反発項は走化性方程式系の解の有界性を導くのか?

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻
千代祐太朗 (Yutaro CHIYO)*

概要

本稿では, 次の誘引・反発型走化性方程式系を Neumann 境界条件及び初期条件の下で考える:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(v)\nabla v) + \nabla \cdot (u\xi(w)\nabla w) + \mu u(1-u), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ w_t = \Delta w - w + u, & x \in \Omega,\ t > 0. \end{cases}$$

ここで $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ はなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とし, $\mu > 0$ は定数とする. また, χ, ξ はある条件を満たす正値関数とする. 数学的には, 第 1 方程式の右辺第 2 項 $-\nabla \cdot (u\chi(v)\nabla v)$ は解の爆発を促すことが知られている. 一方, 符号を替えた右辺第 3 項 $\nabla \cdot (u\xi(w)\nabla w)$ は, 逆に解の有界性を導くと予想される. 本研究では, この予想を反映する, 上記の方程式系の解の有界性に関する結果を導出する.

1　導入

次の走化性方程式系の初期値境界値問題について考える:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(v)\nabla v) + \nabla \cdot (u\xi(w)\nabla w) + \mu u(1-u), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ w_t = \Delta w - w + u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ \nabla u \cdot \nu = \nabla v \cdot \nu = \nabla w \cdot \nu = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x),\ w(x,0) = w_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $\Delta := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ は Laplacian, $\nabla f := {}^t(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ は $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の勾配, $\nabla \cdot g := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$ は $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の発散であり, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ はなめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域, $\mu > 0$, $u_0 \in C(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$, $v_0, w_0 \in W^{1,\infty}(\Omega) := \{h \mid h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ は可測, h とその弱導関数が本質的に有界 $\}$ は非負の初期値であり, ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである. さらに, χ, ξ はある条件を満たす正値関数で, 典型例として次の関数が挙げられる:

$$\chi(s) = \frac{a}{(b+s)^k},\ \xi(s) = \frac{c}{(d+s)^\ell}, \quad a, b, c, d > 0,\ k, \ell > 1. \tag{2}$$

問題 (1) は, 生物 (密度 u) が誘引物質 (濃度 v) に引き寄せられ, かつ忌避物質 (濃度 w) に反発して遠ざかっていく現象を記述したモデルである.

* 本研究は水上雅昭氏 (東京理科大学理学部), 横田智巳氏 (東京理科大学理学部) との共同研究に基づく.

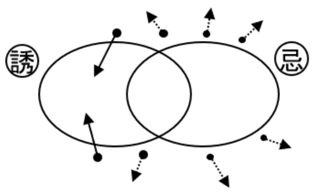
数学的には, 走化性項は解の爆発 (生物の集中) を促進することが知られており, 上記の通り反発項は走化性項とは逆の性質をもつことから, 反発項は解の爆発を抑制し, 有界性をもたらす効果をもつと考えられる (左下図参照). ここで, 解 u が爆発するとは

$$\exists T \in (0,\infty]; \quad \limsup_{t \nearrow T} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$$

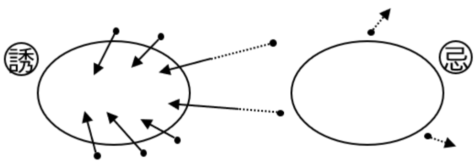
が成り立つことであり, 解 u が有界であるとは

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty$$

が成り立つことである. ただし, $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \coloneqq \inf\{C > 0 \mid |f(x)| \le C \text{ a.a. } x \in \Omega\}$ である. 一方で, 例えば誘引物質と忌避物質が遠い場合は, 忌避物質を離れた生物が誘引物質に集中し, 逆に解の爆発が促進されるため, 反発項が有界性を導く効果をもつとは必ずしもいえない (右下図参照).



集中が起きにくい



集中が起きやすい

この考察から, 次のことが予想される:

予想. 一般には, 反発項の効果が解の有界性をもたらすとは一概にはいえない.
また, 一般の状況下では走化性項の効果を弱めなければ有界性を得ることができない.

なお, χ, ξ が定数関数である場合に関して, 変換 $z := \xi w - \chi v$ によって, ある場合に解の有界性が保証された問題に帰着することにより, Tao–Wang [**3**] は 2 次元の場合に $\mu = 0$, $\chi < \xi$ という条件の下で解の有界性を証明した. 一方で, χ, ξ が定数関数でない場合には, 上記の変換で有界性を得る議論が適用できず, 研究が進展していないようである. 特に χ が定数関数ではなく, 反発項の効果を考慮しない $\xi = 0$ の場合に, $\mu = 0$ とした方程式系

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u\chi(v)\nabla v), \\ v_t = \Delta v - v + u \end{cases} \tag{3}$$

について, Mizukami–Yokota [**2**] は関数 χ のもつ誘引効果の弱さを表す次の条件の下で解の有界性を示した:

$$0 \le \chi(s) \le \frac{a}{(b+s)^k}, \quad \frac{1}{a} > c\sqrt{\frac{n}{2}},\ b \ge 0,\ k \ge 1,\ c = c\Big(b, k, \int_\Omega u_0(x)\,dx, v_0\Big) > 0. \tag{4}$$

本研究の目的は, 方程式系 (3) に反発項及び抑制項を加えた問題 (1) について, 関数 χ, ξ のもつ誘引, 反発効果の弱さに関する, 条件 (4) を一般化した条件を課すことで前述の予想を反映する結果を導くことである.

2 主結果

本研究では, 関数 χ, ξ は以下の 6 条件[*1]を満たすと仮定する:

$$\chi \in C^{1+\theta_1}([0,\infty)) \cap L^1(0,\infty) \quad (0 < \exists\, \theta_1 < 1), \tag{C1}$$

$$\xi \in C^{1+\theta_2}([0,\infty)) \cap L^1(0,\infty) \quad (0 < \exists\, \theta_2 < 1), \tag{C2}$$

$$\exists\, \chi_0 > 0; \quad s\chi(s) \le \chi_0 \quad \forall\, s \ge 0, \tag{C3}$$

$$\exists\, \xi_0 > 0; \quad s\xi(s) \le \xi_0 \quad \forall\, s \ge 0, \tag{C4}$$

$$\exists\, \alpha > 0; \quad \chi'(s) + \alpha|\chi(s)|^2 \le 0 \quad \forall\, s \ge 0, \tag{C5}$$

$$\exists\, \beta > 0; \quad \xi'(s) + \beta|\xi(s)|^2 \le 0 \quad \forall\, s \ge 0. \tag{C6}$$

また, 条件 (C5), (C6) における α, β は次の条件を満たすと仮定する:

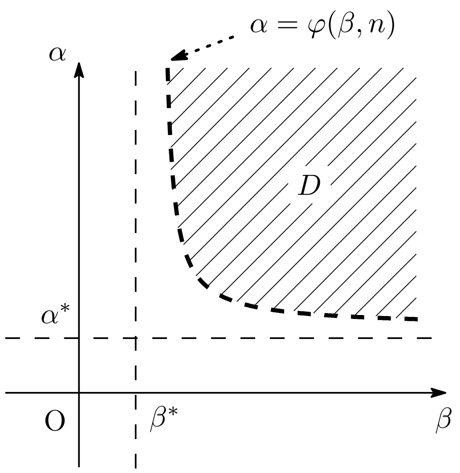
$$(\alpha,\beta) \in D \coloneqq \{(\alpha,\beta) \in (0,\infty)\times(0,\infty) \mid \alpha > \varphi(\beta,n)\}. \tag{C7}$$

ここで, 関数 φ は次のように定義される:

$$\varphi(\beta,n) \coloneqq \min_{\delta \in J_{\beta,n}} \frac{\frac{n}{2}(2\delta+1)\big[(n-1)\delta+n\big] + \sqrt{A(\delta)}}{2\delta(\beta-n) - \delta^2 - \frac{n}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{l} J_{\beta,n} \coloneqq \big(\beta - n - \sqrt{(\beta-n)^2 - \frac{n}{2}},\ \beta - n + \sqrt{(\beta-n)^2 - \frac{n}{2}}\big), \\ A(\delta) \coloneqq \frac{n\delta}{2}\big(2\beta + (2n-1)\delta\big)\big[2\delta(\beta-n) + \frac{n}{2}\big(2n(\delta+1)^2 - (2\delta+1)^2\big)\big] \end{array} \right).$$

関数 φ のグラフの概形及び集合 D を (α,β) 平面上に図示すると下図のようになる. ここで, 図における α^*, β^* は関数 φ の漸近線を与える定数である. この図からわかるように, 条件 (C7) は α, β の大きさに関する条件になっている. なお, 関数 χ, ξ が (2) の形の関数である場合には上記の条件 (C1)–(C6) が満たされるため, χ, ξ は (2) における関数の一般化になっている.



[*1] 条件に現れる空間の定義は以下の通りである:
$C^{1+\theta}([0,\infty)) \coloneqq \{f \mid f$ は $[0,\infty)$ 上連続微分可能で $|f'(x)-f'(y)| \le |x-y|^\theta\ (x,y \in [0,\infty))\}$ $(0<\theta<1)$,
$L^1(0,\infty) \coloneqq \{f \mid f$ は $(0,\infty)$ 上の可測関数で, $\int_0^\infty |f(s)|\,ds < \infty\}$.

ここで, 条件 (C5), (C6) に現れる α, β が, (2) の典型例では何に相当するのかを考える. χ が (2) における関数, すなわち $\chi(s) = \frac{a}{(1+s)^k}$ ($a > 0,\ k > 1$; 簡単のため $b = 1$ とした) である場合に条件 (C5) の左辺を計算すると,

$$
\begin{aligned}
\chi'(s) + \alpha|\chi(s)|^2 &= \frac{d}{ds}\frac{a}{(1+s)^k} + \alpha\left|\frac{a}{(1+s)^k}\right|^2 \\
&= -\frac{ka}{(1+s)^{k+1}} + \frac{\alpha a^2}{(1+s)^{2k}} \\
&= \frac{a\big[\alpha a - k(1+s)^{k-1}\big]}{(1+s)^{2k}}
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $k > 1$ と $1 + s > 1$ から $k(1+s)^{k-1} \geq 1$ であることがわかるので, 上の計算から

$$
\chi'(s) + \alpha|\chi(s)|^2 \leq \frac{a(\alpha a - 1)}{(1+s)^{2k}}
$$

となることがわかる. よって, $\alpha a \leq 1$ ならば (C5) における不等式 $\chi'(s) + \alpha|\chi(s)|^2 \leq 0$ が得られるため, α は大まかには $\frac{1}{a}$ に相当することがわかる. ξ についても同様に考えることにより, β が $\frac{1}{c}$ に相当することがわかる. このことから, α, β が大きいほど a, c は小さくなることがわかる. よって, α, β の大きさについての条件 (C7) は, a, c の小ささ, すなわち走化性項, 反発項の効果の弱さを表す条件である, ということができる.

以上の設定の下で, 問題 (1) の時間大域的古典解の存在, 一意性及び有界性に関する次の結果を得た.

定理 ([**1**, Theorem 1.1])**.** 関数 χ, ξ は条件 (C1)–(C6) を満たすとし, (C5), (C6) における α, β は条件 (C7) を満たすと仮定する. そのとき, 任意の非負の初期値 $u_0 \in C(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$, $v_0, w_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ に対して, (1) の時間大域的古典解

$$
\begin{aligned}
&u \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)), \\
&v,\ w \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0,\infty)) \cap L^\infty(0,\infty; W^{1,\infty}(\Omega))
\end{aligned}
$$

が一意的に存在する. さらに, 解 u, v, w は次の意味で有界である:

$$
\exists C > 0;\ \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \|w(\cdot,t)\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq C \quad (t > 0).
$$

注意. 上記の定理に現れる $C^{2,1}$ の "2" は空間変数について 2 回連続微分可能であることを表し, "1" は時間変数について 1 回連続微分可能であることを表す. また, $L^\infty(0,\infty; W^{1,\infty}(\Omega))$ は, ノルム $\|f\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial f}{\partial x_i}\|_{L^\infty(\Omega)}$ により定まる位相を備えた $W^{1,\infty}(\Omega)$ に値をとる, t に関する L^∞ 関数の空間である.

上記の定理は前述の予想を反映している. 実際, χ, ξ が (2) の形の関数である場合, α が $\frac{1}{a}$ に, β が $\frac{1}{c}$ に相当するため, 反発項の効果が強い (i.e., $\frac{1}{c}$ が小さい) 場合には, 走化性項の効果が弱ければ (i.e., $\frac{1}{a}$ が大きければ) 有界性が導けることが, 前述の領域図からわかる. しかし, 反発項の効果が有界性を導くかどうかは今回の定理からは判断できない. なお, 定理における条件で関数 φ を適切に選び, $\frac{1}{c}$ を十分小さくとることにより, 条件 (4) の $\frac{1}{a}$ に対する条件が得られることが確認できるため, 定理での χ, ξ に対する条件は (4) の一般化になっている.

3 証明の方針と有界性を導く基本的な補題の説明

この節では, 定理の証明の方針を説明する.

まず, 時間局所解の存在を示す. これは問題 (1) の第 1 方程式を積分方程式に書き換えて縮小写像の原理を用いることにより証明される (例えば, [**3**, Lemma 3.1] を参照). また, 時間局所解の存在と併せて次の blow-up criterion も示される:

$$T_{\max} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{t \nearrow T_{\max}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty. \tag{5}$$

ここで, $T_{\max}$ は時間局所解 u の最大存在時間であり, $T_{\max} = \infty$ を示すことが目標である.

次に, 時間局所解 u の L^p 評価 $(p > \frac{n}{2})$ を導く. 下に有界なある関数 f を用いて, 微分不等式

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^p f \le c_1 \int_\Omega u^p f - c_2\Big(\int_\Omega u^p f\Big)^{1+\theta} \quad (c_1, c_2, \theta > 0) \tag{6}$$

を導くことで, $\int_\Omega u^p f$ が上から定数で抑えられることがわかる (詳細は後述). このことと f の下からの評価を併せると, $\int_\Omega u^p$ の上からの評価, すなわち u の L^p 評価が得られる.

最後に, u の L^p 評価から u の L^∞ 評価, すなわち $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)}$ の有界性を導く (ノルムの定義は p. 2 を参照). $p > \frac{n}{2}$ ならば, このことが可能であることは走化性方程式の研究ではよく知られている (例えば, [**4**], [**5**] 等を参照). u の L^∞ 評価を得ることができれば, blow-up criterion (5) から $T_{\max} = \infty$ が得られて定理の証明が終わる.

以下, 微分不等式 (6) から $\int_\Omega u^p f$ の上からの評価を導く過程について説明する. このことは以下の補題により保証される. この補題の証明は論文では省略されることが多いので, ここではその補題の証明を丁寧に述べることにする.

補題. $T \in (0, \infty]$, $c_1, c_2, \theta > 0$ は定数とし, 関数 $\varphi \in C([0,T)) \cap C^1((0,T))$ は

$$\varphi'(t) \le c_1\varphi(t) - c_2\varphi(t)^{1+\theta}, \quad t \in [0, T) \tag{7}$$

を満たす非負値の関数とする. そのとき, 次が成立する:

$$\varphi(t) \le \varphi(0)\Big[\frac{c_2}{c_1}(1 - e^{-c_1\theta t})\varphi(0)^\theta + e^{-c_1\theta t}\Big]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad t \in [0, T). \tag{8}$$

特に, φ は $[0, T)$ 上有界である:

$$\varphi(t) \le \max\Big\{\Big(\frac{c_1}{c_2}\Big)^{\frac{1}{\theta}},\ \varphi(0)\Big\}, \quad t \in [0, T).$$

補題の証明. $\varepsilon > 0$ とし, 微分不等式 (7) の両辺を $(\varphi(t) + \varepsilon)^{1+\theta}$ で割ると,

$$\big[(\varphi(t) + \varepsilon)^{-\theta}\big]' + c_1\theta\frac{\varphi(t)}{(\varphi(t) + \varepsilon)^{1+\theta}} \ge c_2\theta\Big(\frac{\varphi(t)}{\varphi(t) + \varepsilon}\Big)^{1+\theta}, \quad t \in [0, T) \tag{9}$$

が得られる. 左辺第 2 項を $\frac{\varphi(t)}{(\varphi(t)+\varepsilon)^{1+\theta}} \le \frac{\varphi(t)+\varepsilon}{(\varphi(t)+\varepsilon)^{1+\theta}} = (\varphi(t) + \varepsilon)^{-\theta}$ と評価したうえで, 記述の簡単のため $y(t) \coloneqq (\varphi(t) + \varepsilon)^{-\theta}$ とおくと, 不等式 (9) は

$$y'(t) + c_1\theta y(t) \ge c_2\theta\Big(\frac{\varphi(t)}{\varphi(t) + \varepsilon}\Big)^{1+\theta}, \quad t \in [0, T)$$

と書き換えられる．両辺に指数関数 $e^{c_1\theta t}$ を掛けて得られる不等式 $[e^{c_1\theta t}y(t)]' \ge c_2\theta\Big(\frac{\varphi(t)}{\varphi(t)+\varepsilon}\Big)^{1+\theta}$ の変数を t から s に替えて, $s=0$ から $s=t$ まで積分すると,

$$e^{c_1\theta t}y(t) \ge c_2\theta\int_0^t e^{c_1\theta s}\Big(\frac{\varphi(s)}{\varphi(s)+\varepsilon}\Big)^{1+\theta}\,ds + y(0), \quad t\in[0,T)$$

となるので, $y(t)=(\varphi(t)+\varepsilon)^{-\theta}$ より,

$$e^{c_1\theta t}(\varphi(t)+\varepsilon)^{-\theta} \ge c_2\theta\int_0^t e^{c_1\theta s}\Big(\frac{\varphi(s)}{\varphi(s)+\varepsilon}\Big)^{1+\theta}\,ds + (\varphi(0)+\varepsilon)^{-\theta}, \quad t\in[0,T),$$

すなわち,

$$(\varphi(t)+\varepsilon)^{\theta} \le (\varphi(0)+\varepsilon)^{\theta}\Big[c_2\theta(\varphi(0)+\varepsilon)^{\theta}\int_0^t e^{-c_1\theta(t-s)}\Big(\frac{\varphi(s)}{\varphi(s)+\varepsilon}\Big)^{1+\theta}\,ds + e^{-c_1\theta t}\Big]^{-1}, \quad t\in[0,T)$$

となる．この両辺で $\varepsilon\searrow 0$ とすると,

$$\varphi(t)^{\theta} \le \varphi(0)^{\theta}\Big[\frac{c_2}{c_1}(1-e^{-c_1\theta t})\varphi(0)^{\theta} + e^{-c_1\theta t}\Big]^{-1}, \quad t\in[0,T)$$

が得られる．よって,

$$\varphi(t) \le \varphi(0)\Big[\frac{c_2}{c_1}(1-e^{-c_1\theta t})\varphi(0)^{\theta} + e^{-c_1\theta t}\Big]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad t\in[0,T)$$

となり結論の評価 (8) が得られる．特に, φ の有界性は

$$\frac{c_2}{c_1}(1-e^{-c_1\theta t})\varphi(0)^{\theta} + e^{-c_1\theta t} \ge \min\Big\{\frac{c_2}{c_1}\varphi(0)^{\theta},\ 1\Big\}\Big[(1-e^{-c_1\theta t}) + e^{-c_1\theta t}\Big] = \min\Big\{\frac{c_2}{c_1}\varphi(0)^{\theta},\ 1\Big\}$$

の両辺を $-\frac{1}{\theta}$ 乗することで得られる． □

参考文献

[1] Y. Chiyo, M. Mizukami, and T. Yokota. Global existence and boundedness in a fully parabolic attraction-repulsion chemotaxis system with signal-dependent sensitivities and logistic source. *J. Math. Anal. Appl*, **489**(1):124153, 18, 2020.

[2] M. Mizukami and T. Yokota. A unified method for boundedness in fully parabolic chemotaxis systems with signal-dependent sensitivity. *Math. Nachr.*, **290**(16):2648–2660, 2017.

[3] Y. Tao and Z-A. Wang. Competing effects of attraction vs. repulsion in chemotaxis. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **23**(1):1–36, 2013.

[4] G. Viglialoro. Explicit lower bound of blow-up time for an attraction-repulsion chemotaxis system. *J. Math. Anal. Appl.*, **479**(1):1069–1077, 2019.

[5] M. Winkler. Boundedness in the higher-dimensional parabolic–parabolic chemotaxis system with logistic source. *Comm. Partial Differential Equations*, **35**(8):1516–1537, 2010.