

Contracting self-similar group actions and their operator algebras

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
吉田啓佑 (Keisuke YOSHIDA)

概要

Nekrashevych 氏によって、自己相似群作用と呼ばれる Cantor 空間上の「フラクタル的」な群作用からその情報を反映した C^* 環が構成された。今回の講演ではある種の有限性が仮定された自己相似群作用を扱い、それらから得られる C^* 環あるいは von Neumann 環の性質について得られた結果を発表する。具体的には自己相似群作用にどのような仮定を課したときに、 C^* 環の単純性や核性、もしくは von Neumann 環の従順性が得られるのかについて検討する。

1 導入

作用素環論とは関数解析を用いて位相付代数を研究する分野である。ここで位相付代数とは具体的には Hilbert 空間上の有界線形作用素全体がなす環の $*$ -部分環（積は作用素の合成で定める）であり、扱う位相によって C^* 環と von Neumann 環に大別される。ノルム位相で閉じた $*$ -部分環を C^* 環と呼び、強作用素位相で閉じたものを von Neumann 環と呼ぶ（一般に強作用素位相で閉じていればノルム位相でも閉じているので、すべての von Neumann 環は C^* 環であるが、通常はこれらの二つを区別する）。作用素環論に関する日本語で書かれた教科書は [13, 14, 12] 等がある。上の定義だけでは非自明な作用素環の具体例として、compact Hausdorff 空間上の連続関数全体がなす環や測度空間上の本質的に有界な関数全体が定める環（どちらの例においても各演算は各点ごとに定める）が知られている。さらに（積について）可換な C^* 環はなんらかの位相空間上の連続関数環と、可換な von Neumann 環は L^∞ 関数がなす環とそれぞれ同型であることは古くから知られる基本的な事実である。

力学系から作用素環を構成し、その作用素環の性質（例えば K 群のような作用素環の不変量）を元の力学系と関連付けて記述するという研究は作用素環の研究課題の一つである。そのような研究の例としては、Cuntz–Krieger 環と呼ばれる C^* 環と subshift の関連に着目した研究や複素力学系から構成された Cuntz–Pimsner 環に関する研究 ([6])、自己相似群作用（次の章で定義する）から Nekrashevych 氏によって構成された Cuntz–Pimsner 環（便宜上ここでは Nekrashevych 環と呼ぶ）についての研究 ([9, 10]) 等が挙げられる（今回の講演では Cuntz–Krieger 環や Cuntz–Pimsner 環の一般論をほとんど用いないので、ここでは Cuntz–Krieger 環あるいは Cuntz–Pimsner 環について解説はしない）。今回は自己相似群作用から構成される作用素環を考察した結果について講演する。

自己相似群作用から構成される作用素環のどのような性質に着目するかについて説明するために、

もう一度作用素環の一般論に触れる．作用素環論において次で定義する状態と呼ばれる線形汎関数は重要な対象の一つである．

定義 1.1 C^* 環 A 上の作用素ノルムが 1 であるような線形汎関数 φ が任意の $a \in A$ について $\varphi(a^*a) \geq 0$ を満たすとき, φ を状態と呼ぶ．

状態の具体例として行列環の上の正規化されたトレースや確率測度空間における積分などが挙げられる．これら 2 つの例は次に記述するような良い性質を持った状態である．

定義 1.2 C^* 環 A 上の状態 φ が任意の $a, b \in A$ について $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ を満たすとき, φ は tracial であると言う．

上述のように関数環と同型になるものを除いて, 作用素環は積について非可換である．にもかかわらず tracial な状態がもし存在すればそれは有用な道具になり得る．しかしながら任意の作用素環について tracial な状態が存在するとは限らない．今回取り扱う Nekrashevych 環も tracial な状態を持たない．そのような場合には後述の KMS 状態 (KMS は Kubo-Martin-Schwinger の略) と呼ばれる状態を用いることがある．簡単に述べれば, KMS 状態とは作用素環の上の加法群 $\mathbb{R}$ による群作用の分だけズレを許容したものである．例えば σ -有限な III 型 von Neumann 環などは tracial な状態を持たないものの KMS 状態を足掛かりにして, 様々なことが明らかにされた (今日では Tomita-Takesaki 理論と呼ばれている [12] 参照)．Nekrashevych 環に関しても自然な $\mathbb{R}$ 作用に対する KMS 状態が望ましい条件の下では存在し, 一意に定まる (実際にはもう少し強いことが言える)．

次にただ一つ存在する KMS 状態の GNS 表現 (GNS は Gelfand-Naimark-Segal の略) について考える．この GNS 空間上で Nekrashevych 環の二重可換子環を考える．ここで述べた操作は, 簡単に述べれば, ただ一つ存在する KMS 状態から Hilbert 空間を作り, その空間上で Nekrashevych 環の強作用素位相による閉包 (これは von Neumann 環になる) を考えるということである．この von Neumann 環の構造は従順性が成り立つ場合には完全に決定される．今回の講演では従順性を与える十分条件をいくつか考察する．

2 自己相似群作用

この章では始めに自己相似群作用に関する定義や性質について述べる．その後, [9, 10] に従って Nekrashevych 環の構成法を述べる．

自己相似群作用を定義するのに必要な記号を次の様に用意する． X を $|X| \geq 2$ なる有限集合とし, $X := \bigcup_{n \geq 0} X^n$ とする．ただし $X^0 = \emptyset$ とする．つまり X^* の各元は X 上の有限語である． $u \in X^*$ に対して語の長さを $|u|$ で記述する．この時, $u \in X^n$ であることと $|u| = n$ であることは同値である． X^ω を X の元たちから成る片側無限列全体とする． X^ω に離散位相たちの積位相を導入するとカントール集合と同相になる． X 上の重みが均等な数え上げ確率測度から, X^ω 上の積測度が定義される．今回この測度を μ と書く． $u \in X^n$ としたとき, 筒集合

$$uX^\omega := \{w \in X^\omega \mid w \text{ の最初の } n \text{ 文字が } u \text{ と一致する} \}$$

の測度は $\mu(uX^\omega) = |X|^{-n}$ で与えられる．

X^ω 上の自己相似群作用は以下で定義される.

定義 2.1 ([9, Definition 2.1]) 群 G の X^ω 上の忠実な作用を考える. 任意の $g \in G$ と $x \in X$ に対し $h \in G$ と $v \in X$ が存在して, 任意の $w \in X^\omega$ について

$$g(xw) = vh(w) \quad (1)$$

を満たすとき, この作用を自己相似群作用と呼ぶ.

等式 (1) を繰り返し使うことで, 任意の $g \in G$ と $u \in X^*$ に対し $h \in G$ と $v \in X^{|u|}$ が存在して, 任意の $w \in X^\omega$ について

$$g(uw) = vh(w)$$

が成り立つ. 上の h と v は g と u から一意に定まるので本レポートでは $h = h(g, x), v = v(g, x)$ と書く.

次のような自己相似群作用の例が知られている.

例 2.2 $X = \{0, 1\}$ とし, g_1 及び g_2 を次で定める X^ω 上の同相写像とする.

$$\begin{aligned} g_1(0w) &= 1w, \quad g_1(1w) = 0w, \\ g_2(0w) &= 0g_1(w), \quad g_2(1w) = 1g_2(w), \end{aligned}$$

ただし $w \in X^\omega$ は任意で, $w_1 \in X^\omega$ を $1 \in X$ を並べ続けるような列としたとき, $g_2(w_1) = w_1$ と定める. このとき g_1 と g_2 で生成される自己同相群の中の部分群は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と同型であり, この対応によって $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ の自己相似群作用が与えられている.

例 2.3 $X = \{0, 1\}$ とし, a, b, c, d を次で定める X^ω 上の同相写像とする.

$$\begin{aligned} a(0w) &= 1w, \quad a(1w) = 0w, \\ b(0w) &= 0a(w), \quad b(1w) = 1c(w), \\ c(0w) &= 0a(w), \quad c(1w) = 1d(w), \\ d(0w) &= 0w, \quad d(1w) = 1b(w), \end{aligned}$$

ただし $w \in X^\omega$ は任意で, $w_1 \in X^\omega$ を $1 \in X$ を並べ続けるような列としたとき, b, c, d は w_1 を動かさないとする. a, b, c, d で生成される同相写像群の部分群を Grigorchuk 群と呼ぶ.

Grigorchuk 群は解析的群論 (離散群を Hilbert 空間に表現し, 関数解析を用いて群を調べる分野) においていくつかの興味深い性質を持つが, 本レポートでは自己相似群の代表例として挙げるに留める.

以下ではつねに可算群 G が自己相似に X^ω に作用しているとする. 次のような C^* 環を考える.

定義 2.4 ([9, Definition 3.1]) 以下に述べる関係式を満たす G (G の各元は unitary であり, G 内のすべての関係式は保存される) と $\{S_x \mid x \in X\}$ から生成される普遍 C^* 環を $\mathcal{O}_{G_{\max}}$ と書く.

$$S_x^* S_y = \delta_{x,y}, \quad (2)$$

$$\sum_{x \in X} S_x S_x^* = 1, \quad (3)$$

$$gS_x = S_{v(g,x)}h(g,x), \quad (4)$$

ただし $g \in G, x, y \in X$ である.

一般に $\mathcal{O}_{G_{\max}}$ が単純かどうか (つまりノルムで閉じた両側イデアルを持つかどうか) はわかっていない. しかしながら以下で述べる G -generic な点を考えることにより, $\mathcal{O}_{G_{\max}}$ の単純な商環を構成することができる.

定義 2.5 ([9, Definition 4.1]) $g \in G$ を固定する. $w \in X^\omega$ が g の不動点ではない. あるいは g の不動点のみから構成される w の開近傍が存在するかのいずれかであるとき, w は g -generic であると言う. g -generic な点全体の集合を $(X^\omega)_{g\text{-gen}}$ で書き, また $(X^\omega)_{G\text{-gen}} := \bigcap_{g \in G} (X^\omega)_{g\text{-gen}}$ と定める. $(X^\omega)_{G\text{-gen}}$ の元を G -generic な点と呼ぶ.

定義から $(X^\omega)_{g\text{-gen}}$ の補集合は g の孤立した不動点全体になる. 例えば例 2.3 では w_1 を除くすべての点が b, c, d の g -generic な点である. また, 定義から各 $(X^\omega)_{g\text{-gen}}$ は稠密な開集合であるので $(X^\omega)_{G\text{-gen}}$ も稠密な部分集合である. 後の議論のために次の様に記号を用意する.

Notation 2.6 有限語 $u \in X^*$ に対して, $S_u: X^\omega \rightarrow uX^\omega$ を $S_u(w) := uw$ で定める. これは全単射連続写像であり逆写像を S_u^* で書く.

上の記号は $\mathcal{O}_{G_{\max}}$ の定義にある S_x と重なるが, 後に同一視するので差し支えない. また

$$\langle G, X \rangle := \{S_{u_1} u g S_{u_2}^* \mid u_1, u_2 \in X^*, g \in G\}$$

と定める. この時 G -generic よりも強い以下の条件を考える.

定義 2.7 ([9, Definition 9.1]) $f \in \langle G, X \rangle$ を固定する. $w \in X^\omega$ が f の不動点ではない, あるいは f の不動点のみから構成される w の開近傍が存在する, あるいは f は w の上で定義されていない, のいずれかであるとき, w は f -generic であると言う. f -generic な点全体の集合を $(X^\omega)_{f\text{-gen}}$ で書き, また $(X^\omega)_{G\text{-gen}}^S := \bigcap_{f \in G} (X^\omega)_{f\text{-gen}}$ と定める. $(X^\omega)_{G\text{-gen}}^S$ の元を strict に G -generic な点と呼ぶ.

G -generic の場合と同様に $(X^\omega)_{G\text{-gen}}^S$ は稠密部分集合である.

X^ω 上の Bernoulli 測度 μ に対して測度論的な観察により以下が言える (詳細は [11] 参照).

補題 2.8 以下は同値である.

1. $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$.
2. すべての $g \in G$ に対して $\mu((X^\omega)_{g\text{-gen}}) = 1$.
3. $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}^S) = 1$.
4. すべての $f \in \langle G, X \rangle$ に対して $\mu((X^\omega)_{f\text{-gen}}) = 1$.

定理 2.9 すべての可算群の自己相似群作用に対して $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 0$ もしくは $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$ のいずれかが成り立つ.

系 2.10 すべての可算群の自己相似群作用に対して $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}^S) = 0$ もしくは $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}^S) = 1$ のいずれかが成り立つ.

単純な商環の構成のために strict に G -generic な点から Hilbert 空間を作る. $w_0 \in (X^\omega)_{G\text{-gen}}^S$ に対して, $\langle G, X \rangle$ による軌道を $\langle G, X \rangle(w_0)$ で書く. $\langle G, X \rangle(w_0)$ は可算集合であり, $\langle G, X \rangle(w_0)$ 上の 2 乗可積分関数全体を $l^2(\langle G, X \rangle(w_0))$ と書く. $w \in \langle G, X \rangle(w_0)$ の上の定義関数を δ_w とし, $u \in X^\omega$ と $g \in G$ に対して,

$$S_u(\delta_w) := \delta_{uw}, \quad g(\delta_w) := \delta_g(w)$$

と定める. このとき S_u と g はそれぞれ isometry と unitary になる. $\mathcal{O}_{G\text{max}}$ の普遍性より, $\mathcal{O}_{G\text{max}}$ から $B(l^2(\langle G, X \rangle(w_0)))$ への準同型 π_{w_0} が得られる. π_{w_0} による像は次の意味で一意的である.

定理 2.11 [10, Theorem 3.3] $\pi_{w_0}(\mathcal{O}_{G\text{max}})$ たちは $w_0 \in (X^\omega)_{G\text{-gen}}^S$ の取り方に依らず全て同型である.

この定理から $\mathcal{O}_{G\text{min}} := \pi_{w_0}(\mathcal{O}_{G\text{max}})$ と書いてもよい. 次の結果も Nekrashevych 氏によって示されている.

定理 2.12 $\mathcal{O}_{G\text{min}}$ は単純である.

$\mathcal{O}_{G\text{min}}$ を本レポートでは Nekrashevych 環と呼ぶことにする.

3 KMS 状態とその GNS 空間

この章では Nekrashevych 環上の KMS 状態とそこから構成される von Neumann 環について解説する. 第 1 章で触れた様に KMS 状態は C^* 環上の群作用が与えられたときに定義される. ここでは次で与えるゲージ作用と呼ばれる $\mathbb{R}$ の作用を考える.

Notation 3.1 $\mathcal{O}_{G\text{min}}$ 上の $\mathbb{R}$ のゲージ作用 Γ を

$$\Gamma_t(g) := g, \quad \Gamma_t(S_x) := e^{it} S_x$$

で与える. ただし $g \in G$, $t \in \mathbb{R}$ 及び $x \in X$ は任意.

$a \in \mathcal{O}_{G\text{min}}$ を止めておいて, $\Gamma_t(a)$ を $\mathcal{O}_{G\text{min}}$ 値の $\mathbb{R}$ 上の関数と見なす. $\Gamma_t(a)$ が $\mathbb{C}$ 上の整関数に拡張されるような a 全体を $\mathcal{O}_{G\text{min}, \Gamma}$ と書く.

一般論から $\mathcal{O}_{G\text{min}, \Gamma}$ は稠密な $\mathcal{O}_{G\text{min}}$ の部分 $*$ -環である. 次に KMS 状態を定義する. 本来はより一般の場合について定義されるが, ここでは本講演で扱うゲージ作用についてのみ定義する. 詳しくは [12] や [3] などにまとまっている.

定義 3.2 $\beta > 0$ とする. $\mathcal{O}_{G\text{min}}$ 上の状態 φ が β -KMS 条件を満たすとは任意の $a \in \mathcal{O}_{G\text{min}, \Gamma}$ と

$b \in \mathcal{O}_{G_{\min}}$ に対して

$$\varphi(ab) = \varphi(b\Gamma_{i\beta}(a))$$

が成立するときのことを言う. β -KMS 条件を満たす状態を β -KMS 状態と呼び, β -KMS 状態全体の集合を $K_\beta(\Gamma)$ と書く.

$\mathcal{O}_{G_{\max}}$ の定義にあった等式 (3) から $\beta \neq \log |X|$ であるような β -KMS 状態は存在しないことがわかる. $\beta = \log |X|$ の場合は次のように存在と一意性が言える.

定理 3.3 [11] Γ の不動点環を

$$\mathcal{O}_{G_{\min}}^\Gamma := \{a \in \mathcal{O}_{G_{\min}} \mid \text{全ての } t \in \mathbb{R} \text{ について } \Gamma_t(a) = a\}$$

で与える. $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$ とすると $\mathcal{O}_{G_{\min}}^\Gamma$ の上の tracial な状態 φ がただ一つ存在する. この状態は任意の $g \in G$ について $\varphi(g) = \mu((X^\omega)_g)$ を満たす. ただし, $(X^\omega)_g$ は g の不動点の集合である.

この結果から次が従う.

系 3.4 $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$ の時 Γ に対する $\log |X|$ -KMS 状態がただ一つ存在する.

Nekrashevych 環のうえのただ一つの KMS 状態 φ に対して,

$$\langle a, b \rangle := \varphi(a^*b)$$

と定めるとこれは $\mathcal{O}_{G_{\min}}$ の上の内積になる ($\mathcal{O}_{G_{\min}}$ が単純であることから $\varphi(a^*a) = 0$ となるのは $a = 0$ のときのみである). この内積空間の完備化を H_φ と書く. このとき $\mathcal{O}_{G_{\min}}$ は $B(H_\varphi)$ の部分*-環とみなせる. $\mathcal{O}_{G_{\min}}$ の強作用素位相による閉包を $\mathcal{O}_G''$ と書く. このとき定理 3.3 から次が言える.

定理 3.5 $\mathcal{O}_G''$ は $\text{III}_{|X|^{-1}}$ 型の因子環である.

因子環とは von Neumann 環の最小構成単位であり, I , II_1 , II_∞ , III_λ 型のいずれかに分類できる (ただし $0 \leq \lambda \leq 1$). von Neumann 環が有限次元の部分環によって近似されるとき従順であると言う. 従順な II_1 , II_∞ , III_λ 型 (ただし $0 < \lambda \leq 1$) はそれぞれただ一つずつしかないことが分かっている. 従って, $\mathcal{O}_G''$ が従順な場合は $\mathcal{O}_G''$ は完全に決定される.

4 諸命題

この章では $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$ や従順性を与える十分条件について述べる. $(X^\omega)_{G\text{-gen}}$ の定義から次が従う.

Proposition 4.1 自己相似群作用が free (つまり群の単位元以外の不動点の測度は 0) のとき, $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$.

自己相似群作用の有限生成に相当する概念として次の contracting と呼ばれる性質がある.

定義 4.2 以下を満たす有限集合 $N \subset G$ が存在するとき、自己相似群作用が contracting であると言う：任意の $g \in G$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在して、 $\{h(g, u) \mid u \in X^*, |u| \geq n\} \subset N$ が成り立つ。

例 2.2, 例 2.3 の例はいずれも contracting である。次の命題は [8] の Theorem 7.3 の証明から得られる。

Proposition 4.3 Contracting な自己相似群作用について $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$ である。

以上の様に、contracting や free な自己相似群作用は KMS 状態が一意に存在するクラスである。実際の例を見てみると contracting または free であることはほとんどである。Contracting ではないが $\mu((X^\omega)_{G\text{-gen}}) = 1$ であるような例は知られている ([2] 参照)。次に従順性が得られる例について検討する。一般に核的な C^* 環の GNS 表現から得られる von Neumann 環は従順であるので、Nekrashevych 環の核性について考察する。次のようなことはすでに知られている ([4] 参照)。

Proposition 4.4 群 G が従順の場合、Nekrashevych 環は核的である。

また、[10] にあるように、任意の $x, y \in X$ に対してある $g \in G$ が存在して $gS_x = S_y$ となるとき、 $\mathcal{O}_{G_{\min}}^\Gamma$ は G と X^ω の上の連続関数全体から生成されている。このとき $\mathcal{O}_{G_{\min}}^\Gamma$ は G と $C(X^\omega)$ の接合積の形で書ける（一般によく研究される full あるいは reduced な接合積とは限らない）。このことから次が言える。

Proposition 4.5 自己相似群作用が従順であるとき、Nekrashevych 環は核的である。

最後に測度的な従順性の十分条件を与える。 $w \in X^\omega$ に対し、 w の最初の n 文字を $w^{(n)} \in X^n$ で表す。このとき各 $g \in G$ に対して

$$Y_g^n = \{w \in X^\omega \mid h(g, w^{(n)}) = e\}$$

と定めるとこれは集合の増加列である。このとき次のことが言える ([11] 参照)。

Proposition 4.6 $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_g^n) = 1$ のとき、 $\mathcal{O}_G''$ は従順である。

参考文献

- [1] N. P. Brown and N. Ozawa, *C*-algebras and finite-dimensional approximations*. Graduate Studies in Mathematics, 88. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [2] N. Brownlowe, N. S. Larsen, J. Ramagge and N. Stammeier, *C*-algebras of right LCM monoids and their equilibrium states*, arXiv:1902.02674.
- [3] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2. Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics*. Second edition. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, (1997). xiv+519 pp.
- [4] R. Exel and E. Pardo, *Self-similar graphs, a unified treatment of Katsura and Nekrashevych C*-algebras*, Adv. Math. **306** (2017), 1046–129.

- [5] M. Izumi, *Subalgebras of infinite C -algebras with finite Watatani indices. I. Cuntz algebras.* Comm. Math. Phys. **155** (1993), no. 1, 157–182.
- [6] T. Kajiwara, and Y. Watatani, *C^* -algebras associated with complex dynamical systems.* Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), no. 3, 755–778.
- [7] M. Laca and S. Neshveyev, *KMS states of quasi-free dynamics on Pimsner algebras.* J. Funct. Anal. **211** (2004), no. 2, 457–482.
- [8] M. Laca, I. Raeburn, J. Ramagge, M. F. Whittaker, *Equilibrium states on the Cuntz–Pimsner algebras of self-similar actions.* J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 11, 6619–6661.
- [9] V. V. Nekrashevych, *Cuntz–Pimsner algebras of group actions.* J. Operator Theory **52** (2004), no. 2, 223–249.
- [10] V. V. Nekrashevych, *C^* -algebras and self-similar groups.* J. Reine Angew. Math. **630** (2009), 59–123.
- [11] K. Yoshida, *A von Neumann algebraic approach to self-similar group actions*, to be appear on Internat. J. Math. **30** (2019).
- [12] 梅垣壽春, 大矢雅則, 日合文雄, 作用素代数入門 : Hilbert 空間より von Neumann 代数, 現代の数学 **23**, 共立出版 (1985)
- [13] 生西明夫・中神祥臣, 作用素環入門 I 関数解析とフォン・ノイマン環, 岩波書店 (2007)
- [14] 生西明夫・中神祥臣, 作用素環入門 II 関数解析とフォン・ノイマン環, 岩波書店 (2007)