

# Calkin-Wilf tree と Stern-Brocot tree のクラスター双対性

名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻  
行田康晃 (Yasuaki GYODA)

## 概要

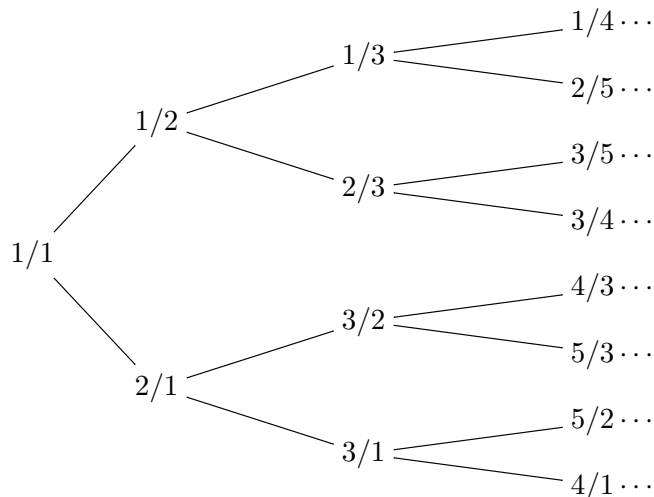
Calkin-Wilf ツリーと Stern-Brocot ツリーという 2 つの既約分数を頂点に持つ無限全二分木を、1 点付きトーラスのクラスター構造を用いて双対的な方法で構成できることをみる。

## 1 Calkin-Wilf ツリーと Stern-Brocot ツリー

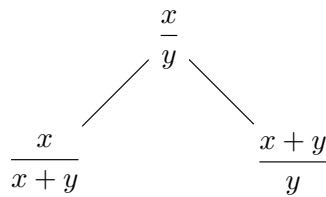
まず Stern-Brocot ツリーを定義する。まず次のツリーを考える：根として  $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}\right)$  を考え、 $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right)$  が次の 2 つの子を持つとする：2 番めに大きい分数が (i)  $\frac{a}{b}$ , (ii)  $\frac{c}{d}$ , (iii)  $\frac{d}{e}$  のとき、

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(i)} & \text{(ii)} & \text{(iii)} \\
 \begin{array}{c} \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \left(\frac{a}{b}, \frac{a+e}{b+f}, \frac{e}{f}\right) \quad \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}\right) \end{array} & \begin{array}{c} \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \left(\frac{c+e}{d+f}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) \quad \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}\right) \end{array} & \begin{array}{c} \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \left(\frac{c+e}{d+f}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) \quad \left(\frac{a}{b}, \frac{a+e}{b+f}, \frac{e}{f}\right) \end{array}
 \end{array}$$

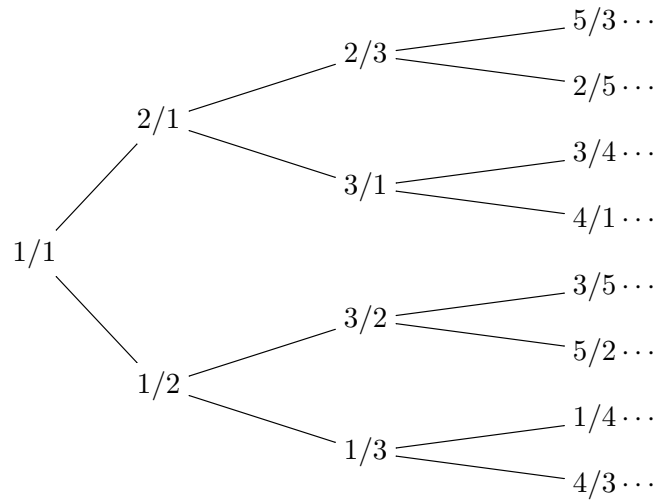
これを **Stern-Brocot トリプルツリー** と呼ぶ。Stern-Brocot ツリーは Stern-Brocot トリプルツリーの各頂点の 3 つの分数のうち真ん中の大きさ（ただし、 $1/0$  は他の任意の分数より大きいとする）の分数を抜き出したツリーとする。Stern-Brocot ツリーの最初の 7 つの頂点は次のようになる：



(ただし、ツリーを 90 度左に回転させている). 一方で, Calkin-Wilf ツリーは次のように定義される: 根を  $1/1$  として, 世代規則として  $x/y$  が次の子を持つとする:



Calkin-Wilf ツリーの最初の 7 つの頂点は次のようになる (ツリーを 90 度左に回転させている).

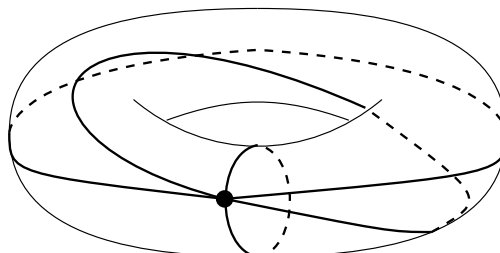


この 2 つのツリーは, 出てくる分数が既約分数であって重複がなく, 全ての正の有理数が 1 回ずつ現れるという特徴をどちらも持っている. その特徴から, 既約分数を効率良く数え上げるためのアルゴリズムとしても利用されている. 本講演では, この 2 つの分数のツリーを 1 点付きトーラスから定まるクラスター構造から構成できることをみる.

**注意 1.** 通常, この 2 つのツリーは子が左右どちらの位置にあるかまで考慮するが, 今回のセッティングでは左右は考慮せず, どの頂点とどの頂点が繋がれているかだけを考慮することとする.

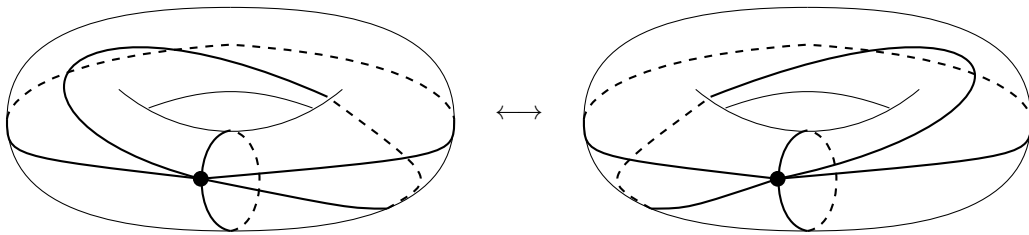
## 2 1 点付きトーラスの三角形分割が誘導するクラスター構造

トーラスに 1 点印をつけたものを用意し, トーラスをこの 1 点を頂点とするような三角形に分割することを考える. 以下の図にあるような分割が三角形分割の一例である.

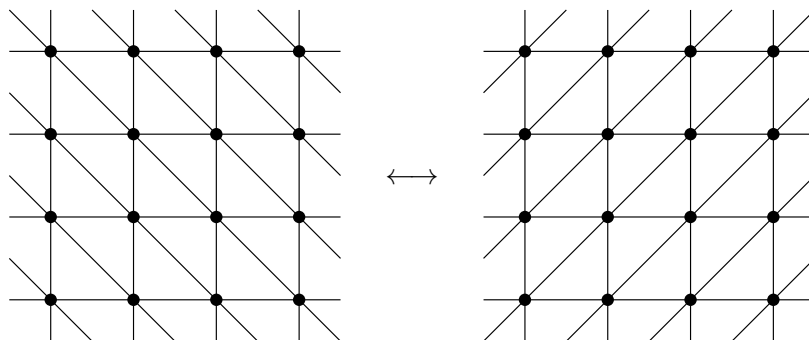


三角形分割  $L = (l_1, l_2, l_3)$  を 1 つとり固定する. 任意の三角形分割に含まれる弧  $l$  に対して, 交点ベクトルを  $F(L, l) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$  で定義する. ただし,  $f_i$  は  $l$  と  $l_i$  の端点を除く最小の交点数であるとする.

次に, 三角形分割のフリップという操作を定義する. 三角形分割  $M$  から新しい三角形分割  $M'$  を構成される弧を 1 つだけ入れ替えることによって構成する. これを (入れ替える辺に関する) フリップと呼ぶ. 以下の図はトーラスのフリップの一例である.



このままではどのように三角形分割が変化しているのか見えにくいので, 以降は普遍被覆上で見ることにする. うまく普遍被覆をとってくることで, 上の図の三角形分割のフリップは以下のような三角形分割の変換であることがわかる:

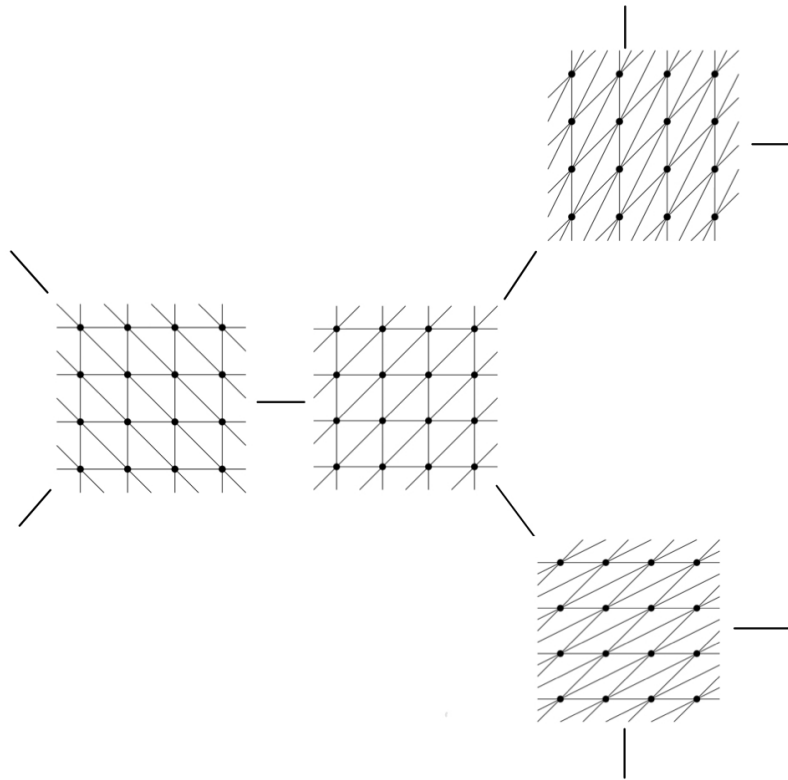


上のフリップの図において, それぞれの普遍被覆における全ての点はトーラス上での 1 点と同一視されることに注意する. フリップする辺ごとに異なる三角形分割が得られるので, フリップの仕方は一つの三角形分割につき 3 通りあることがわかる. また, 1 回フリップして変化した辺で続けてもう一回フリップすると元に戻ることも明らかである. このようにして三角形分割を任意の辺に関してフリップしていくと, ちょうど三角形分割をサイクルのない正則な三分木  $\mathbb{T}_3$  の頂点と対応させることができる. この  $\mathbb{T}_3$  の頂点集合から 1 点付きトーラスの三角形分割のなす集合への対応を 1 点付きトーラスの三角形分割から定まるクラスター構造と呼ぶことにする (図 1 を参照).

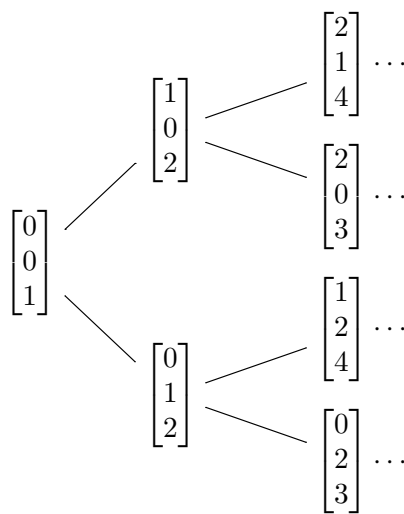
### 3 交点ベクトルツリーと初期交点ベクトルツリー

次に, トーラスの三角形分割がなすクラスター構造から交点ベクトルツリーと初期交点ベクトルツリーを定義する. まず, 1 点トーラス上の三角形分割  $L$  を 1 つ取る. ここで,  $L$  を構成する辺のう

図1 1点付きトラスから定まるクラスター構造

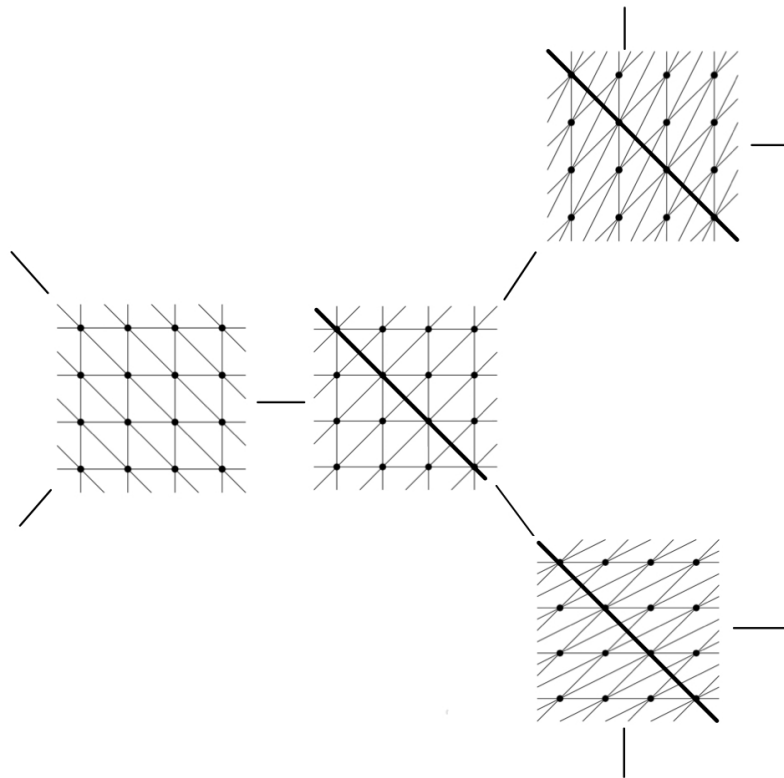


ち、まず  $l_3$  でフリップし、そこから順番に元の三角形分割に戻らない方へフリップを繰り返すこと考える。図1中では  $L$  を一番左の三角形分割、 $l_3$  をその中の斜辺であるとみなし、この図の右側の方へ辿っていくものを考えれば良い。このとき、この操作フリップで変化した後得た新しい弧と  $L = (l_1, l_2, l_3)$  の交点ベクトルを順々にとっていき、それを  $\mathbb{T}_3$  の対応する頂点に載せていくことを考える。これは無限全二分木となるが、これを交点ベクトルツリーと呼ぶ。最初の7つの頂点は以下のようなになる:

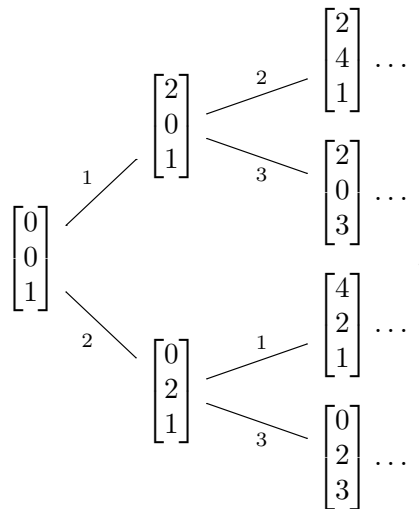


次に、交点ベクトルツリーと双対的なツリーを定義する。交点ベクトルツリーでは  $L$  を固定して、新しく出現する辺と  $L$  の交点ベクトルをツリーの頂点としたが、今度は逆に  $L$  の弧  $l_3$  を固定し、

この  $l_3$  と新しく出現する三角形分割との交点ベクトルをツリーの頂点とする (次の図を参照).



これもやはり無限全二分木となる. これを初期交点ベクトルツリーと呼ぶ. 最初の7つの頂点は以下のようなになる:



なお, このツリーの辺には, 両端のベクトルを比較して変化する成分の位置をラベルづけしておくことにする.

## 4 主定理

本講演の主定理は、交点ベクトルツリーから Stern-Brocot ツリー、初期交点ベクトルツリーから Calkin-Wilf ツリーを構成する方法を与える定理である：

**定理 1** ([Gyo20, Theorem 3.1]). 写像

$$g: \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \mapsto \frac{f_1 + 1}{f_2 + 1}.$$

を考える。Stern-Brocot ツリーは交点ベクトルツリーの頂点  $v$  を  $g(v)$  に置き換えたツリーである。

Calkin-Wilf ツリーを構成するために記号を準備する。 $\mathbb{T}_3$  上の  $t$  と  $t'$  の距離を  $d(t, t')$  で表す。図 1 において  $L$  が対応する  $\mathbb{T}_3$  の頂点を  $t_0$  として、逆に頂点  $t$  に対応する三角形分割を  $L_t$  で表すことにする (つまり  $L = L_{t_0}$ )。  $t_0$  から  $\ell_3$  でフリップした三角形分割が対応する  $\mathbb{T}_3$  の頂点を  $t_1$  として、 $\mathbb{T}_3$  の頂点  $t$  で  $d(t_1, t) < d(t_0, t)$  であるようなものたちがなす部分ツリーを  $\mathbb{T}_3^t$  で表す。

**定理 2** ([Gyo20, Theorem 4.3]). 写像

$$h: \{F(L_t, \ell_3)\}_{t \in \mathbb{T}_3} \rightarrow \mathbb{Q}$$

を次のように帰納的に定義する：まず、

$$F(L_{t_1}, \ell_3) \mapsto \frac{f_{13;t_1} + 1}{f_{23;t_1} + 1} = \frac{1}{1}.$$

と対応させる。さらに、 $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$  とおき、 $F(L_t, \ell_3) \mapsto \frac{f_{a3;t} + 1}{f_{b3;t} + 1}$  かつ  $F(L_t, \ell_3) \xrightarrow{k} F(L_{t'}, \ell_3)$  であって  $d(t, t_1) < d(t', t_1)$  であるときに、 $F(L_{t'}, \ell_3)$  に次の分数を対応させる：

- $k = a$  ならば  $F(L_{t'}, \ell_3) \mapsto \frac{f_{c3;t} + 1}{f_{b3;t} + 1}$ ,
- $k = b$  ならば  $F(L_{t'}, \ell_3) \mapsto \frac{f_{a3;t} + 1}{f_{c3;t} + 1}$ .

このとき、Calkin-Wilf ツリーは初期交点ベクトルツリーの  $v$  を  $h(v)$  に置き換えたツリーである。

## 5 定理の背景

定理 1 と定理 2 を比較すると、この二つのツリーの構成法が双対的であることが見て取れる。実は、1 点トーラスの三角形分割とそのフリップを与えるクラスター構造は 2000 年初期に Fomin と Zelevinsky によって見出されたクラスター代数におけるあるシードとそのシード変異 (シードミュレーション) のなす構造に一致することが [FST08] によって示されている。このとき、交点ベクトルは  $f$  ベクトルと呼ばれるクラスター代数の文脈で定義されるベクトルに一致することが [Yur19] によりわかっており、また初期交点ベクトルを与えるために使用された「 $\ell$  を固定して、基準となる三

角形分割をフリップで変化させる」という変換はクラスター代数の文脈においては [FG19] が明文化した初期シード変異と呼ばれる変換に対応している.  $f$  ベクトルは変異と初期シード変異に対して対称的に振る舞うことが知られており (自己双対性, [FG19] を参照), 定理 1 と定理 2 の比較で得られる Stern-Brocot ツリーと Calkin-Wilf ツリーの対称性はこの自己双対性に由来するものであるといえることができる.

## 参考文献

- [FG19] S. Fujiwara and Y. Gyoda, *Duality between final-seed and initial-seed mutations in cluster algebras*, SIGMA **15** (2019), 24 pages.
- [FST08] S. Fomin, M. Shapiro, and D. Thurston, *Cluster algebras and triangulated surfaces. part I: Cluster complexes*, Acta Math. **201** (2008), 83–146.
- [Gyo20] Y. Gyoda, *Cluster duality between calkin-wilf tree and stern-brocot tree*, 2020. preprint, arXiv:2009.06473 [math.NT].
- [Yur19] T. Yurikusa, *Combinatorial cluster expansion formulas from triangulated surfaces*, Electron. J. Combin. **26** (2019), 39 pages.