる. サイト数が大きくなると collapse する複素解の個数も増えていく. 具体的に two-down-spin sector においてサイト数と collapse する複素解の個数の具体的な関係は出口-Giri によって求められている [5].

3 主結果

本節では今回の主結果を紹介する。今回の結果は massive XXZ 鎖の Bethe 仮設方程式の Bethe 量子数を実解、複素解それぞれについて調べた。複素解については [9]、実解については [10] に導出がある。

まず Bethe 量子数を J_1, J_2 とする。次に Bethe 仮設方程式の複素解を

$$\lambda_1 = x - \frac{i}{2}\zeta - i\delta \quad (11)$$

$$\lambda_2 = x + \frac{i}{2}\zeta + i\delta \quad (12)$$

とおく。

このとき、実解、複素解に対応する Bethe 量子数はそれぞれ、以下のようになる。

1. 複素解

(a) wide pair ($\delta > 0$) の場合

Bethe 量子数 J_1 は以下を満たす

$$\frac{N}{4} - \frac{1}{2} < J_1 < \frac{N-1}{2} \quad \left(\text{ただし } \tan(x) > 0 \right), \quad (13)$$

$$-\frac{N+1}{2} < J_1 < -\frac{N}{4} - \frac{1}{2} \quad \left(\text{ただし } \tan(x) < 0 \right). \quad (14)$$

この場合の二つ目の Bethe 量子数は $J_2 = J_1 + 1$ となる。

(b) narrow pair(安定領域: $\tanh^2(\zeta/2) > \frac{1}{N-1}$) の場合

$$\frac{N}{4} \leq J_1 < \frac{N}{2} \quad \left(\text{ただし } \tan(x) > 0 \right), \quad (15)$$

$$-\frac{N}{2} < J_1 \leq -\frac{N}{4} \quad \left(\text{ただし } \tan(x) < 0 \right). \quad (16)$$

この場合の二つ目の Bethe 量子数は $J_2 = J_1$ となる。

(c) narrow pair(不安定領域: $\tanh^2(\zeta/2) \leq \frac{1}{N-1}$) の場合

$$\frac{N}{4} \leq J_1 < \frac{N}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{N - (1 + \tanh^2(\zeta/2))}{1 - (N-1) \tanh^2(\zeta/2)}} \right) \quad (\text{ただし } \tan(x) > 0), \quad (17)$$

$$-\frac{N}{2} < J_1 \leq -\frac{N}{4} \quad (\text{ただし } \tan(x) < 0). \quad (18)$$

この場合の二つ目の Bethe 量子数は $J_2 = J_1$ となる。(17) の

2. 実解

(a) Bethe 量子数 m が $m = 1, \dots, N-1$ であるとき

Bethe 量子数の組み (J_1, J_2) は以下を満たすもの全てとなる。

$$-\frac{N-2}{2} \leq J_1 < J_2 \leq \frac{N-2}{2} \quad (19)$$

この場合の二つ目の Bethe 量子数は $J_2 = J_1 + m$.

(b) Bethe 量子数 m が $m = 0$ であるとき

$J_1 = J_2$ の場合には collapse と extra two string 解を考慮する必要がある。この時の Bethe 量子数は

$$\frac{N}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{N - (1 + \tanh^2(\zeta/2))}{1 - (N-1) \tanh^2(\zeta/2)}} \right) \leq J_1 \leq \frac{N}{2} - \frac{1}{2} \quad (\text{ただし } \tan(x) > 0), \quad (20)$$

$$-\frac{N}{2} + \frac{1}{2} \leq J_1 \leq -\frac{N}{\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{N - (1 + \tanh^2(\zeta/2))}{1 - (N-1) \tanh^2(\zeta/2)}} \right) \quad (\text{ただし } \tan(x) < 0) \quad (21)$$

となる。ただし、 x は $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$ とする。この場合の二つ目の Bethe 量子数は $J_2 = J_1$ となる。

また、collapse が起こる条件、extra-two-string 解が出現する条件は以下のようになる。

Theorem 3.1. サイト数を N , 異方性パラメータ ζ が

$$\tanh^2(\zeta/2) < \frac{1 - (N-1) \tan^2(\pi(1+2m)/2N)}{(N-1) - \tan^2(\pi(1+2m)/2N)} \quad (22)$$

を満たすとき、 m 個の複素解のペアが collapse する。

Theorem 3.2. サイト数を N , 異方性パラメータ ζ が

$$\tanh^2(\zeta/2) > \frac{1 - (N-1) \tan^2(\pi/2N)}{(N-1) - \tan^2(\pi/2N)} \quad (23)$$

を満たすとき、extra-two string 解が出現する。

参考文献

- [1] H Bethe, et al. 71, 205. 1931.
- [2] Minoru Takahashi. One-dimensional heisenberg model at finite temperature. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 46, No. 2, pp. 401–415, 1971.
- [3] Minoru Takahashi. *Thermodynamics of one-dimensional solvable models*. Cambridge university press, 2005.
- [4] Rob Hagemans and Jean-Sébastien Caux. Deformed strings in the heisenberg model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 40, No. 49, p. 14605, 2007.
- [5] Tetsuo Deguchi and Pulak Ranjan Giri. Exact quantum numbers of collapsed and non-collapsed two-string solutions in the spin-1/2 heisenberg spin chain. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 49, No. 17, p. 174001, 2016.
- [6] Artem Alekseevich Vladimirov. Proof of the invariance of the bethe-ansatz solutions under complex conjugation. *Theoretical and Mathematical Physics*, Vol. 66, No. 1, pp. 102–105, 1986.
- [7] Fabian HL Essler, Vladimir E Korepin, and Kareljan Schoutens. Fine structure of the bethe ansatz for the spin-1/2 heisenberg xxx model. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 25, No. 15, p. 4115, 1992.
- [8] Tohru Koma and Hiroshi Ezawa. Completeness of the two-down-spin bethe states in the one-dimensional heisenberg model. *Progress of theoretical physics*, Vol. 78, No. 5, pp. 1009–1021, 1987.
- [9] Takashi Imoto, Jun Sato, and Tetsuo Deguchi. Exact regimes of collapsed and extra two-string solutions in the two down-spin sector of the spin-1/2 massive xxz spin chain. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 52, No. 3, p. 035203, 2018.
- [10] Takashi Imoto, Jun Sato, and Tetsuo Deguchi. The bethe solutions in the two down-spin sector of the spin-1/2 massive xxz spin chain. In preparation.