二面体群を用いた branched twist spin の判定

東北大学 材料科学高等研究所
福田瑞季 (Mizuki FUKUDA)

概要

Branched twist spin とは，S^4 に滑らかに埋め込まれた 2 次元結び目である．この結び目は，歴史的には，Fintushel と Pao によって 1 次元の結び目と S^4 上の S^1-作用を用いて定義される [3, 7]．特に補空間の基本群 (結び目群と呼ばれている) は作用からくる生成元からなる部分群が非自明な中心であることが知られている．本稿では branched twist spin の結び目群から二面体群への表現を考え，新たな branched twist spin の判別が可能になったので、証明の概略とともに紹介する．

1　背景と導入

n 次元結び目とは S^n を $n+2$ 次元空間へ埋め込んだ像のことである．$n=1$ の場合は古典的結び目や単に結び目、$n=2$ の場合は球面結び目とも呼ばれる．また，$n+2$ 次元空間を 1 点コンパクト化することにより S^{n+2} 内に埋め込まれた n 次元結び目を考えることができる．以下では埋め込みは全て S^{n+2} 内の滑らかなものとする．

結び目理論では，位相型で結び目を区別する．この区別には大きく分けて 2 つの大きなテーマがある．1 つ目は与えられた結び目が自明かどうかという問題である．n 次元結び目が自明であるとは，$n+1$ 次元球体の境界の n 次元球面と位相型が等しいことをいう．一般に n 次元結び目が自明であればその結び目群は $\mathbb{Z}$ と同型である．逆に結び目群が $\mathbb{Z}$ と同型なとき，その結び目が自明であるかどうかという問題は非常に繊細な部分である．実際，1 次元の結び目においはその結び目が自明であることと，結び目群 (補空間の基本群) が $\mathbb{Z}$ と同型であることが必要十分である．これは結び目の近傍内で K と平行なロンジチュードを取ると，このロンジチュードが補空間内でディスクを張ることからわかる．しかし 3 次元以上の結び目では結び目群が $\mathbb{Z}$ となる非自明な結び目を構成できるため，基本群の情報だけでは完全に決定することはできない．そして 2 次元では unknotting conjecture と呼ばれ，位相的な埋め込みに関しては肯定的に解決されている [8] が，滑らかな埋め込みに関しては未解決問題となっている．この未解決問題は滑らかな 4 次元ポアンカレ予想と密接に関係しており，4 次元特有の問題である．

2 つ目は与えられた 2 つの結び目の位相型が等しいかどうかという問題である．1 次元結び目に関しては，アレクサンダー多項式やジョーンズ多項式などの多項式不変量，彩色や結び目カンドルなどの代数的な不変量など様々な不変量が定義され研究されてきた．不変量の殆どは結び目の図式を用いて構成するが，1 次元結び目は簡単に図式を得ることができ，(平面上の図式なので) 視覚的にも結び目の形や補空間の性質を理解しやすい．ここでの結び目図式は，射影図の交点に上下の情報を付加し

たもののことをいう．

一方で 2 次元以上の結び目では図式を得ることが難しく，代数的な性質を用いた不変量の構成や，リボン結び目と呼ばれる" 簡単に" 図式が得られる結び目に制限した研究が行われてきた．2 次元結び目の図式を更に理解しやすくするために，全空間の 3 次元空間を $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ として連続した平面と捉えることで，各平面上の結び目 (成分数が 1 とは限らないので実際は絡み目である) の変化を調べる動画描法というものがある．動画描法と結び目図式の間には 1:1 の対応があり，スパン結び目など動画描法と相性のよい 2 次元結び目の図式は動画描法から得られる．

次章で定義する branched twst spin はスパン結び目を含む結び目のクラスであるが，結び目図式の構成はされていない．その理由の一つして，切り貼りで結び目を構成するため，動画描法による連続的な平面を決定することが難しいことが挙げられる．しかしそれぞれのパーツは性質のよい空間であるため，補空間の構造は知られている．これにより，branched twist spin の比較を行うことができる．注意として，2 次元結び目の補空間が同相でも結び目として異なる例が知られており，補空間から結び目を決定できるとは限らない．これは Gluck twist と呼ばれる 2 次元結び目に沿った手術が本質的に 2 種類存在することに由来する．筆者はこれまでの研究で branched twist spin に沿った Gluck twist で得られる 2 次元結び目が (位相型が同じとは限らない) branched twist spin になることを示している．

代数的な研究手法として結び目群の表現を調べる方法が知られている．例えば，branched twist spin の結び目群から $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ への表現で，既約かつ metabelian なものの共役類は有限個存在し，その数は結び目の不変量となる [4]．本稿では，同様に branched twist spin の結び目群に注目して二面体群への表現を考える．非自明な branched twist spin の結び目群は非自明な中心を持ち，表現は中心を保つので，二面体群のうち位数が偶数であることを仮定する．これにより次の結果が得られた．

定理 1.1. m_1 を奇数とする．m_1 が m_2 の倍数でない (もしくは m_2 が m_1 の倍数でない) ならば，2 つの 非自明な branched twist spin $K_1^{m_1,n_1}$ と $K_2^{m_2,n_2}$ は異なる．

2 準備

滑らかな埋め込み $f : S^n \hookrightarrow S^{n+2}$ について， $f(S^n)$ を n 次元結び目といい，$\mathcal{K}$ と書くことにする．結び目の位相型は次の同値類で定義する．$\mathcal{K}$ と $\mathcal{K}'$ を n 次元結び目とする．これらの結び目が同値であるとは，S^{n+2} 上の滑らかなアイソトピー $F : S^{n+2} \times I \to S^{n+2}$ が存在して， $F(x, 0) = x$ かつ $F(\mathcal{K}, 1) = \mathcal{K}'$ を満たすときをいい，$\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ と書く．本稿では 1 次元結び目と 2 次元結び目を扱うが， 1 次元結び目を表す際には $\mathcal{K}$ の代わりに K と書くことにする．

Branched twist spin は S^4 上の S^1-作用を用いて定義される．この章では作用について準備をし，branched twist spin の定義を述べる．

2.1 局所滑らかな作用

本節の詳しい内容は [2] を参考されたい．G をリー群とし，X を多様体とする．$f : G \times X \to X$ が任意の $g, h \in G$, $x \in X$ に対して，

(0) f は滑らかな写像,
(1) $f(g, f(h,x)) = f(gh, x)$,
(2) $f(e,x) = x$,

を満たすとき，f を X 上の G の左作用という．ここで e は G の単位元である．右作用も同様にして定義される．G の作用 f が与えられた位相空間 X を G -空間という．以下では作用 f は左右両側で定義されているものとし，混乱が起きないときは写像 f を明記せず $f(g,x)$ や $f(x,g)$ を単に gx や xg と書くことにする．

$x, y \in X$ に対し，

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ある } g \in G \text{ が存在して } gx = y$$

という同値関係 $\sim$ による G -空間 X の商空間を X/G と書き，X の G-**軌道空間**という．G が明らかな場合には単に軌道空間と書くことにする．この商空間の各点の引き戻しは $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ と表記できる．これを G による x の**軌道**という．また G の部分群 $G_x = \{g \mid gx = x\}$ を**安定部分群**という．各点の安定部分群の積集合 $\bigcap_{x \in X} G_x$ が自明な群 $\{e\}$ となるとき，作用は**効果的**であるという．特に全ての $x \in X$ に対して $G_x = \{e\}$ となるとき，作用は**自由**であるという．

X, Y を G -空間とする． 微分同相写像 $\phi : X \to Y$ が存在して，

$$\phi(gx) = g\phi(x)$$

が全ての $x \in X$ に対して成り立つとき，X と Y は G-**同値**であるという．また，微分同相写像 $\phi : X \to Y$ に対して $\psi \in Aut(G)$ が存在して，

$$\phi(gx) = \psi(g)\phi(x)$$

が全ての $x \in X$ に対して成り立つとき，X と Y は**弱** G-**同値**という．

直積 $X \times Y$ への G -作用を $g(x,y) = (xg^{-1}, gy)$ で定義すると，$X \times Y$ も G -空間となる．この作用による商空間を $X \times_G Y$ と書く．商空間の同値類を $[x,y]$ と書くことにすると $[xg, y] = [x, gy]$ となることを注意しておく．作用が直交的であるとは作用の表現が直交群と同型になるときをいう．

次の補題からユークリッド空間上のコンパクトリー群による作用は常に直交的な作用としてよい．

補題 2.1. G をコンパクトリー群，$H \subset G$ を閉部分群とする．このとき，ある自然数 m と $v \in \mathbb{R}^m$ に対して $G_v = H$ となる表現 $\rho : G \to O(m)$ が存在する．

次に局所滑らかな作用を定義する．X を G -空間とし，X 内のある点 X の軌道 $G(x)$ を G/H -タイプとする．ここで，軌道 $G(x)$ が G/H-**タイプ**であるとは，$G_x = H$ となるときをいう．さらに，V をユークリッド空間で，V 上の H の作用は直交的であるとする．このとき $G(x)$ に関する**線形管**を

$$\phi : G \times_H V \to X$$

の像として定義する．また点 $y \in X$ の**線形スライス** S_y を

$$\psi : G \times_{G_y} S_y \to X; [g,s] \mapsto gs$$

が $G(y)$ の線形管と G -同値となるものとして定義する．各点で線形スライスが存在するとき X を**局所滑らか**であるという．注意として，$G \times_H V \to X$ は G/H 上の V 束なので $G \times_H V$ は多様体である．したがって滑らかな作用を持つ空間 X は多様体でなくてはならない．

一般に作用と軌道空間が与えられたときに，全空間がどのようになっているかわからない．しかし主 S^1 束については次が成立する．

補題 2.2. $\mathcal{P}(S^1, M)$ を M 上の主 S^1 束全体の集合とする．このとき，$\mathcal{P}(S^1, M) = H^2(M;\mathbb{Z})$.

2.2　スパン結び目

1926 年に Artin が以下のように 1 次元結び目から 2 次元結び目を構成した [1]. $\mathbb{R}^3_+ = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_3 \geq 0\}$ に適切に埋め込まれた弧 K_+ を考える．つまり $\mathbb{R}^3_+$ 内の弧 K_+ で，端点が $\mathbb{R}^3_+ \supset \mathbb{R}^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_3 = 0\}$ 内にあるものを考える．K_+ を $\mathbb{R}^2$ 内の線分によって端点を結んだものは $\mathbb{R}^3_+ \subset S^3$ 内の結び目である．$0 \leq \theta \leq 2\pi$ に対し $f_\theta(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3\cos\theta, x_3\sin\theta)$ で定まる写像 $f_\theta : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}^4$ による像の和集合 $\left\{f_\theta(\mathbb{R}^3_+)\right\}_{0\leq\theta\leq2\pi}$ は $\mathbb{R}^4 \subset S^4$ となり，$\{f_\theta(K_+)\}_{0\leq\theta\leq2\pi}$ は二次元球面となる．この 2 次元球面 $\{f_\theta(K_+)\}_{0\leq\theta\leq2\pi} = K^*$ を K のスパン結び目という．S^4 を $f_\theta(\mathbb{R}^3_+)$ の 1 点コンパクト化とみなすと，S^4 は θ によって S^1 作用をもち，固定点の像は $\mathbb{R}^2$ を 1 点コンパクト化した S^2 である．

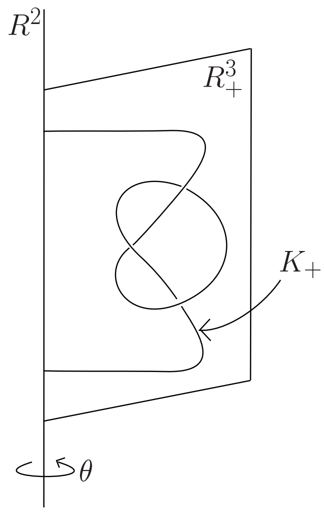

図 1　スパン結び目

注意 2.3. 1 次元結び目とそのスパン結び目の基本群は常に同型である．

2.3 ツイストスパン結び目

Zeeman によって 1963 年にスパン結び目の一般化がなされた [9]．上の K_+ に対して，K_+ の端点を含まないようなコンパクト部分集合 K_+^c をとり，K_+^c を含み，∂K_+^c がそれぞれ北極，南極にあるような 3 次元球体を D_+^3 とする (図 2)．ある整数 m に対し，$M = \partial D_+^3 \times D^2$, $N = D_+^3 \times \partial D^2$ とし，$f_m((x,\phi),\theta) = ((x, \phi + m\theta), \theta)$ なる接着写像 $f_m : \partial M \to \partial N$ によって $M \cup_{f_m} N$ を構成する．ここで，∂D_+^3 の座標 (x,ϕ) は円柱座標であり，ϕ は赤道方向の角度を表している．この $M \cup_{f_m} N$ は S^4 になり，f_m を $\partial K_+^c \times \partial D^2$ に制限した写像を g_m と書くことにすると，$K_+^c \times \partial D^2 \cup_{g_m} \partial K_+^c \times D^2$ は 2 次元球面となる．この 2 次元球面 $K_+^c \times \partial D^2 \cup_{g_m} \partial K_+^c \times D^2 = K^m$ を K の m ツイストスパン結び目という．

$\psi \in S^1$ に対して，M 上の S^1 作用 $\psi_M : M \to M$, N 上の S^1 作用 $\psi_N : N \to N$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} &\psi_M((x,\phi),(r,\theta)) = ((x,\phi + m\psi),(r,\theta - \psi)) \qquad ((x,\phi) \in \partial D_+^3, (r,\theta) \in D^2) \\ &\psi_N(y,\theta) = (y, \theta - \psi) \qquad (y \in D_+^3, \theta \in \partial D^2) \end{aligned}$$

で定義する．この ψ_M, ψ_N を用いて，作用 $\psi_S = \psi_M \cup \psi_N : S^4 \to S^4$ を定めれば，これは $M \cup_{f_m} N = S^4$ 上の S^1 作用となる．ψ_N が 固定点を持たないことから，ψ_S の固定点は ψ_M の固定点である．つまり $\partial K_+^c \times \{0\}$ である．

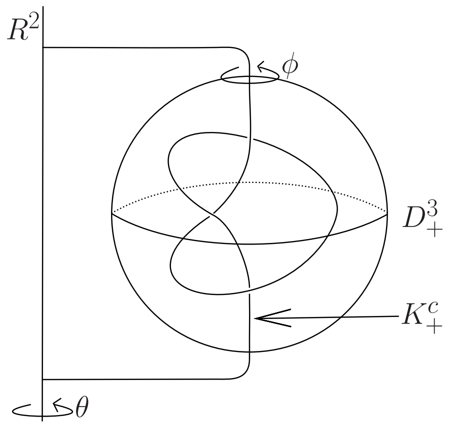

図 2　ツイストスパン結び目

0 ツイストスパン結び目はスパン結び目である．一般に m ツイストスパン結び目については次が知られている．

定理 2.4 (Zeeman [9])**.** K を 1 次元結び目とする．K の ± 1 ツイストスパン結び目 $K^{\pm 1}$ は自明な２次元結び目と同値である．

2.4 Branched twist spin の定義

局所滑らかで効果的な S^1 作用をもつ S^4 を考える．このとき，軌道空間は D^3 か S^3 になることが Montgomery と Yang によって知られている [6]．軌道空間が D^3 の場合には例外軌道がなく，

固定点集合の像 F^* が $\partial D^3 = S^2$ となる．軌道空間が S^3 の場合には固定点集合 F は 2 点からなり，例外軌道は高々 2 種類存在する．本稿では例外軌道が 2 種類存在するときを考える．例外軌道をそれぞれ $\mathbb{Z}_m$-タイプ，$\mathbb{Z}_n$-タイプとし，それぞれの例外軌道の集合を E_m, E_n と書く．ここで m, n は互いに素な整数である．以下，簡単のため m, n は互いに素な自然数とする．E_m, E_n の軌道空間内の像をそれぞれ E^*_m, E^*_n と書く．同様に固定点集合 F の軌道空間内の 像を F^* と書くことにする．Fintushel によって，$E^*_m \cup E^*_n \cup F^*$ は軌道空間 S^3 内で 1 次元結び目になっていることが知られている [3]．(例として図 3 を参照．) また各 $E_m \cup F$, $E_n \cup F$ は S^2 と同相であり，2 次元結び目である．

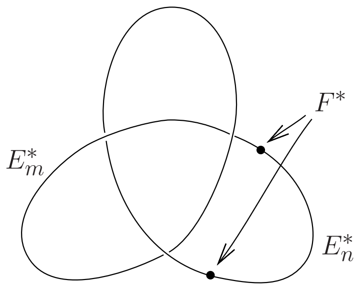

図 3　軌道空間 S^3 内の例外軌道と固定点の像

上記から branched twist spin は次のように定義される．

定義 2.5 (Branched twist spin)**.** $S^1 \curvearrowright S^4$ を局所滑らかで効果的な作用，2 つの例外軌道をそれぞれ E_m, E_n とし，$K = E^*_m \cup E^*_n \cup F^*$ とする．$E_m \cup F$ と $E_n \cup F$ をそれぞれ K の branched twist spin といい $K^{n,m}, K^{m,n}$ と書く．

注意 2.6. (1) 上の定義の K は任意の 1 次元結び目を与えることができる．
(2) S^4 上の局所滑らかで効果的な S^1-作用を 1 つ与えると，S^4 内には 2 つの branched twist spin の組 $(K^{m,n}, K^{n,m})$ が定義されている．この組に現れる m, n は互いに連動している．つまり，“適切な意味”で $K^{m,n}$ が $K^{m',n}$ に置き換わったとすると，同時に $K^{n,m}$ は $K^{n,m'}$ に置き換わる．

作用を用いて軌道空間である S^3 から S^4 を構成する．まず S^3 を軌道の種類によって次の 5 つのパーツに分ける．$E^*_m \cup E^*_n \cup F^* = K \subset S^3$ を 1 次元結び目,

$$S^3 = X \cup (E^{c*}_m \times D^2) \cup (E^{c*}_n \times D^2) \cup D^{3*}_1 \cup D^{3*}_2.$$

ここで， D^{3*}_1, D^{3*}_2 は F^* の 2 点それぞれの近傍 ， E^{c*}_m, E^{c*}_n は それぞれ E^*_m, E^*_n 内のコンパクト部分集合，X は K の結び目補空間である．

X の任意の点は S^4 内の自由な S^1 作用による軌道の像なので，特に主 S^1 束である．ポアンカレ双対より $H^2(X; \mathbb{Z}) = H_1(X, \partial X; \mathbb{Z}) = 0$ となるため，補題 2.2 より X の作用による逆像は直積 $X \times S^1$ となる．

次に D^{3*}_1, D^{3*}_2 について作用による逆像を考える．D^{3*}_1, D^{3*}_2 は中心が固定点の像である 3 次元球体であり，中心以外は自由な作用による像である．S^4 内の固定点 F は 2 点からなる．その近傍である 4 次元球体をそれぞれ D^4_1, D^4_2 とする．境界 ∂D^4_i $(i = 1, 2)$ には自由な S^1 作用が入っており，

D_i^4 上の作用はこの自由な作用の錐を取ることで得られる．

次に $E_m^{c*} \times D^2$ について作用による逆像を考える．E_m^{c*} 上の点 z_m^* を取り，S^3 内で $z_m^* \in E_m^{c*}$ を中心とし，E_m^{c*} と横断的に交わるディスクを $D^{2*}_{z_m^*}$ とする．このディスクは z_m^* 以外の例外軌道の像を含まないように取れる．$D^{2*}_{z_m^*}$ の作用による引き戻しは $\mathbb{Z}_m$ -タイプの例外軌道を中心に持つトーラス体 V_m である．同様に $E_n^{c*} \times D^2$ についても S^3 内で $z_n^* \in E_n^{c*}$ を中心とし，E_n^{c*} と横断的に交わるディスクを $D^{2*}_{z_n^*}$ とする．$D^{2*}_{z_n^*}$ の作用による引き戻しは $\mathbb{Z}_n$ -タイプの例外軌道を中心に持つトーラス体 V_n である．

以上のことから S^4 は次の 5 つのピースに分解できる．

$$S^4 = (B_1^4 \cup B_2^4) \cup (\partial D_m^2 \times E_n^{c*} \times D_n^2) \cup (D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2) \cup (X \times S^1). \tag{2.1}$$

それぞれのピースには S^1-作用が与えられているので，座標を与え作用が適合するような貼り合わせを考えることで，貼り合わせ写像を具体的に書き下すことができる．実際，$D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2$ と $X \times S^1$ の張り合わせ写像 g は

$$g(\theta_1, x, \theta_2) = (m\theta_1 - n\theta_2, x, \beta\theta_1 + \alpha\theta_2) \quad ((\theta_1, x, \theta_2) \in \partial D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2)$$

となる．ここで $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ は $\alpha m + \beta n = 1$ を満たす．貼り合わせ写像の細かい議論に関しては，例えば [5] を参照されたい．Branched twist spin の結び目補空間は $(D_m^2 \times E_m^{c*} \times \partial D_n^2) \cup_g (X \times S^1)$ であり，この結び目群の表示は 1 次元結び目補空間 X の表示を用いて記述できる．1 次元結び目群の代表的な表示として Wirtinger 表示と呼ばれるものがある．これは結び目図式の弧にラベル付けをしたものを生成元とし，交点周りの情報を関係式として与える表示である．今，1 次元結び目群の Wirtinger 表示を $\langle x_1, \dots x_l, h \mid r_1, \dots r_l \rangle$ で与えられてるとすると，ファンカンペンの定理から branched twist spin の結び目群の表示は

$$\pi_1(S^4 \setminus \mathrm{int}N(K^{m,n})) \cong \langle x_1, \dots x_l, h \mid r_1, \dots r_l, x_i h = h x_i, x_1^m h^\beta = 1 \rangle$$

であることがわかる．

3 主結果

前章で branched twist spin の結び目群の表示を 1 次元結び目群の表示から与えた．二面体群は以下の表示をもつことが知られている．

$$\mathcal{D}_{2k} \cong \langle r, s \mid r^n = s^2 = 1, srsr = 1 \rangle.$$

生成元の r, s はそれぞれ回転と鏡映からくる元である．そこで，二面体群 $\mathcal{D}_{2k}$ に対し結び目群の表現 $\rho : \pi_1(S^4 \setminus \mathrm{int}N(K^{m,n})) \to \mathcal{D}_{2k}$ で，以下の条件 (†) を満たすものを考える．

(†) ρ は非自明かつ $h \in \pi_1(S^4 \setminus \mathrm{int}N(K^{m,n}))$ を $s \in \mathcal{D}_{2k}$ に移す．

定理 1.1 の証明のために以下の 2 つの補題を用意する．

補題 3.1 (m が偶数の場合)**.** m が偶数であれば ρ は存在しない．

$\because$) m が偶数であると仮定すると，結び目群の関係式 $x^m h^\beta = 1$ から $\rho^m(x)$ が鏡映となるような x が存在する．しかし，偶数回の変化で鏡映になる $\mathcal{D}_{2k}$ の元は存在しないので矛盾． $\square$

補題 3.2 (m が奇数の場合)**.**
(1) $2k$ が m の倍数ならば，$\rho^m(x)$ が単位元となる $x \in \pi_1(S^4 \setminus \mathrm{int}N(K^{m,n}))$ が存在する．
(2) $2k$ が m の倍数でないならば, ρ は存在しない．

$\because$) m が奇数であると仮定すると，結び目群の関係式 $x^m h^\beta = 1$ から $\rho^m(x)$ が $\mathcal{D}_{2k}$ 内で単位元となる　x が存在する．このような ρ の存在は (1)，(2) の仮定による． $\square$

(定理 1.1 証明の概略) 2 つの branched twist spin の結び目群から $\mathcal{D}_{2m_1}$ への表現

$$\rho_1 : \pi_1(S^4 \setminus \mathrm{int}N(K_1^{m_1,n_1})) \to \mathcal{D}_{2m_1}$$
$$\rho_2 : \pi_1(S^4 \setminus \mathrm{int}N(K_2^{m_2,n_2})) \to \mathcal{D}_{2m_1}$$

を考える．補題 3.2 の (1) より ρ_1 は常に存在する．もし m_2 が偶数であれば補題 3.1 から ρ_2 は存在しないので $K_1^{m_1,n_1}$ と $K_2^{m_2,n_2}$ は異なる．もし m_2 が奇数であれば仮定より $2m_1$ は m_2 の倍数ではないので ρ_2 は存在せず，　$K_1^{m_1,n_1}$ と $K_2^{m_2,n_2}$ は異なる． $\square$

定理 1.1 では K_1 と K_2 が異なる結び目であることを要請していない．現在までの不変量を用いた研究では，一次元結び目の情報を用いて branched twist spin を区別していたため，K_1 と K_2 が異なる場合に判別可能となる結果のみであったが，今回の定理 1.1 では K_1 と K_2 が同一のものであっても判別することが可能である点が強みである．

参考文献

[1] E. Artin, *Zur Isotopie zweidimensionalen Flachen im R^4*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1926), 47–72.

[2] G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups, Academic Press, New York-London Pure and Applied Mathematics, Vol.46, 1972.

[3] R. Fintushel, *Locally smooth circle actions on homotopy 4-spheres*, Duke Math. J. **43** (1976), 63–70.

[4] M. Fukuda, *Irreducible SL(2,$\mathbb{C}$)-metabelian representations on branched twist spins*, JKTR.

[5] M. Fukuda, *The Gluck twist on branched twist spins*, arxiv:1811.05109.
Soc. **7** (1956), 131–140.

[6] D. Montgomery and C. T. Yang, *Groups on S^n with principal orbits of dimension n-3*, **I**, **II**, Illinois J. Math. **4** (1960), 507–517. ; **5** (1961), 206–211.

[7] P. S. Pao, *Non-linear circle actions on the 4-sphere and twisting spun knots*, Topology **17** (1978), 291–296.

[8] J. Stallings, *On topological unknotted spheres*, Ann. of Math. Second Series, Vol. 77, no.3, May, 1963, pp. 490–503.

[9] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Am. math. Soc. **115** (1965), 471–495.