一般化超幾何微分方程式の接続問題について

熊本大学大学院 自然科学教育部 理学専攻
安達駿弥 (Shunya ADACHI)

1 Introduction

この講演では, **一般化超幾何微分方程式**の**接続問題**を考える. 一般化超幾何微分方程式は次で定義される n 階の線形常微分方程式である:

$$\left[\delta\prod_{i=1}^{n-1}(\delta+\beta_i-1)-x\prod_{i=1}^{n}(\delta+\alpha_i)\right]y=0 \tag{1}$$

ここで $x\in\mathbb{C}$ は独立変数で α_i,β_i は複素パラメータ. また $\delta=x\dfrac{d}{dx}$ である. この方程式は $x=0,1,\infty$ に確定特異点と呼ばれる特異点を持ち, その近傍で解が特徴的な挙動を示す. 各特異点における特性指数をまとめた表 (Riemann scheme と呼ばれる) は次のようになる:

$$\left\{\begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty \\ 0 & 0 & \alpha_1 \\ 1-\beta_1 & 1 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-\beta_{n-2} & n-2 & \alpha_{n-1} \\ 1-\beta_{n-1} & -\beta_n & \alpha_n \end{array}\right\} \tag{2}$$

ただし β_n は $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\beta_1+\cdots+\beta_n$ で定義される.

Remark 1.

(i) Riemann scheme (2) をもつ Fuchs 型線形常微分方程式は (1) に限ることが示される. このように解の局所挙動から方程式が一意的に決まってしまう Fuchs 型方程式は rigid と呼ばれる.

(ii) 方程式 (1) において $n=2$ とすると Gauss の超幾何微分方程式となる.

本講演の主題である接続問題とは, 一言で言うと「各特異点まわりで基本解系 (局所解空間の基底) を固定したとき, 解析接続によって引き起こされるそれらの間の線形関係を調べよ」という問題である. これを方程式 (1) の場合に詳しく述べる. 以下, 簡単のために次の条件を仮定する.

$$\beta_i,\ \beta_i-\beta_j\notin\mathbb{Z}\quad(1\le i,j\le n,\ i\ne j). \tag{3}$$

この条件の下で, 方程式 (1) の原点周りでの基本解系が構成できる:

$$y_1^{[0]}(x)={}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0;\boldsymbol{\beta}_0;x),$$
$$y_{i+1}^{[0]}(x)=x^{1-\beta_i}{}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_i;\boldsymbol{\beta}_i;x)$$

ここで $\boldsymbol{\alpha}_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\boldsymbol{\beta}_0 = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ であり

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_i &= (\alpha_1 + 1 - \beta_i, \alpha_2 + 1 - \beta_i, \ldots, \alpha_n + 1 - \beta_i),\\
\boldsymbol{\beta}_i &= (\beta_1 + 1 - \beta_i, \ldots, 2 - \beta_i, \ldots, \beta_{n-1} + 1 - \beta_i)
\end{aligned}
$$

である $(1 \le i \le n-1)$. ここで ${}_nF_{n-1}$ は一般化超幾何級数で

$$
{}_nF_{n-1}\left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \end{matrix} ; x\right) = \sum_{m \ge 0} \frac{(\alpha_1)_m (\alpha_2)_m \cdots (\alpha_n)_m}{(\beta_1)_m \cdots (\beta_{n-1})_m m!} x^m. \tag{4}
$$

で定義される. この級数の定義に現れる $(a)_m$ は

$$
(a)_m = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1 & m = 0, \\ a(a+1)\cdots(a+m-1) & m \ge 1. \end{cases}
$$

で定める. この級数は $x \in D_0 := \{x \in \mathbb{C}; |x| < 1\}$ で収束する. $x = \infty$ 周りの基本解系も (generic には) 全て ${}_nF_{n-1}$ で書くことができるが, 今回の発表には現れないので割愛する.

一方で $x = 1$ 周りの基本解系は超幾何級数で書くことができない. しかし構成自体は容易であり,

$$
\begin{aligned}
y_i^{[1]}(x) &= (1-x)^{i-1} \sum_{m \ge 0} d_m^{(i)} (1-x)^m, \quad d_0^{(i)} \neq 0 \\
y_n^{[1]}(x) &= (1-x)^{-\beta_n} \sum_{m \ge 0} d_m^{(n)} (1-x)^m, \quad d_0^{(n)} \neq 0
\end{aligned} \tag{5}
$$

と表わされる $(1 \le i \le n-1)$. ここで $y_1^{[1]}(x), y_2^{[1]}(x), \ldots, y_{n-1}^{[1]}(x)$ と $y_n^{[1]}$ に現れる冪級数は $D_1 = \{x \in \mathbb{C}; |1-x| < 1\}$ で収束する. つまり $x = 1$ 周りの解空間は $n-1$ 次元分の正則解空間と 1 次元分の特異解の空間に直和分割されているということになる.

Remark 2.

(i) 基本解系のうち $y_i^{[1]}(x)\,(1 \le i \le n-1)$ を定めるためには, 係数のうち $\{d_j^{(i)}\}_{j=0}^{n-1-i}$ を決定する必要があり (任意に取れる), その取り方に伴って残りの係数 $\{d_j^{(i)}\}_{j \ge n-i}$ が一意的に定まる. その一方で, $y_n^{[1]}(x)$ を決めるためには $d_n^{(0)}$ のみを任意に決めるだけで良い.

(ii) $n = 2$ のとき (Gauss の方程式の場合) のみ, 基本解系 (5) は例外的に全て超幾何級数 ${}_2F_1$ で表すことができる.

以上の準備の下で $x = 0$ と 1 の間の接続問題は次のように述べられる:

問題 1.1 (接続問題)**.** 方程式 (1) の $x = 0$ と $x = 1$ 周りの基本解系をそれぞれ

$$
\mathcal{Y}^{[0]} = (y_1^{[0]}, y_2^{[0]}, \ldots, y_n^{[0]}), \qquad \mathcal{Y}^{[1]} = (y_1^{[1]}, y_2^{[1]}, \ldots, y_n^{[1]})
$$

と表したとき, $x \in (D_0 \cap D_1) \setminus \{0, 1\}$, $\arg x = \arg(1-x) = 0$ において

$$
\mathcal{Y}^{[0]} = \mathcal{Y}^{[1]} C \tag{6}
$$

を満たす接続行列 $C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ を構成せよ.

この問題が解けるということは, D_0 での振る舞いがわかっている (1) の解を D_1 への解析接続したときの挙動が明示的に記述できるということを意味していることに注意しよう. 同様に $x=0$ と ∞ の間, $x=1$ と ∞ の間の接続問題も考えることができ, これらの問題が全て解ければ, 方程式 (1) の解の定義域全体での具体的な表示や挙動, 性質が全て捕まえられるということになる.

このように, 接続問題は微分方程式の解の大域挙動 (解析接続) を調べる問題で, 一般の方程式に対する普遍的な解析方法は未だ知られていない. しかし今回扱っている超幾何微分方程式は数学にとどまらず様々な分野に現れる古典的な研究対象であることから, その接続問題も古くより研究されており様々なことがよくわかっている. まず $n=2$ の場合 (Gauss の方程式の場合) は原岡 [3] に非常に明快かつ魅力的な解説がなされているので是非参照されたい. そこでは解の Euler 型積分表示 (ベキ関数の積の積分) を用いて接続問題を解いている. 他にも日本語の文献では西本 [7] が Gauss の超幾何微分方程式の接続問題を扱っていて, 解の Barnes 型積分表示 (ガンマ関数の積の積分) を用いて接続問題を解いている. いずれの場合も, 得られる接続行列の成分は全てガンマ関数を用いて記述される.

いま述べた「解の積分表示を用いる」というアイデアは微分方程式の解の大域挙動を調べるにおいては非常に強力で, $n \geq 3$ の場合も Mimachi [5, 6], Matsuhira-Nagoya [4] らが解の Euler 型積分表示に基づいた方法で一般化超幾何微分方程式の接続問題を解いている. 特に Matsuhira-Nagoya [4] は我々と同一の問題を扱っており, 接続係数をガンマ関数を用いて明示的に表すことに成功している.

一方で, 本研究は**解の級数表示**に着目して一般化超幾何微分方程式 (1) の接続問題を解いていく. そのモチベーションは「一般の微分方程式の解の積分表示を得ることは非常に困難である」という事実にある. ここまで触れた先行研究で用いられた「解の積分表示を用いて接続問題を解く」方法は一般の微分方程式にも適用可能である. つまり「解の積分表示があれば (原理的には) 接続問題が解ける」ということになる. しかし, 先ほど述べた rigid と呼ばれるクラスに属する方程式を除いた一般の微分方程式に対して解の積分表示を得ることは非常に困難で, 普遍的な構成方法は知られていない. そこで, 方程式からいつでも構成可能な解の級数表示に着目して接続問題へのアプローチを考察してみたいと考えたのが始まりである. 今回の講演では, 一般化超幾何微分方程式に対してそのアプローチを実行して得られた結果を述べる.

2 結果

ここでは主結果, すなわち接続問題 (問題 1.1) の解答を与える. まず

$$D = \begin{pmatrix} d_0^{(1)} & & & & & \\ d_1^{(1)} & d_0^{(2)} & & & & \\ d_2^{(1)} & d_1^{(2)} & d_0^{(3)} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ d_{n-2}^{(1)} & d_{n-3}^{(2)} & d_{n-4}^{(3)} & \cdots & d_0^{(n-1)} & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_0^{(n)} \end{pmatrix}$$

とする. (5) において $d_0^{(1)} d_0^{(2)} \cdots d_0^{(n)} \neq 0$ を仮定しているので, この行列 D は可逆である. このとき主結果は次で与えられる.

定理 1. 非整数条件 (3) と $\mathrm{Re}\,\beta_n < -n+2$ を仮定する．すると (6) を満たす接続行列 C は

$$C = D^{-1}P$$

で与えられる．ここで $P = (p_{ij})_{1\le i,j\le n}$ は $n\times n$ 行列で, 成分は

$$p_{ij} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_{j-1})_{i-1}}{(\boldsymbol{\beta}_{j-1})_{i-1}}{}_nF_{n-1}\left(\boldsymbol{\alpha}_{j-1}+i-1;\boldsymbol{\beta}_{j-1}+i-1;1\right) & 1\le i\le n-1, \\ \dfrac{\Gamma(\boldsymbol{\beta}_{j-1},\beta_n)}{\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_{j-1})} & i=n \end{cases}$$

で与えられる．ただし $(\boldsymbol{\alpha})_m$ と $\Gamma(\boldsymbol{\alpha})$ は $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$ に対してそれぞれ

$$(\boldsymbol{\alpha})_m := \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i)_m, \quad \Gamma(\boldsymbol{\alpha}) := \prod_{i=1}^{n}\Gamma(\alpha_i)$$

で定める．また $a\in\mathbb{C}$ に対して

$$\boldsymbol{\alpha}+a := (\alpha_1+a,\alpha_2+a,\dots,\alpha_n+a)$$

とする．

Remark 3. 定理 1 は次に挙げるケースでも成り立つ結果である:

(i) $\alpha_i\in\mathbb{Z}$ for some $1\le i\le n$,
(ii) $\alpha_i-\beta_j\in\mathbb{Z}$ for some $1\le i\le n$ and $1\le j\le n-1$,
(iii) $\alpha_i-\alpha_j\in\mathbb{Z}$ for some $1\le i,j\le n$.

これらのケースは Matsuhira-Nagoya [4] では扱われておらず, ケース (i) と (ii) では, 方程式 (1) は可約であることが知られている (cf. Beukers-Heckman [2]).

少し結果の表示が見づらいと思われるので, 具体例を挙げておく．

例 1. $n=3$ の場合

$$D = \begin{pmatrix} d_0^{(1)} & & \\ d_1^{(1)} & d_0^{(2)} & \\ 0 & 0 & d_0^{(3)} \end{pmatrix}$$

であり, 接続行列は

$$C = D^{-1}\begin{pmatrix} {}_3F_2(\boldsymbol{\alpha}_0;\boldsymbol{\beta}_0;1) & {}_3F_2(\boldsymbol{\alpha}_1;\boldsymbol{\beta}_1;1) & {}_3F_2(\boldsymbol{\alpha}_2;\boldsymbol{\beta}_2;1) \\ -\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_0)_1}{(\boldsymbol{\beta}_0)_1}{}_3F_2(\boldsymbol{\alpha}_0+1;\boldsymbol{\beta}_0+1;1) & -\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_1)_1}{(\boldsymbol{\beta}_1)_1}{}_3F_2(\boldsymbol{\alpha}_1+1;\boldsymbol{\beta}_1+1;1) & -\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2)_1}{(\boldsymbol{\beta}_2)_1}{}_3F_2(\boldsymbol{\alpha}_2+1;\boldsymbol{\beta}_2+1;1) \\ \dfrac{\Gamma(\boldsymbol{\beta}_0,\beta_3)}{\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_0)} & \dfrac{\Gamma(\boldsymbol{\beta}_1,\beta_3)}{\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_1)} & \dfrac{\Gamma(\boldsymbol{\beta}_2,\beta_3)}{\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_2)} \end{pmatrix}$$

となる．

3　証明の概略

定理 1 を示すためには, 次を示せば十分である.

命題 1. 非整数条件 (3) と $\operatorname{Re}\beta_n < -n+2$ を仮定する. すると $0 < x < 1,\ \arg x = \arg(1-x) = 0$ において

$$y_1^{[0]}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{[1]}(x) \tag{7}$$

を満たす接続係数 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ は次で与えられる:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0; \boldsymbol{\beta}_0; 1) \\ -\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_0)_1}{(\boldsymbol{\beta}_0)_1} {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0 + 1; \boldsymbol{\beta}_0 + 1; 1) \\ \vdots \\ \dfrac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_0)_{n-2}}{(\boldsymbol{\beta}_0)_{n-2}} {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0 + n-2; \boldsymbol{\beta}_0 + n-2; 1) \\ \dfrac{\Gamma(\boldsymbol{\beta}_0, \beta_n)}{\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_0)} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

この命題においてパラメータの入れ替えと $x^{1-\beta_i}$ を用いたゲージ変換を組み合わせることで, 他の局所解 $y_{i+1}^{[0]}(x)\,(1 \le i \le n-1)$ と $y_1^{[1]}, y_2^{[1]}, \ldots, y_n^{[1]}(x)$ の間の接続関係式が直ちに得られる.

この命題を解の級数表示に着目して証明する. 証明の重要なキーとなる Schäfke-Schmidt [8] による定理を紹介しよう.

定理 2 (Schäfke-Schmidt [8])**.** 多項式係数の線形常微分方程式

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$$

が $x = 0, 1$ に確定特異点を持ち, $|x| \le 1$ には他の特異点を持たないとする. もしこの方程式の原点周りのある解が

$$y^{[0]}(x) = x^{\alpha} \sum_{m \ge 0} a_m x^m$$

で与えられており, また $x = 1$ 周りの基本解系が

$$y_j^{[1]}(x) = (1-x)^{\alpha_j} \sum_{m \ge 0} d_m^{(j)} (1-x)^m, \quad 1 \le j \le n$$

で与えられているとき, $y^{[0]}(x)$ の係数 a_m に関して次の関係が成り立つ:

$$a_m = \sum_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(m+\alpha-\alpha_j)}{\Gamma(m+\alpha+1)} \left\{ \sum_{\ell=0}^{k} \left(\prod_{s=1}^{\ell} \frac{-s-\alpha_j}{m+\alpha-s-\alpha_j} \right) d_\ell^{(j)} \right\} \frac{c_j}{\Gamma(-\alpha_j)} + O(m^{-\alpha_- - k - 2}), \quad m \to \infty.$$

ここで $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ は $0 < x < 1,\ \arg x = \arg(1-x) = 0$ において

$$y^{[0]}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{[1]}(x)$$

を満たす接続係数であり $k \in \mathbb{N}$ は任意の自然数, さらに

$$\alpha_- = \min\{\operatorname{Re}\alpha_j\,;\, j \text{ s.t. } \alpha_j \notin \mathbb{N}\}$$

である.

Remark 4. 原論文 [8] では上で述べたような単独高階型の方程式ではなく, 連立 1 階型の方程式を考察している.

彼らの結果は, 局所解の係数の漸近挙動に接続係数が現れることを明らかにした先駆的な結果である. この結果を一般化超幾何微分方程式の接続係数の決定のために用いることにする.

では命題 1 の証明の大まかな流れを与える. 命題 1 の主張は

$$\left(\begin{array}{cccc|c} d_0^{(1)} & & & & \\ d_1^{(1)} & d_0^{(2)} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ d_{n-2}^{(1)} & d_{n-3}^{(2)} & \cdots & d_0^{(n-1)} & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & d_0^{(n)} \end{array}\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0;\boldsymbol{\beta}_0;1) \\ -\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_0)_1}{(\boldsymbol{\beta}_0)_1}{}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0+1;\boldsymbol{\beta}_0+1;1) \\ \vdots \\ \dfrac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_0)_{n-2}}{(\boldsymbol{\beta}_0)_{n-2}}{}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0+n-2;\boldsymbol{\beta}_0+n-2;1) \\ \dfrac{\Gamma(\boldsymbol{\beta}_0,\beta_n)}{\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_0)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

と表されるので, 証明を 2 ステップに分けて考える:

Step 1. To derive

$$d_0^{(n)}c_n = \frac{\Gamma(\boldsymbol{\beta}_0,\beta_n)}{\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_0)}. \tag{10}$$

Step 2. To derive

$$\sum_{j=1}^{i} d_{i-j}^{(j)}c_j = \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_0)_{i-1}}{(\boldsymbol{\beta}_0)_{i-1}}{}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0+i-1,\boldsymbol{\beta}_0+i-1;1) \tag{11}$$

for $1 \le i \le n-1$.

Step 2 について少し補足しておこう. 関係式 (11) は (9) に現れる $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ の間の関係を与えているが, これらを書き下すと

$$\begin{aligned} d_0^{(1)}c_1 &= {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0,\boldsymbol{\beta}_0;1), \\ d_0^{(2)}c_2 + d_1^{(1)}c_1 &= -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_0)_1}{(\boldsymbol{\beta}_0)_1}{}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0+1,\boldsymbol{\beta}_0+1;1), \\ &\vdots \\ d_0^{(n-1)}c_{n-1} + \cdots + d_{n-2}^{(1)}c_1 &= \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_0)_{n-2}}{(\boldsymbol{\beta}_0)_{n-2}}{}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0+n-2;\boldsymbol{\beta}_0+n-2;1) \end{aligned}$$

となる．これを行列を使って書き直すと

$$\begin{pmatrix} d_0^{(1)} & & & \\ d_1^{(1)} & d_0^{(2)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_{n-2}^{(1)} & d_{n-3}^{(2)} & \cdots & d_0^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0;\boldsymbol{\beta}_0;1) \\ -\frac{(\boldsymbol{\alpha}_0)_1}{(\boldsymbol{\beta}_0)_1}{}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0+1;\boldsymbol{\beta}_0+1;1) \\ \vdots \\ \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_0)_{n-2}}{(\boldsymbol{\beta}_0)_{n-2}}{}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0+n-2;\boldsymbol{\beta}_0+n-2;1) \end{pmatrix}.$$

となり，我々が示すべき式が得られる．

3.1 Step 1. (10) の導出

以下

$$y_1^{[0]}(x) = {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0;\boldsymbol{\beta}_0;x) = \sum_{m\geq 0} a_m x^m, \quad a_m = \frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_m\cdots(\alpha_n)_m}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m\cdots(\beta_{n-1})m!}$$

とする．まず $y_1^{[0]}(x)$ と基本解系 (5) に対して定理 2 を用いると，

$$a_m = \frac{\Gamma(m+\beta_n)}{\Gamma(m+1)}\left\{\sum_{\ell=0}^{k}\left(\prod_{s=1}^{\ell}\frac{-s+\beta_n}{m-s+\beta_n}\right)d_\ell^{(n)}\right\}\frac{c_n}{\Gamma(\beta_n)} + O(m^{\mathrm{Re}\,\beta_n-k-2}), \quad m\to\infty$$

が得られる．ここで k は任意の自然数なので，この式において $k=0$ としてもよい．すると

$$a_m = \frac{\Gamma(m+\beta_n)}{\Gamma(m+1)}d_0^n\frac{c_n}{\Gamma(\beta_n)} + O(m^{\mathrm{Re}\,\beta_n-2})$$

が得られる．さらに Stirling の公式より

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\beta_n)} = m^{1-\beta_n}(1+O(m^{-1}))$$

が成り立つので，これを使うと

$$d_0^{(n)}c_n = \frac{\Gamma(\beta_n)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\beta_n)}a_m + O(m^{-1}) \tag{12}$$

が得られる．さらに

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_m\cdots(\alpha_n)_m}{(\beta_1)_m(\beta_2)_m\cdots(\beta_{n-1})m!} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1+m)\Gamma(\alpha_2+m)\cdots\Gamma(\alpha_n+m)}{\Gamma(\beta_1+m)\Gamma(\beta_2+m)\cdots\Gamma(\beta_{n-1}+m)\Gamma(1+m)}\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\cdots\Gamma(\beta_{n-1})}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_n)} \end{aligned}$$

を (12) に代入することで

$$d_0^{(n)}c_n = \frac{\Gamma(\boldsymbol{\beta}_0,\beta_n)}{\Gamma(\boldsymbol{\alpha}_0)}\frac{\Gamma(\alpha_1+m,\alpha_2+m,\ldots,\alpha_n+m)}{\Gamma(\beta_1+m,\ldots,\beta_{n-1}+m,\beta_n+m)} + O(m^{-1}) \tag{13}$$

が得られる．さらにもう一度 Stirling の公式を使うと

$$\frac{\Gamma(\alpha_1+m,\alpha_2+m,\ldots,\alpha_n+m)}{\Gamma(\beta_1+m,\ldots,\beta_{n-1}+m,\beta_n+m)} \to m^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n-(\beta_1+\cdots+\beta_{n-1}+\beta_n)} = 1, \quad m\to\infty$$

がわかる．ゆえに (13) において $m\to\infty$ という極限を取ることで (10) が得られる．

3.2　Step 2. 関係式 (11) の導出

関係式 (11) は次の 2 つの命題を組み合わせることで得られる:

命題 2. $1 \leq i \leq n-1$ に対して

$$\sum_{j=1}^{i} d_{i-j}^{(j)} c_j = \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!} \sum_{h=0}^{m} [h]_{i-1} a_h + O(m^{\mathrm{Re}\,\beta_n + i - 1}), \quad m \to \infty \tag{14}$$

が成り立つ. ここで

$$[h]_j = \begin{cases} 1 & j = 0, \\ h(h-1)(h-2)\cdots(h-j+1) & j \geq 1 \end{cases}$$

とした.

命題 3. $\mathrm{Re}\,\beta_n < -n+2$ を仮定すると, $1 \leq i \leq n-1$ に対して次が成り立つ:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{h=0}^{m} [h]_{i-1} a_h = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_0)_{i-1}}{(\boldsymbol{\beta}_0)_{i-1}} {}_nF_{n-1}(\boldsymbol{\alpha}_0 + i - 1, \boldsymbol{\beta}_0 + i - 1; 1). \tag{15}$$

証明は省略する. 詳しくは [1] をご参照いただきたい.

参考文献

[1] S. Adachi, On a Connection Problem for the Generalized Hypergeometric Equation, arXiv:2008.03726.

[2] F. Beukers and G. Heckman, Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n-1}$, Invent. math., **95** (1989), 325–354.

[3] 原岡喜重, 「超幾何関数」, すうがくの風景 7, 朝倉書店, 2002.

[4] Y. Matsuhira and H. Nagoya, Connection problem for the generalized hypergeometric function, arXiv:1904.02935.

[5] K. Mimachi, Connection matrices associated with the generalized hypergeometric function ${}_3F_2$, Funkcialaj Ekvacioj **51** (2008), 107–133.

[6] K. Mimachi, Intersection Numbers for Twisted Cycles and the Connection Problem Associated with the Generalized Hypergeometric Function ${}_{n+1}F_n$, International Mathematics Research Notices, Volume **2011**, Issue 8, (2011), 1757–178.

[7] 西本敏彦, 「超幾何・合流型超幾何微分方程式」共立出版, 1998.

[8] R. Schäfke and D. Schmidt, Connection problems for linear ordinary differential equations in the complex domain. In: Martini R. (eds) Geometrical Approaches to Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol **810**. Springer, Berlin, Heidelberg, 1980.

[9] F. C. Smith, Relations among the fundamental solutions of the generalized hypergeometric equation when $p = q+1$. Non-logarithmic cases, Bull. Amer. Math. Soc., **44** (1938), 429–433.