蔵本モデルにおける臨界指数

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻
米田亮介 (Ryosuke YONEDA)

1　同期現象

振動子がそれぞれ固有の自然周期を持っているときに振動子間の相互作用を受けたり周期的な外力を受けたりすることで同じ周期で振動するようになる現象を**同期現象**という。17 世紀後半に Huygens が病床で 2 つの振り子時計の間に同期が起こることを観察 [1] して以来、多くの実例が報告されている。メトロノーム [2] やホタルの光 [3, 4]、カエルの唱和 [5]、ジョセフソン素子 [6, 7] など様々なところで同期現象は見られる。

2　蔵本モデル

同期現象は**結合振動子系**を通して研究され、特に**蔵本モデル**は結合振動子系の中でも研究されてきた。蔵本モデルは N 体の振動子の位相 $\{\theta_i\}_{i=1}^N$ についての次の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i) \tag{1}$$

で記述される [8]。ここで ω_i は振動子が固有に持つ**自然振動数**と呼ばれるものであり、各自然振動数は確率密度関数 $g(\omega)$ に従ってランダムに選ばれる。また、第 2 項は相互作用を表す項である。K は**結合強度**とよばれ、結合の強さを表す。

蔵本モデルで同期を表すパラメータとして、**秩序変数**がある。秩序変数 z は

$$z = re^{i\varphi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j} \tag{2}$$

で定義される。これは振動子が複素平面の単位円上を動いていると見たときの振動子たちの重心に対応するもので、z の大きさ r について次のように考えることができる。図 1 に示すように、

- $r \sim 0$ のとき、重心が原点に近いので振動子は円周上にバラけていて、非同期状態を表す。
- $r \sim 1$ のとき、重心は円周近くに偏っていて、同期状態を表す。

よって、r の大きさを計算することがどれほど同期しているかをみるための指標になるのである。特に、結合強度と秩序変数の関係を調べることが大事になる。

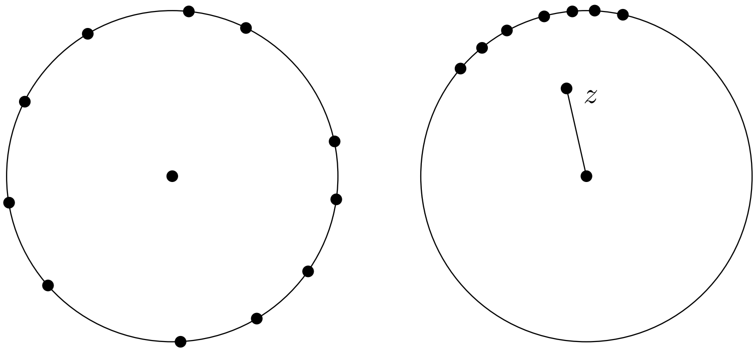

図 1　$\mathbb{S}^1$ 上を運動する振動子を模式的に表したもの．左は $r \approx 0$ で非同期状態を表す．右は $r \approx 1$ で同期状態を表す．

3　蔵本予想

$g(\omega)$ が一山対称だとしよう。このとき r, K として次の自己無矛盾方程式が得られることが知られている [9]。

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(Kr\sin\theta)\cos^2\theta \mathrm{d}\theta. \tag{3}$$

これより非同期状態である $r = 0$ は常に解であることが分かる。同期状態 $r \neq 0$ の K 依存性はどうだろうか。$g(\omega)$ が Lorentz 分布

$$g(\omega) = \frac{\Delta}{\pi}\frac{1}{\omega^2 + \Delta^2} \tag{4}$$

の場合には、$K_\mathrm{c} = 2\Delta$ として $K > K_\mathrm{c}$ で

$$r = \sqrt{1 - \frac{K}{K_\mathrm{c}}} \tag{5}$$

となることが計算できる (図 3 を参照)。蔵本は自己無矛盾方程式による解析で秩序変数と結合定数に関する予想を考えた。

Conjecture 1. 粒子数極限 $N \to \infty$ を考える。自然振動数の分布 $g(\omega)$ が一山対称な関数としたとき、$K_\mathrm{c} := 2/(\pi g(0))$ として

- $K < K_\mathrm{c}$ のとき $r = 0$ が漸近安定
- $K > K_\mathrm{c}$ では $r > 0$ が漸近安定

となる。

蔵本モデルは粒子数極限で連続の式に従うのだが、その自明解周りの線形作用素を考えると虚軸上に連続スペクトルがべったりと存在することが分かる。この連続スペクトルによって解の漸近挙動を

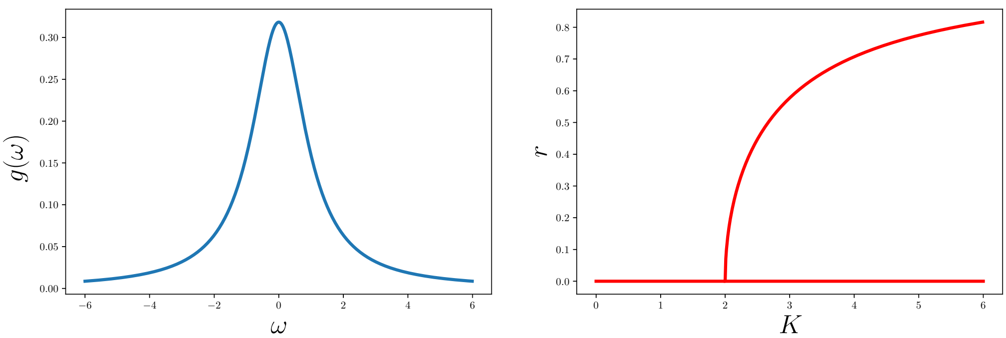

図 2　一山対称な Lorentz 分布 $g(\omega)$ と対応する秩序変数の結合強度に対する分岐図

調べるのが従来の関数解析の手法では困難だった。この問題は千葉によって導入された一般化スペクトル理論によって解決され、蔵本予想も証明された [10]。

4　臨界指数

臨界指数は統計力学で古くより研究されている非常に重要な指数であり、考えるモデルの詳細な情報によらず、普遍的な性質のみから決まると考えられている。例えば Ising モデルを考えてみる。Ising モデルは格子上に置かれたスピンが最近傍のスピンと相互作用を受けあうモデルであり、様々な格子のとり方がある。例えば 2 次元格子だと、正方格子、カゴメ格子などがあり、3 次元格子だと、立方格子、体心立方格子、面心立方格子などがある。このような格子においてそれぞれ Ising モデルを組み立ててシミュレーションしてみることを考える。そうすると、もちろん格子のとり方によって臨界点の値は変わってくるのだが、どの格子の上でも (次元が同じであれば) 臨界指数はきっちり同じであることがわかったのである。また臨界指数について研究することは対象とするモデルの背後に隠れた数理構造を見出すことにつながると考えられている。特に 2 次元 Ising モデルにおいては**共形場理論**と呼ばれる数理構造があり、それをもとに臨界現象が記述できることが知られている。これこそ臨界指数の奥深さであり、数々の物理学者たちをひきつけてきた所以である[*1]。

蔵本モデルで外力を通して定義される臨界指数を紹介しよう。蔵本モデルに外力を加えたモデルは

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i) - h\sin\theta_i \tag{6}$$

のように与えられる。外力付きの蔵本モデルにおける秩序変数の大きさを r_h と書くことにする。外力なしの通常の蔵本モデルにおける秩序変数とは $r_0 = r$ の関係が成立する。外力なしの場合に臨界点 K_c からの秩序変数の立ち上がりを表す臨界指数 β は

$$r \propto (K - K_\mathrm{c})^\beta \tag{7}$$

[*1] 相転移現象と臨界指数の奥深さ、面白さについては田崎さんの『統計力学 II』の最終章に詳しく述べられている。私もこの章を読んで臨界指数の研究をしたいと思うようになった。田崎さんの軽妙な語り口が非常に素晴らしい本なので一読の価値はあると思う。

で定義される。例えば (5) の場合には $\beta = 1/2$ である。次に蔵本モデルに外力を入れたときに**帯磁率 (susceptibility)**χ が定義できる。

$$\chi = \frac{\mathrm{d}r_h}{\mathrm{d}h}(h=0) = \lim_{h\to 0}\frac{r_h - r}{h} \tag{8}$$

これは小さな外力を加えたときに秩序変数がどれほど変化するかを表すものであり、臨界点で発散することが知られている。この発散具合を表す臨界指数が次で定義される。

$$\chi \propto |K - K_{\mathrm{c}}|^{-\gamma_\pm} \tag{9}$$

ここで $\gamma_\pm$ はそれぞれ $K < K_{\mathrm{c}}, K > K_{\mathrm{c}}$ での値である。また、臨界点直上で外力に対してどれくらい応答するのかを表す臨界指数が δ で、次のように定義される。

$$r_h \propto h^{1/\delta} \tag{10}$$

ここでは蔵本モデルやその拡張モデルに対して知られている臨界指数について紹介する。

はじめに分布関数 $g(\omega)$ が

$$g_n(\omega) = g_n(0) + C_n\omega^{2n} + \cdots \tag{11}$$

の形を持つようなものを考えよう。ただし $g_n(\omega)$ は一山対称性を仮定するので $C_n < 0$ とする。具体的には次の 2 つの分布関数の族が挙げられる。

$$\begin{aligned} g_n^{(L)}(\omega) &= \frac{n\sin(\frac{\pi}{2n})}{\pi}\frac{\Delta^{2n-1}}{\omega^{2n}+\Delta^{2n}}, \\ g_n^{(G)}(\omega) &= \frac{n\Delta}{\Gamma(\frac{1}{2n})}e^{-\Delta^{2n}\omega^{2n}} \end{aligned} \tag{12}$$

$g_n^{(L)}(\omega), g_n^{(G)}(\omega)$ はそれぞれ Lorentz 分布と Gauss 分布の一般化になっていることに注意する。(11) の形をした分布関数の場合には臨界指数が

$$\beta = \frac{1}{2n}, \quad \delta = 2n+1, \quad \gamma_\pm = 1 \tag{13}$$

となることが自己無矛盾方程式 (3) の計算から分かる [11]。また、このとき統計力学において臨界指数に対して成り立つ Widom の等式と呼ばれるスケーリング関係式

$$\gamma_\pm = \beta(\delta - 1) \tag{14}$$

が成り立つ。

(12) は $n \to \infty$ ではどちらも一様分布

$$g_\infty(\omega) = \frac{1}{2\Delta}\chi_{[-\Delta,\Delta]}(\omega) \tag{15}$$

に収束する。ここで $\chi_A(\omega)$ は特性関数で、$\omega \in A$ ならば 1、それ以外ならば 0 を取る関数である。一様分布の場合には連続転移はもはや起こさず臨界点直上で不連続な飛びが見られる。臨界点 K_{c} とそこでの飛びの値 r_{c} は

$$K_{\mathrm{c}} = \frac{4\Delta}{\pi}, \quad r_{\mathrm{c}} = \frac{\pi}{4} \tag{16}$$

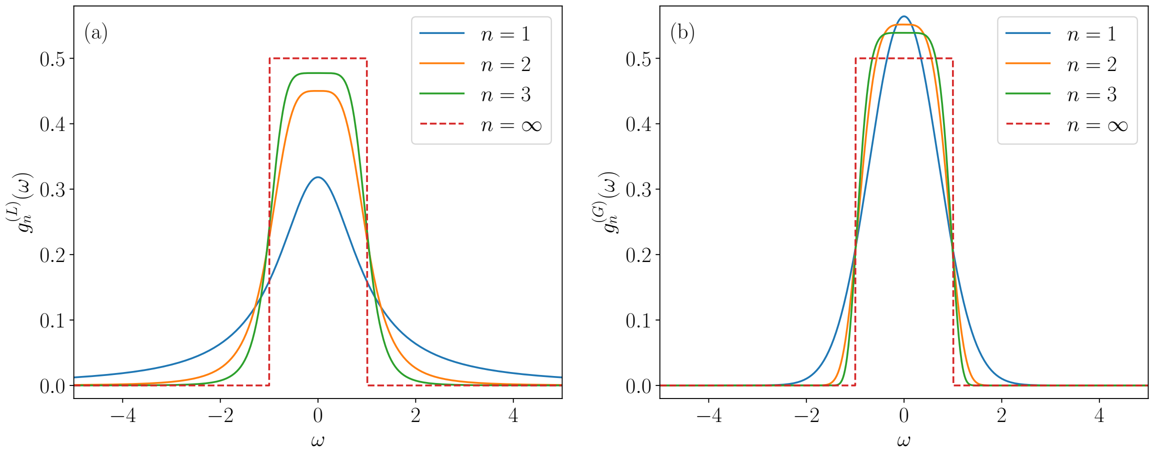

図 3　$\Delta = 1$ のときの $n = 1, 2, 3, \infty$ での $g_n^{(L)}(\omega), g_n^{(G)}(\omega)$ のグラフ。n が大きくなるにつれて一様分布 $g_\infty(\infty)$ に近づく様子が確認できる。

であり、そこでの秩序変数 r の K 依存性は

$$r - r_{\mathrm{c}} \propto (K - K_{\mathrm{c}})^{2/3} \tag{17}$$

と書けることがわかっている [12]。これより $g(\omega)$ が一様分布のときの臨界指数 β は $\beta = 2/3$ である。

次に蔵本モデルの結合を一般の周期関数 $\Gamma(\theta)$ とした結合振動子モデルを考える。

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\Gamma(\theta_j - \theta_i). \tag{18}$$

この結合振動子モデルは位相縮約から得られる式として広く研究されている。$\Gamma(\theta) = \sin\theta$ の場合には蔵本モデル (1) に戻る。$\Gamma(\theta)$ に $\sin 2\theta$ を加えた

$$\Gamma(\theta) = \sin\theta + a\sin 2\theta \tag{19}$$

の場合について興味深い結果がある [13, 14]。臨界点 K_{c} 近傍における秩序変数は

$$r \sim \frac{2(1-a)}{K_{\mathrm{c}}^3 C a}(K - K_{\mathrm{c}}) \propto K - K_{\mathrm{c}} \tag{20}$$

で与えられるのである。ここで C はコーシーの主値積分 $\mathcal{PV}$ を用いて

$$C = \mathcal{PV}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega \frac{g'(\omega)}{\omega} \tag{21}$$

と書ける。C は $g(\omega)$ が一山対称のときには負の値をとる定数である。これより $a < 0$ のときには臨界指数 β は $\beta = 1$ となることがわかる。他の臨界指数 $\delta, \gamma_\pm$ についても自己無矛盾方程式を用いて

$$\beta = 1, \quad \delta = 2, \quad \gamma_\pm = 1 \tag{22}$$

となることが計算できる。また、Widom の等式が成り立つこともわかる。ここで $0 < a < 1$ の場合には不連続転移が起きることに注意しておく。

表 1　蔵本モデルとその拡張モデルにおける臨界指数 β の値。結合関数 $\Gamma(\theta)$ が (19) のときのパラメーター a と分布関数 $g_n(\omega)$ の値によって場合分けしている。蔵本モデルで $g(\omega)$ が一様分布の場合には臨界点直上で飛びがあるので他と区別するために括弧を付けている。拡張した蔵本モデルにおいて $0 < a < 1$ のときには不連続転移があるため統計力学における一次相転移の類似から (1st-order) と書いてある。

	$a < 0$	$a = 0$	$0 < a < 1$
$n = 1$	1	$\dfrac{1}{2}$	(1st-order)
$n \geq 2$	1	$\dfrac{1}{2n}$	(1st-order)
$n = \infty$	1	$\left(\dfrac{2}{3}\right)$	(1st-order)

以上の臨界指数の結果を β の値について表 1 にまとめておく。このように蔵本モデルにおいては分布関数や結合関数のとり方によって多様な臨界指数が見られる。これらの臨界指数はいずれも自己無矛盾方程式 (3) による解析からも得られるのだが、(3) の導出には本質的に蔵本モデルにおいてすべての振動子がすべての振動子と繋がっていることに依っている。この考察から振動子間の結合が全結合でない場合、すなわちネットワーク上の結合である場合にどのような臨界指数を取るのかは自然な疑問である。最後にネットワーク上の蔵本モデルとその研究に関して概説する。

5　ネットワーク上の蔵本モデル

現実世界の人間関係や WWW のリンクの張られ方、ひいては論文の引用する、されるの関係など様々なところでネットワークが見られる。このようなネットワーク上の「もの」の動きを考えることはその様相を調べる上で非常に大事であり、ネットワーク上の力学系として定式化され近年非常に研究が盛んになっている。ネットワーク上の力学系、特にその臨界現象に関するレビュー論文としては [15] がある。蔵本モデルも例外ではなく、ネットワーク上に移行したものが様々に考案され研究されている。ネットワーク上の蔵本モデルの一つの定式化として次がある。

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{\langle k \rangle} \sum_{j \in \Lambda_i} \sin(\theta_j - \theta_i). \tag{23}$$

ここで $\langle k \rangle$ は考えるネットワークの平均次数である。また、Λ_i は i 番目の振動子に接続する振動子の添字集合である。考えるネットワークが全結合グラフの場合には $\langle k \rangle = N, \Lambda_i = \{1, 2, \ldots, N\}$ となり、蔵本モデル (1) に戻るので、この意味で蔵本モデルの拡張となっている。このモデルにおいて、理論的な成功を収めているものとして**グラフォン (graphon)** による定式化がある [16]。グラフォンは N 頂点に対して $O(N^2)$ 本の枝を持つような密なグラフの連続極限として定義されるもので、このグラフォンを用いてネットワーク上の蔵本モデルの連続極限を構成することができる。例えば Erdős–Rényi グラフは各頂点間に確率 p で枝を張るか張らないかを決めるようなグラフであり、これは連続極限で全結合グラフとほとんど定性的には変わらないことがわかる。これにより

Erdős–Rényi グラフ上の蔵本モデルは全結合の蔵本モデルと同じ臨界指数を持つことがわかる。[16] の中では他にもグラフォンが定義できるようなネットワークについての臨界点からの立ち上がりを議論しているが、その結果は全結合蔵本モデルと同じ臨界指数を示すことを示唆している。一方で、現実のネットワークは非常にスパースであることが多く、グラフォンが定義出来ないような場合が多い。代表的なスパースなネットワークとしてスモールワールドネットワークがある。スモールワールドネットワークは $O(N)$ 本の枝を持つのでグラフォンを定義することができないため、理論的な解析ができない。[17] ではスモールワールドネットワーク上の蔵本モデルについて、分布関数 $g(\omega)$ がガウシアンの場合に有限サイズスケーリングを用いて臨界指数を用いて計算しており、$\beta = 1/2$ であることを報告している。これは全結合蔵本モデルと同じ結果であり、他の分布関数 $g_n(\omega)$ や結合関数 $\Gamma(\theta)$ に対してどのような結果が得られるかはわからない。また、[18] ではスパースランダムネットワーク上の蔵本モデルにおける臨界指数を有限サイズスケーリングを用いて計算しており、β が 1/2 とは異なる値になることを報告している。この結果は $O(N^2)$ のランダムグラフ (Erdős–Rényi グラフ) は全結合蔵本モデルと同じ臨界指数を示すのに対して、$O(N)$ のランダムグラフは全結合蔵本モデルと異なった臨界指数を示すことを示唆する重要な結果である。このことから考えるネットワークの枝の本数が $O(N)$ か $O(N^2)$ であるかはその上の力学系に非自明な影響を与えることが考えられている。現状は $O(N)$ のネットワーク上の蔵本モデルに対する臨界指数の計算には理論的なアプローチは知る限り無いように思われ、有限サイズスケーリングを用いるのが常套手段となっている。今後 $O(N)$ のネットワーク上の蔵本モデルに対する連続極限を定義すること、またそのときに分布関数 $g(\omega)$ や結合関数 $\Gamma(\theta)$ に対して臨界指数がどのような値を取るのかを調べることは重要な問題として残っている。

さて、スモールワールドネットワーク上の蔵本モデルの分布関数による依存性を調べて見よう。スモールワールド性を持つネットワークを生成する代表的なモデルに Watts–Strogatz グラフがある [19]。Watts–Strogatz グラフは次のアルゴリズムで生成される。

- はじめに k-nearest neighbor ネットワークを作成する。つまり各ノードからは $2k$ 本のエッジが生えている。
- 各エッジについて確率 p で rewire する。このときエッジの重複とかループが出来ないように注意する。

$p = 0$ のときは rewire は起こらない。これは k-隣接グラフに対応する。また、$p = 1$ のときは完全に rewire され、Erdős–Rényi グラフに対応する。この Watts–Strogatz グラフの上での蔵本モデルは次のように定義される [17]。

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{2k} \sum_{j \in \Lambda_i} \sin(\theta_j - \theta_i). \tag{24}$$

この微分方程式を数値的に解くことで臨界指数を求めるのだが、臨界指数自体は $N \to \infty$ において定義されるものであるため N が有限サイズのときの数値計算結果から直接求める事はできない。そこで、有限サイズスケーリングを用いる。これは N が有限サイズのときに数値的に得られる秩序変

数の大きさを r_N と書くときに、あるスケーリング関数 F を用いて臨界点 $K_{\rm c}$ 近傍で

$$r_N = N^{-\beta/\bar{\nu}} F((K-K_{\rm c})N^{1/\bar{\nu}}) \tag{25}$$

と書けるとするものである [20]。有限サイズスケーリングの手法をもとに数値計算結果とそのスケーリングをまとめたものが図 4 である。

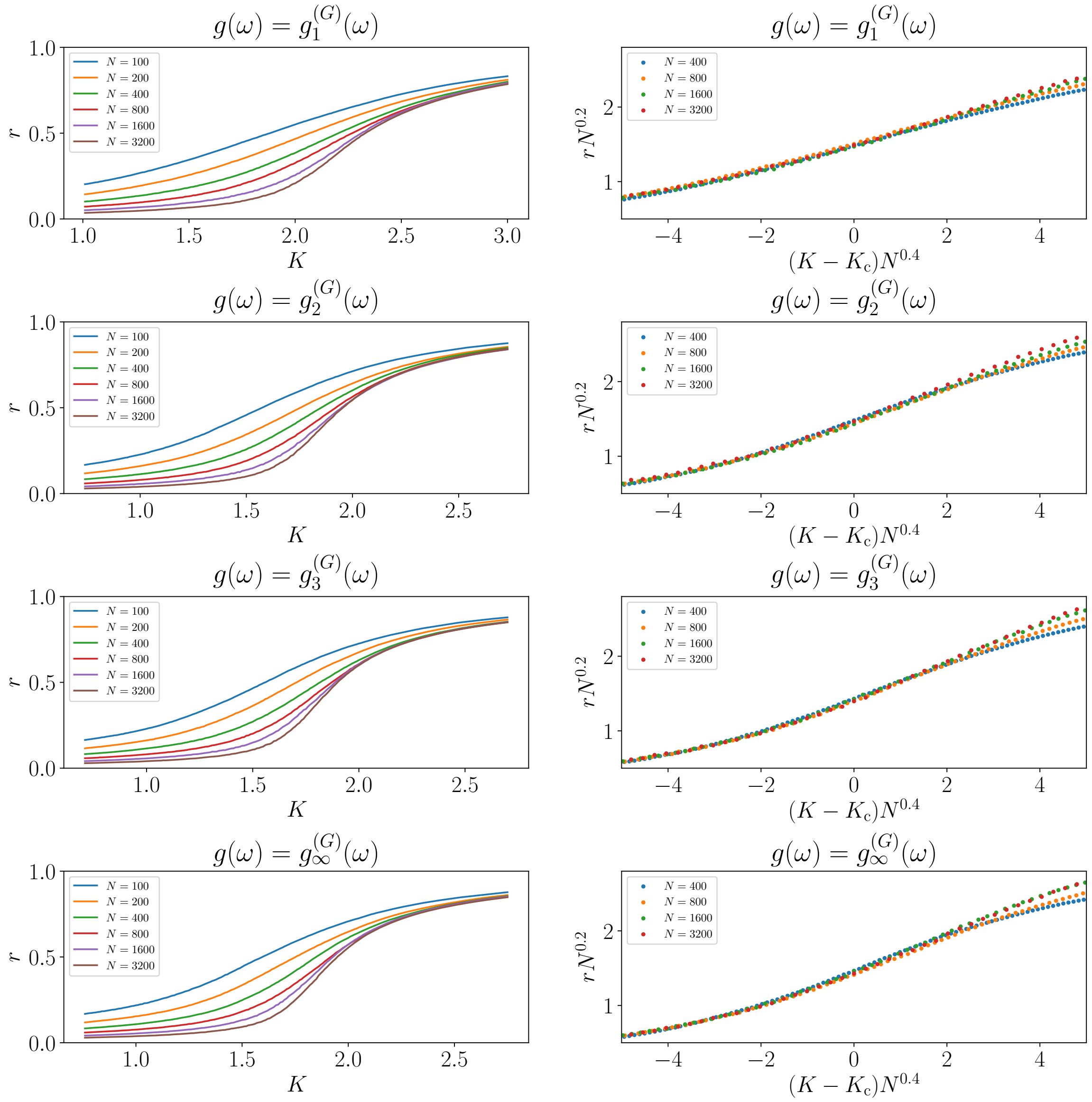

図 4　スモールワールドネットワーク上の蔵本モデルの有限サイズでの数値計算結果 (左) とその有限サイズスケーリングの図 (右)。スモールワールドネットワークは Watts–Strogatz ネットワークを用いて生成しており、パラメーターは $(k,p)=(3,0.2)$ と定めている。微分方程式の数値計算には 4 次の Runge–Kutta 法を用いて、時間刻み幅は $\delta t = 0.1$ で $t = 500$(5000 タイムステップ) まで時間発展させている。また $\{\theta_i\}$ の初期状態は $\mathbb{S}^1$ 上を一様に選ぶ。r_N は $t = 300$ から $t = 500$ までの時間平均を取ることで求めている。また、ネットワークと自然振動数にランダム性が入っているので各システムサイズ N に対して 400 回ずつ数値計算を行ってサンプル平均を取っている。

図 4 によると、分布関数 $g_n^{(G)}(\omega)$ のとり方に依らずに $\beta/\bar{\nu}=0.2$ と $1/\bar{\nu}=0.4$ で $K=K_{\mathrm{c}}$ 近傍でスケーリング関数に乗っている様子を確認することができる。これはスモールワールドネットワーク上の蔵本モデルの臨界指数が分布関数に依らずに $\beta=0.5$ であることを強く示唆するものであり、全結合蔵本モデルにおいて $\beta=1/(2n)$ であったことを思い出すとネットワーク構造がその力学系とその臨界指数に非自明な影響を与えてることがわかる。

最後にこの研究の展望を述べて本稿を締めくくる。今回はスモールワールドネットワーク上の蔵本モデルについて分布関数 $g(\omega)$ とそのときの臨界指数を調べた。全結合蔵本モデルでは結合関数によっても臨界指数が変化したので、そのような変化がスモールワールドネットワーク上の蔵本モデルでも起きるのかを調べる必要がある。また、上に述べたように $O(N)$ のネットワーク上の蔵本モデルにおける臨界指数を理論的に求める方法は知る限りまだ知られていない。今後 $O(N)$ のネットワーク上の蔵本モデルの連続極限を定義したり、その臨界指数を求めたりすることを調べることは重要な問題である。

参考文献

[1] M. Bennett, M. F. Scatz, H. Rockwood, and K. Wiesenfeld, Huygen's clocks, *Proc. R. Soc. London A* **458**, 563 (2002).

[2] J. Pantaleone, Synchronization of metronomes, *Am. J. Phys.* **70**, 992 (2002).

[3] H. M. Smith, Synchronous flashing of fireflies, *Science* **82**, 151 (1935).

[4] J. Buck and E. Buck, Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies, *Science* **159**, 1319 (1968).

[5] I. Aihara, T. Mizumoto, T. Otsuka, H. Awano, K. Nagira, H. G. Okuno, and K. Aihara, Spatio-Temporal Dynamics in Collective Frog Choruses Examined by Mathematical Modeling and Field Observations, *Sci. Rep.* **4**, 3891 (2014).

[6] K. Wiesenfeld, P. Colet, and S. H. Strogatz, Synchronization Transitions in a Disordered Josephson Series Array, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 404 (1996).

[7] K. Wiesenfeld, P. Colet, and S. H. Strogatz, Frequency locking in Josephson arrays: Connection with the Kuramoto model, *Phys. Rev. E* **57**, 1563 (1998).

[8] Y. Kuramoto, Self-entertainment of a population of coupled non-linear oscillators, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics* **39**, 420 (1975).

[9] S. H. Strogatz, From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators, *Physica* **143D**, 1 (2000).

[10] H. Chiba, A proof of the Kuramoto conjecture for a bifurcation structure of the infinite-dimensional Kuramoto model, *Ergod. Theo. Dyn. Syst.* **35**, 762 (2015).

[11] H. Daido, Susceptibility of large populations of coupled oscillators, *Phys. Rev. E* **91**, 012925 (2015).

[12] L. Basnarkov and V. Urumov, Phase transitions in the Kuramoto model, *Phys. Rev. E* **76**,

057201 (2007).

[13] M. Komarov and A. Pikovsky, Multiplicity of Singular Synchronous States in the Kuramoto Model of Coupled Oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 204101 (2013).

[14] H. Chiba and I. Nishikawa, Center manifold reduction for large populations of globally coupled phase oscillators, *Chaos* **21**, 043103 (2011).

[15] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes, Critical phenomena in complex networks, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1275 (2008).

[16] H. Chiba, G. S. Medvedev, and M. S. Mizuhara, Bifurcations in the Kuramoto model on graphs, *Chaos* **28**, 073109 (2018).

[17] H. Hong, M. Y. Choi, and B. J. Kim, Synchronization on small-world networks, *Phys. Rev. E* **65**, 026139 (2002).

[18] R. Juhász, J. Kelling, and G. Ódor, Critical dynamics of the Kuramoto model on sparse random networks, *J. Stat. Mech.*, 053403 (2019).

[19] D. J. Watts and S. H. Strogatz, Collective dynamics of ‘small-world’ networks, *Nature* **393**, 440 (1998).

[20] A. Pelisseto and E. Vicari, Critical phenomena and renormalization-group theory, *Phys. Rep.* **368**, 549 (2002).